目　　录

第一章 总 论

许多物理运动或其它运动过程可以用一个偏微分方程的定解问题来描述，例如无限长细弦的自由振动问题可归结成二阶双曲型方程的初值问题，而弦对平衡位置的偏移就是方程的解。但是绝大多数偏微分方程定解问题的解不能用明显的公式来表达，有时即使可用公式表示，也往往过于复杂，所以需要用各种近似方法来计算它的解。

差分方法是解偏微分方程定解问题的常用近似方法之一。Courant, Friedrichs, Lewy(1928) 首次对偏微分方程的差分方法作了完整的论述。第二次世界大战以来，快速电子计算机的诞生和发展为差分方法提供了强有力的工具，从而促使这一学科迅速地发展起来。

一般说来，从偏微分方程定解问题的原始形成到得到合理的数值结果，大致有五个环节：

第一，物理处理。例如根据各种物理定律建立起各种物理量之间的关系式，其中包括正确地提出各种定解条件。

第二，数学提法。通常对上面建立的各种关系式进行极限处理，从而表达为一个偏微分方程的定解问题。

第三，离散逼近。采用各种方法把偏微分方程的定解问题离散化。

第四，解算方法。主要是用直接法或迭代法求解由离散逼近所导致的线性或非线性的代数方程组。

第五，上机计算。把解算方法编成程序并用电子计算机计算，最后分析计算结果。

以上五个环节是密切联系的。一个实际问题的完善解决，常常要在这五个环节之间往复多次。

偏微分方程的差分方法主要是讨论第三个环节．本章将简要地介绍这方面的基本理论和方法。

§1　差分格式的构造

差分方法的首要问题是构造合理的差分格式，使得它的解保持原问题解的某些主要性质，并且又相当精确。本节介绍一些最基本的方法．

1.1　古典差分格式

考虑下列 Hopf 方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} + U\dfrac{\partial U}{\partial x} = 0, & -\infty < x < \infty,\ 0 < t \leqslant T \\ U(x,0) = U_0(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $U_0(x)$ 是具有紧致支集的已知函数，并假定 (1.1) 具有唯一的古典解。

用 h 和 τ 分别表示变量 x 和 t 的网格步长，$r=\dfrac{\tau}{h}$ 是正常数．记

$$\mathscr{R}_h = \{x \mid x = jh,\ j \text{ 是整数}\}.$$

$u(x,t)$ 表示 $U(x,t)$ 的近似值，$u^k(x) = u(x, k\tau)$，其中 $x \in \mathscr{R}_h$，$k \geqslant 0$．又采用下列差商记号

$$u_x^k(x) = \frac{1}{h}(u^k(x+h) - u^k(x)),$$

$$u_{\bar{x}}^k(x) = \frac{1}{h}(u^k(x) - u^k(x-h)),$$

$$u_{\hat{x}}^k(x) = \frac{1}{2}(u_x^k(x) + u_{\bar{x}}^k(x)),$$

$$u_t^k(x) = \frac{1}{\tau}(u^{k+1}(x) - u^k(x)),\ \text{等等}.$$

构造差分格式的最简单方法是用差商直接逼近相应的导数．

由于可以用不同的差商逼近同一个导数，因此能够用不同的差分格式来逼近同一个偏微分方程的定解问题。例如

$$\begin{cases} u_t^k(x) + u^k(x)u_x^k(x) = 0, & x \in \mathscr{R}_h, \quad k \geqslant 0, \\ u^0(x) = U_0(x), & x \in \mathscr{R}_h. \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} u_t^k(x) + u^k(x)u_{\bar{x}}^k(x) = 0, & x \in \mathscr{R}_h, \quad k \geqslant 0, \\ u^0(x) = U_0(x), & x \in \mathscr{R}_h \end{cases} \tag{1.3}$$

和

$$\begin{cases} u_t^k(x) + u^k(x)u_{\mathring{x}}^k(x) = 0, & x \in \mathscr{R}_h, \quad k \geqslant 0, \\ u^0(x) = U_0(x), & x \in \mathscr{R}_h. \end{cases} \tag{1.4}$$

如果 $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ 和 $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ 是连续的，那末(1.2)—(1.4)的逼近误差都是 $O(\tau + h)$。如果 $\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}$ 也连续，那末(1.4)的逼近误差是 $O(\tau + h^2)$。显然，逼近精度不仅与所选择的格式有关，还与 U 的光滑程度有关。

若 U 充分光滑，则可应用各种方法提高格式的精度。最简单的方法是用高阶差商来逼近相应的导数，例如当 $k \geqslant 1$ 时，可用下式来计算 $u^k(x)$，

$$u_{\hat{t}}^k(x) + \frac{4}{3} u_{\mathring{x}}^k(x) - \frac{1}{3} u_{\mathring{\mathring{x}}}^k(x) = 0, \tag{1.5}$$

其中

$$u_{\mathring{\mathring{x}}}^k(x) = \frac{1}{4h} (u^k(x + 2h) - u^k(x - 2h)).$$

上式的逼近误差是 $O(\tau^2 + h^4)$，但是增加了格式的层数和网格点数。

Collatz(1960) 采用 Hermite 方法来提高格式的精度。它的基本思想是在差分格式中保持函数的导数的近似值，从而在不增加网格点的情况下提高格式的精度。对于问题(1.1)来说，令 $V = \frac{\partial U}{\partial x}$，并将它改写成

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}+UV=0, & -\infty<x<\infty,\ 0<t\leqslant T,\\ V=\dfrac{\partial U}{\partial x}, & -\infty<x<\infty,\ 0<t\leqslant T,\\ U(x,0)=U_0(x), & -\infty<x<\infty.\end{cases}$$

不难验证

$$V^k(x+h)+4V^k(x)+V^k(x-h)=6U^k_{\hat{x}}(x)+O(h^4), \tag{1.6}$$

所以得到下列差分格式

$$\begin{cases}u^k_t(x)+u^k(x)v^k(x)=0, & x\in\mathscr{R}_h, k\geqslant 0,\\ v^k(x+h)+4v^k(x)+v^k(x-h)=6u^k_{\hat{x}}(x), & x\in\mathscr{R}_h, k\geqslant 0,\\ u^0(x)=U_0(x), & x\in\mathscr{R}_h,\\ v^0(x)=\dfrac{dU_0(x)}{dx}, & x\in\mathscr{R}_h.\end{cases} \tag{1.7}$$

格式 (1.7) 的逼近误差是 $O(\tau+h^4)$.

Orszag, Irraeli(1974) 用 Kreiss 方法来提高格式精度. 它的基本思想是用

$$\frac{u^k_{\hat{x}}(x)}{1+\dfrac{h^2}{6}u^k_{x\bar{x}}(x)} \tag{1.8}$$

来逼近 $\dfrac{\partial U^k}{\partial x}(x)$, 从而得到下列格式

$$\begin{cases}u^k_t(x)+\dfrac{h^2}{6}u^k_{tx\bar{x}}(x)+u^k(x)u^k_{\hat{x}}(x)=0, & x\in\mathscr{R}_h, k\geqslant 0,\\ u^0(x)=U_0(x), & x\in\mathscr{R}_h,\end{cases} \tag{1.9}$$

这个格式是隐式的. 不难验证它的逼近误差是 $O(\tau+h^4)$.

1.2 基于各种物理定律的差分格式

逼近精度高的差分格式不一定给出好的近似解，因为一个合理的格式还必须保持原问题的某些物理性质，所以人们常常从物理定律出发构造差分格式,

考虑 Hopf 方程的周期解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}+U\dfrac{\partial U}{\partial x}=0,\ -\infty<x<\infty,\ 0<t\leqslant T,\\ U(x,0)=U_0(x),\ -\infty<x<\infty,\end{cases}\tag{1.10}$$

其中 $U(x,t)=U(x+1,t)$，并假定它有唯一的古典解。显然，它的解满足下列一次守恒律

$$\int_0^1 U(x,t)dx=\int_0^1 U_0(x)dx.\tag{1.11}$$

如果把 (1.10) 在矩形 $\{(x,t)|(j-1)h\leqslant x\leqslant(j+1)h,\ k\tau\leqslant t\leqslant(k+1)\tau\}$ 内积分，则得到

$$\bar{U}^{k+1}-\bar{U}^k+\frac{1}{2}\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}[U^2(jh+h,t)-U^2(jh-h,t)]dt=0,\tag{1.12}$$

其中

$$\bar{U}^k=\int_{(j-1)h}^{(j+1)h}U(x,k\tau)dx.$$

若采用下列近似积分公式

$$\bar{U}^{k+1}\approx 2hu^{k+1}(jh),$$

$$\bar{U}^k\approx h(u^k(jh-h)+u^k(jh+h)),$$

$$\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}U^2(jh-h,t)dt=\tau(u^k(jh-h))^2,$$

$$\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}U^2(jh+h,t)dt=\tau(u^k(jh+h))^2,$$

那末，代入 (1.12) 后就得到下列 Lax(1954) 型差分格式

$$\begin{cases}u^{k+1}(x)-\dfrac{u^k(x+h)+u^k(x-h)}{2}\\ \qquad+\dfrac{\tau}{4}[(u^k(x+h))^2-(u^k(x-h))^2]=0,\ x\in\mathscr{I}_h,\ k\geqslant0,\\ u^k(x)=u^k(x+1),\qquad x\in\mathscr{I}_h,\ k\geqslant0,\\ u^0(x)=U_0(x),\qquad x\in\mathscr{I}_h,\end{cases}\tag{1.13}$$

其中 $\mathscr{I}_h=\{x/x=jh,\ 1\leqslant j\leqslant J-1\}$，$Jh=1+h$，$J$ 是正整数。不难证明

$$h\sum_{x\in\mathscr{I}_h}u^k(x)=h\sum_{x\in\mathscr{I}_h}u^0(x). \tag{1.14}$$

由于它合理地模拟了 (1.11),所以可以得到较好的数值结果.

一般说来,偏微分方程定解问题满足多个甚至无限个守恒律,所以基于不同的守恒律可以获得不同的格式. 事实上,(1.10) 的解还满足二次守恒律

$$\int_0^1 U^2(x,t)dx=\int_0^1 U_0^2(x)dx. \tag{1.15}$$

为了模拟它,郭本瑜 (1965a) 引入了下列差分算子

$$J(v,w)=\frac{1}{3}wv_{\hat{x}}+\frac{1}{3}(wv)_{\hat{x}}.$$

若 $v(x)$, $w(x)$ 和 $\varphi(x)$ 以 1 为周期,则由 Abel 公式得到

$$h\sum_{x\in\mathscr{I}_h}J(v(x),\varphi(x))w(x)+h\sum_{x\in\mathscr{I}_h}J(w(x),\varphi(x))v(x)=0. \tag{1.16}$$

特别有

$$h\sum_{x\in\mathscr{I}_h}J(v(x),\varphi(x))v(x)=0.$$

计算 (1.10) 的差分格式是

$$\begin{cases}u_t^k(x)+\frac{1}{4}J(u^k(x)+u^{k+1}(x),u^k(x)+u^{k+1}(x))=0, \\ \qquad\qquad x\in\mathscr{I}_h, k\geqslant 0, \\ u^k(x)=u^k(x+1), \qquad x\in\mathscr{I}_h,\ k\geqslant 0, \\ u^0(x)=U_0(x), \qquad x\in\mathscr{I}_h. \end{cases} \tag{1.17}$$

因为

$$J(v(x),v(x))=\frac{1}{2}(v(x)v(x))_{\hat{x}}-\frac{h^2}{12}(v_x(x)v_x(x))_{\bar{x}}, \tag{1.18}$$

所以 (1.17) 的解满足 (1.14). 又若用 $u^k(x)+u^{k+1}(x)$ 乘 (1.17),并对一切 $x\in\mathscr{I}_h$ 求和,则由 (1.16) 得到

$$h\sum_{x\in\mathscr{I}_h}(u^k(x))^2=h\sum_{x\in\mathscr{I}_h}(u^0(x))^2. \tag{1.19}$$

由于上式同时合理地模拟了 (1.15), 所以可以得到较好的数值结

果.

(1.10) 的解还满足传输律. 即沿着特征线

$$\frac{dx}{dt}=U(x,t),$$

满足

$$\frac{dU}{dt}=0. \tag{1.20}$$

假定 $u^k(x)$ 是已知的. 过点 $(jh,(k+1)\tau)$ 作近似特征线:

$$x-jh=u^k(jh)(t-(k+1)\tau).$$

如果 $r\leqslant\frac{1}{|u^k(jh)|}$，那末它与直线 $t=k\tau$ 相交于点 $\bar{x}=jh-\tau u^k(jh)\in[(j-1)h,(j+1)h]$,从而模拟 (1.20) 得到

$$u^{k+1}(jh)=u^k(\bar{x}). \tag{1.21}$$

但 $\bar{x}$ 不是网格点，必须用内插法计算 $u^k(\bar{x})$. 若 $u^k(jh)\geqslant0$,则 $\bar{x}\in[(j-1)h,jh]$, 所以可令

$$\begin{aligned}u^{k+1}(jh)=u^k(\bar{x})&=ru^k(jh)u^k(jh-h)\\&+(1-ru^k(jh))u^k(jh).\end{aligned} \tag{1.22}$$

若 $u^k(jh)\leqslant0$,则有

$$\begin{aligned}u^{k+1}(jh)&=-ru^k(jh)u^k(jh+h)\\&+(1+ru^k(jh))u^k(jh).\end{aligned} \tag{1.23}$$

这就是特征型格式.

1.3 基于变分原理的差分格式

建立差分格式的另一个重要途径是利用变分原理，它是由 Courant(1943), Argyris(1954) 和 Turner, Clou h, Martin, Topp (1956) 等人首先采用的.

今考虑下列 Burgers 方程的初,边值问题

$$\begin{cases}\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}-\nu\frac{\partial^2U}{\partial x^2}=0,\ 0<x<1,\ 0\leqslant t\leqslant T,\\U(0,t)=U(1,t)=0,\qquad 0\leqslant t\leqslant T,\\U(x,0)=U_0(x),\qquad 0<x<1,\end{cases} \tag{1.24}$$

其中 $\nu > 0$，$U_0(0) = U_0(1) = 0$，并记 $\mathscr{I} = \{x/0 < x < 1\}$. 今假定存在唯一的广义解，即存在唯一的 $U(x,t) \in L^\infty(0,T;L^2(\mathscr{I})) \cap L^2(0,T;H_0^1(\mathscr{I}))$，使得

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial t} W + UW \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} \right) dx = 0, \forall W \in H_0^1(\mathscr{I}). \tag{1.25}$$

把 $\mathscr{I}$ 剖分为小单元 $\mathscr{I}_j = \{x/jh - h \leqslant x \leqslant jh\}$,

$$\mathscr{I} = \bigcup_{j=1}^{J} \mathscr{I}_j.$$

用 $\Phi_h \subset H_0^1(\mathscr{I})$ 和 $\Psi_h \subset H_0^1(\mathscr{I})$ 分别表示基函数空间和试验函数空间，它们的每个元素都是连续的，并在 $\mathscr{I}_j$ 中是代数多项式. 用 $\varphi_j(x)$ 和 $\psi_j(x)$ 分别表示 Φ_h 和 Ψ_h 的基函数. $U(x,t)$ 的近似解是 $u(x,t)$,

$$u(x,t) = \sum_{l=1}^{J} u_l(t) \varphi_l(x).$$

从而由 (1.25) 得到

$$\sum_{l=1}^{J} \int_0^1 \dot{u}_l(t) \varphi_l(x) \psi_j(x) dx + \sum_{l,\mu=1}^{J} \int_0^1 u_l(t) u_\mu(t)$$

$$\cdot \varphi_l(x) \varphi'_\mu(x) \psi_j(x) dx + \nu \sum_{l=1}^{J} \int_0^1 u_l(t) \varphi'_l(x) \psi'_j(x) dx = 0, \tag{1.26}$$

其中 $\dot{u}_l(t)$ 表示 $u_l(t)$ 对 t 的导数，$\varphi'_l(x)$ 表示 $\varphi_l(x)$ 对 x 的导数，等等.

若 $\Phi_h = \Psi_h$，这就是 Галеркин 方法. 如果

$$\varphi_j(x) = \varphi\left(\frac{x}{h} - j\right), \tag{1.27}$$

其中

$$\varphi(s) = \begin{cases} 1 - |s|, & \text{当 } |s| \leqslant 1, \\ 0, & \text{当 } |s| > 1, \end{cases}$$

它就是一次元有限元格式. 经计算得到

$$
\begin{cases}
\int_0^1 \varphi_{i-1}(x)\varphi_i(x)dx = \dfrac{h}{6}, \\
\int_0^1 \varphi_i^2(x)dx = \dfrac{2h}{3}, \\
\int_0^1 \varphi_{i+1}(x)\varphi_i(x)dx = \dfrac{h}{6},
\end{cases}
\tag{1.28}
$$

$$
\begin{cases}
\int_0^1 \varphi_{i-1}(x)\varphi_i(x)\varphi_{i-1}'(x)dx = -\dfrac{1}{6}, \\
\int_0^1 \varphi_i^2(x)\varphi_{i-1}'(x)dx = -\dfrac{1}{3}, \\
\int_0^1 \varphi_{i-1}(x)\varphi_i(x)\varphi_i'(x)dx = \dfrac{1}{6}, \\
\int_0^1 \varphi_i^2(x)\varphi_i'(x)dx = 0, \\
\int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x)\varphi_i'(x)dx = -\dfrac{1}{6}, \\
\int_0^1 \varphi_i^2(x)\varphi_{i+1}'(x)dx = \dfrac{1}{3}, \\
\int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x)\varphi_{i+1}'(x)dx = \dfrac{1}{6},
\end{cases}
\tag{1.29}
$$

和

$$
\begin{cases}
\int_0^1 \varphi_{i-1}'(x)\varphi_i'(x)dx = -\dfrac{1}{h}, \\
\int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_i'(x)dx = \dfrac{2}{h}, \\
\int_0^1 \varphi_{i+1}'(x)\varphi_i'(x)dx = -\dfrac{1}{h}.
\end{cases}
\tag{1.30}
$$

把 (1.28)—(1.30) 代入 (1.26) 就得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{6}\left(\dot{u}_{i-1}(t) + 4\dot{u}_i(t) + \dot{u}_{i+1}(t)\right) + \frac{1}{3}u_i(t)(u_i(t))_{\mathring{x}} \\
&\quad + \frac{1}{3}(u_i^2(t))_{\mathring{x}} - \nu(u_i(t))_{x\bar{x}} = 0.
\end{aligned}
\tag{1.31}
$$

若 $\Phi_h \neq \varphi_h$，即得到 Петров-Галеркин 方法．若采用乘积

法，也就是用

$$\sum_{i=1}^{J} g(u_i(t))\varphi_i(x)$$

来逼近 $g(U)$，那末得到计算 (1.24) 的下列格式

$$\sum_{l=1}^{J}\int_0^1 \dot{u}_l(t)\varphi_l(x)\phi_i(x)dx-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{J}\int_0^1 u_l^2(t)\varphi_l(x)\phi_i'(x)$$

$$\cdot dx+\nu\sum_{l=1}^{J}\int_0^1 u_l(t)\varphi_l'(x)\phi_i'(x)dx=0. \tag{1.32}$$

假定 $\varphi_i(x)$ 由 (1.27) 决定，

$$\begin{cases}\phi_i(x)=\phi\left(\dfrac{x}{h}-i\right),\\ \phi(s)=0,\ 当\ |s|\geqslant 1.\end{cases} \tag{1.33}$$

通常还要求 $\phi(s)$ 满足下列规范化条件：

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-1}^{1}\phi(s)ds=1,\\ \displaystyle\int_{-1}^{1}\phi'(s)ds=0,\\ \displaystyle\int_{-1}^{1}\phi'(s)\mathrm{sign}(s)ds=-2.\end{cases} \tag{1.34}$$

下面记

$$\begin{cases}a=\displaystyle\int_{-1}^{1}|s|\phi(s)ds,\\ b=-\displaystyle\int_{-1}^{1}s\phi(s)ds,\\ c=\displaystyle\int_{-1}^{0}s\phi'(s)ds,\\ d=-\displaystyle\int_{0}^{1}s\phi'(s)ds,\end{cases} \tag{1.35}$$

则不难验证

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^1\varphi_{i-1}(x)\phi_i(x)dx=\frac{h}{2}(a+b),\\ \displaystyle\int_0^1\varphi_i(x)\phi_i(x)dx=h(1-a),\\ \displaystyle\int_0^1\varphi_{i+1}(x)\phi_i(x)dx=\frac{h}{2}(a-b),\end{cases} \tag{1.36}$$

$$\begin{cases}\int_0^1 \varphi_{j-1}(x)\psi_j'(x)dx = -c,\\ \int_0^1 \varphi_j(x)\psi_j'(x)dx = c+d,\\ \int_0^1 \varphi_{j+1}(x)\psi_j'(x)dx = -d,\end{cases} \tag{1.37}$$

和

$$\begin{cases}\int_0^1 \varphi_{j-1}'(x)\psi_j'(x)dx = -\frac{1}{h},\\ \int_0^1 \varphi_j'(x)\psi_j'(x)dx = \frac{2}{h},\\ \int_0^1 \varphi_{j+1}'(x)\psi_j'(x)dx = -\frac{1}{h}.\end{cases} \tag{1.38}$$

把 (1.36)—(1.38) 代入 (1.32),即得到

$$\dot{u}_j(t) - bh(\dot{u}_j(t))_{\hat{x}} + \frac{ah^2}{2}(\dot{u}_j(t))_{x\bar{x}} - \frac{c}{2}(u_j^2(t))_{\bar{x}}$$

$$+\frac{d}{2}(u_j^2(t))_x - \nu(u_j(t))_{x\bar{x}} = 0. \tag{1.39}$$

特别,当 $\varphi_j(x) \equiv \psi_j(x)$ 时,$a=\frac{1}{3}$, $b=0$, $c=-\frac{1}{2}$,$d=\frac{1}{2}$,从而 (1.39) 退化为应用乘积法的 Галеркин 方法.

1.4 其它类型的差分格式

本节介绍一些建立差分格式的其它方法. 设 $x=(x_1, x_2)$, Ω 是正方形 $\{x|0<x_1, x_2<1\}$,边界是 Γ. 今考虑下列问题

$$\begin{cases}-\Delta U = f, & x\in\Omega,\\ U = g, & x\in\Gamma,\end{cases} \tag{1.40}$$

其中 f 和 g 是适当光滑的函数,使得该问题有唯一的古典解.

配置法最早是由 Канторович(1934) 提出的. Lanczos(1938, 1956),Ito(1972), Cavendish(1972), Douglas, Dupont(1972, 1973) 和 De Boor, Swartz(1972)等用它建立计算格式,用 $\mathfrak{D}_j$ 表示区间 $[jh-h, jh]$, $P_r(\mathfrak{D}_j)$ 表示 $\mathfrak{D}_j$ 上次数不超过 r 的多项式的集合,

$r \geqslant 3$,并记

$$M(h,r)=\{v(x)\mid v\in C^1[0,1], v\in P_r(\mathfrak{D}_j), 1\leqslant j\leqslant J\}.$$

a_l 表示 [0, 1] 中的 Gauss 点,

$$0<a_1<a_2<\cdots<a_{r-1}<1,$$

w_l 表示权, $1\leqslant l\leqslant r-1$, $w_l>0$, 于是对于一切次数不超过 $2r-3$ 的多项式 $p(x)$,都有

$$\int_0^1 p(x)dx=\sum_{l=1}^{r-1} w_l p(a_l).$$

记 $a_{j_m,l_m}=(j_m-1)h+a_{l_m}h$, $1\leqslant l_m\leqslant r-1$, $m=1,2$,并用 $u(x)$ 表示 $U(x)$ 的近似解,于是得到计算 (1.40) 的配置格式

$$-\Delta u(a_{j_1,l_1},a_{j_2,l_2})=f(a_{j_1,l_1},a_{j_2,l_2}),$$

$$1\leqslant j_1, j_2\leqslant J,\ 1\leqslant l_1, l_2\leqslant r-1. \qquad (1.41)$$

配置格式的优点是可以获得相当高的收敛阶，这被称为超收敛性。

Babuška(1969a) 和 Bramble, Schatz(1971) 还采用最小二乘法。例如设 Φ_h 是 $H^1(\Omega)$ 的有限维子空间,并记

$$J(v)=\|f-\Delta v\|^2_{L^2(\Omega)}+h^{-3}\|g-v\|^2_{L^2(\Gamma)},$$

于是计算 (1.40) 的最小二乘法是找 $u(x)\in\Phi_h$,使得

$$J(u)=\min_{v\in\Phi_h} J(v).$$

最小二乘法的优点是不必构造满足边界条件的基函数. 也可以把它看作基于变分原理的差分格式.

当 $f\equiv 0$ 时,还可以用边界值逼近的方法来计算 (1.40). 例如设 Φ_N 是 N 维空间，它的基底 $\varphi_l(x)$ 是 (1.40) 的特解，于是 $U(x)$ 的近似解是 $u(x)$,

$$u(x)=\sum_{l=1}^{N} a_l\varphi_l(x),$$

它满足

$$\sup_{x\in\Gamma}|g(x)-u(x)|=\min_{v\in\Phi_N}\sup_{x\in\Gamma}|g(x)-v(x)|.$$

还有许多其它构造方法,例如双曲型方程的耗散格式，Году-

нов 格式，随机选取法，小参数法和预估校正法，抛物型方程的正型格式，Box 格式，交替方向法和分裂法（splitting），以及椭圆型方程的单调格式，广义差分格式，Schwarz 方法和加速收敛法，等等。在以后各章中将陆续介绍这些方法。

§2 线性差分格式的稳定性和收敛性

当进行大量计算时，差分格式的稳定性是相当重要的。假如在某种条件下，解的误差被定解条件所控制，我们就认为格式是稳定的。差分格式的另一个根本问题是它的解对原微分方程定解问题解的收敛性。由于稳定性与收敛性密切相关，所以通常把两者统一处理。

Courant, Friedrichs, Lewy(1928) 最早研究了收敛性，之后，Von Neumann, Goldstine (1974), Crank, Nicolson (1947) 和 Seeger (1948) 等研究了稳定性。目前已有大量的有关著作，例如 Рябенький, Филиппов(1956), Forsythe, Wasow(1960), Richtmyer. Morton(1967), Самарский, Гулин(1973) 和 Марчук, Шайдуров (1979) 等等。

2.1 线性方程的初值问题

Von Neumann, Goldstine (1947), Von Neumann, Richtmyer (1950), O'Brien, Hyman, Kaplan(1951) 和 Lax, Richtmyer(1956) 等都研究了差分格式初值问题的稳定性，并在 Richtmyer (1957) 和 Richtmyer, Morton(1967) 的著作中建立了一般的理论。

假设 $\mathfrak{B}$ 是 Banach 空间，其范数是 $\|\cdot\|$. t 是实参数，$U(t)\in\mathfrak{B}$, L 是线性算子，它不明显地依赖于 t，其定义域是 $D(L)$. 今考虑下列问题

$$\begin{cases}\dfrac{dU(t)}{dt}=LU(t),\ 0<t\leqslant T,\\ U(0)=U_0.\end{cases}\tag{2.1}$$

这问题可以是纯初值问题，也可以是初，边值问题，但此时总假定边界条件是线性和齐次的，并且每个 $U(t)\in\mathfrak{B}$ 都满足这种边界条件。

所谓(2.1)的解是指单参数族 $U(t)\in\mathfrak{B}\cap D(L)$，使得当 $\tau\to 0$ 时，

$$\left\|\frac{U(t+\tau)-U(t)}{\tau}-LU(t)\right\|\to 0. \tag{2.2}$$

假定 $\mathscr{D}$ 是 $\mathfrak{B}$ 中的这样一个子集，对于一切 $U_0\in\mathscr{D}$，都有唯一的元素 $U(t)\in\mathfrak{B}$，并且对一切 $t\in[0,T]$，一致地满足 (2.2)。于是存在一个线性算子，记为 $E_0(t)$，而当 $U_0\in\mathscr{D}$ 时，$U(t)=E_0(t)U_0$ 就是 (2.1) 的解。

如果下列两个条件成立，则称问题 (2.1) 是适定的，

(i) $\mathscr{D}$ 在 $\mathfrak{B}$ 中稠密，

(ii) 存在正常数 c_0，使得对一切 $t\in[0,T]$，都有 $\|E_0(t)\|\leqslant c_0$。

条件 (ii) 表示：(2.1) 的解对初值 U_0 是连续依赖的。事实上，设 $U^{(l)}(t)$ 的初值是 $U_0^{(l)}$，则

$$\|U^{(1)}(t)-U^{(2)}(t)\|\leqslant c_0\|U_0^{(1)}-U_0^{(2)}\|.$$

根据 Hahn 定理，可以把 $E_0(t)$ 扩张到全空间 $\mathfrak{B}$，记为 $E(t)$，并且 $\|E(t)\|=\|E_0(t)\|$。于是对任意的 $U_0\in\mathfrak{B}$，都存在相应的元素 $E(t)U_0$，它被称为 (2.1) 的广义解。

显然，$E(t)$ 满足半群性质，即对一切 $s\geqslant 0$，$t\geqslant 0$，

$$E(s+t)=E(s)E(t).$$

(2.2) 还表示，当 $\tau\to 0$ 时，对一切 $t\in[0,T]$，

$$\|U(t+\tau)-U(t)\|\to 0.$$

我们假定 $\mathfrak{B}$ 是定义在 n 维欧氏空间 $\mathscr{R}^n$ 中的一个有界或无界域上的函数类，$\mathscr{R}^n$ 中的元素记为 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。为了用差分方法计算 (2.1)，必须把空间 $\mathscr{R}^n$ 进行网格剖分，$\mathscr{R}^n$ 中网格点的集合记为 $\mathscr{R}^n_h$。假设变量 x_m 的步长是 h_m，$h_m=g_m(\tau)$，并且当 $\tau\to 0$ 时，$g_m(\tau)\to 0$。又用 u^k 表示 $U(k\tau)$ 的近似值，于是得到

一般形式的两层差分格式

$$A(\tau)u^{k+1}=B(\tau)u^{k},\tag{2.3}$$

其中 $A(\tau)$ 和 $B(\tau)$ 是不明显依赖于 t 的线性差分算子。对于每个 x,$A(\tau)$ 和 $B(\tau)$ 分别把 u^{k+1} 和 u^k 的若干邻近点上的值线性地组合起来。我们假定 $A(\tau)$ 和 $B(\tau)$ 是 τ 的连续函数,$A^{-1}(\tau)$ 存在,$C(\tau)=A^{-1}(\tau)B(\tau)$,于是 (2.3) 等价于

$$u^{k+1}=C(\tau)u^{k}.\tag{2.4}$$

用 I 表示恒等算子,$\mathscr{U}$ 是 (2.1) 的解的一个子集合,它的全部元素所对应的初值的集合 $\mathscr{U}_0$ 在 $\mathscr{B}$ 中稠密。记

$$R_\tau(U(t))=\left(\frac{C(\tau)-I}{\tau}-L\right)U(t).$$

若对任一 $U(t)\in\mathscr{U}$,当 $\tau\to0$ 时,对一切 $t\in[0,T]$,一致地有 $\|R_\tau(U(t))\|\to0$,则称格式 (2.3) 对 (2.1) 的逼近是相容的。

由相容性定义和 (2.2) 推得,当 $\tau\to0$ 时,对一切 t,一致地有

$$\left\|\frac{U(t+\tau)-C(\tau)U(t)}{\tau}\right\|\to0.\tag{2.5}$$

由 (2.4) 递推地得到

$$u^{k}=[C(\tau)]^{k}U_0.\tag{2.6}$$

用 $\left[\frac{t}{\tau}\right]$ 表示与 $\frac{t}{\tau}$ 最接近的正整数。若对一切 $U_0\in\mathscr{B}$ 和固定的 $t\in[0,T]$,当 $\tau\to0$ 时,

$$\|[C(\tau)]^{\left[\frac{t}{\tau}\right]}U_0-E(t)U_0\|\to0,$$

则称 (2.3) 是收敛的。

下面来讨论稳定性。假定 U_0 有误差 $\widetilde{U}_0$,则 u^k 有误差 $\tilde{u}^k$。如果存在正常数 c_1,使得当 $\tau\leqslant\tau_0$, $k\tau\leqslant T$ 时,一致地有

$$\|\tilde{u}^k\|\leqslant c_1\|\widetilde{U}_0\|,\tag{2.7}$$

则称 (2.3) 是对初值按范数 $\|\cdot\|$ 稳定的。

由于格式是线性的,因此 $\tilde{u}^k=[C(\tau)]^k\widetilde{U}_0$。所以,如果对一切 $\tau\leqslant\tau_0$, $k\tau\leqslant T$,都有

$$\|[C(\tau)]^k\| \leqslant c_1, \tag{2.8}$$

则格式是稳定的。反之，若 (2.7) 成立，则对一切 U_0 和相应的 u^k，都有 $\|u^k\| \leqslant c_1\|U_0\|$，从而 (2.8) 成立。因此定义 (2.7) 和 (2.8) 是等价的。

下面的 Lax 等价性定理 (见 Richtmyer, Morton (1967)) 揭示了稳定性与收敛性的关系。

定理 2.1 如果问题 (2.1) 是适定的，格式 (2.3) 对它的逼近是相容的，那末稳定性和收敛性是等价的。

证明 先由收敛性推出稳定性。我们断言，若 (2.3) 是收敛的，则对一切 $U_0 \in \mathfrak{B}$，都存在正常数 $M(U_0)$，使得当 $\tau \leqslant \tau_0$，$k\tau \leqslant T$ 时，一致地有

$$\|[C(\tau)]^k U_0\| \leqslant M(U_0).$$

若不然，则可选择子列 $\{\tau_l\}$，使得当 $l \to \infty$ 时，

$$\tau_l \to 0, \quad k_l\tau_l \to t' \in [0, T],$$

$$\|[C(\tau_l)]^{k_l} U_0\| \to \infty.$$

但是由收敛性得到

$$\|[C(\tau_l)]^{k_l} U_0 - E(t')U_0\| \to 0,$$

这是矛盾的。

根据上述断言及一致有界性定理，存在正常数 c_1，使得对一切 $\tau \leqslant \tau_0$，$k\tau \leqslant T$，都有 $\|[C(\tau)]^k\| \leqslant c_1$。

再证明稳定性包含了收敛性。先假定 $U(t) = E(t)U_0 \in \mathscr{U}$，那末根据 (2.5)，对任意正数 ε，都存在 τ_0，使得当 $\tau \leqslant \tau_0$ 时，

$$\|[C(\tau) - E(\tau)]U(t)\| \leqslant \varepsilon\tau.$$

令

$$\begin{aligned} A_l &= [C(\tau_l)]^{k_l} U_0 - E(k_l\tau_l)U_0 \\ &= \sum_{\sigma=0}^{k_l-1} [C(\tau_l)]^\sigma [C(\tau_l) - E(\tau_l)] \\ &\quad \cdot E[(k_l - 1 - \sigma)\tau_l]U_0, \end{aligned}$$

则有

$$\|A_l\| \leqslant c_1 \sum_{\sigma=0}^{k_l-1} \varepsilon\tau_l = c_1\varepsilon k_l\tau_l \leqslant c_1\varepsilon T.$$

因此当 $\tau_l \to 0$, $k_l\tau_l \to t$ 时,$\|A_l\| \to 0$.

假定 t 是 $[0, T]$ 中的任意值,则取 $t' = \min(t, k_l\tau_l)$. 记 $s = t - k_l\tau_l$,由 $E(t)$ 的半群性质得到

$$E(k_l\tau_l) - E(t) = \mp[E(|s|) - I]E(t'),$$

其中符号"$\mp$"由 s 的正负号来决定,从而

$$\|[E(k_l\tau_l) - E(t)]U_0\| \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|E(t)\|\,\|(E(|s|) - I)U_0\|.$$

显然,当 $s \to 0$ 时,上式趋于零。所以,若 $U(t) \in \mathscr{U}$, $k_l\tau_l \to t$ 则

$$\|[C(\tau_l)]^{k_l}U_0 - E(t)U_0\| \to 0.$$

设 $U(t)$ 是 (2.1) 的任意解,它的初值为 U_0. 因为 $\mathscr{U}_0$ 在 $\mathfrak{B}$ 中稠密,所以可选取序列 $U_0^{(\mu)} \in \mathscr{U}_0$,使得当 $\mu \to \infty$时,$\|U_0^{(\mu)} - U_0\| \to 0$. 我们有

$$[C(\tau_l)]^{k_l}U_0 - E(t)U_0 = ([C(\tau_l)]^{k_l} - E(t))U_0^{(\mu)}$$
$$+ [C(\tau_l)]^{k_l}(U_0 - U_0^{(\mu)}) - E(t)(U_0 - U_0^{(\mu)}),$$

由于 $U_0^{(\mu)} \in \mathscr{U}_0$,所以当 $k_l\tau_l \to t$ 时,上式右端第一项趋于零,这就证明了收敛性.

现在把上面结果推广到下列非齐次问题

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t) - LU(t) = f(t),\ 0 < t \leqslant T, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{2.9}$$

其中 U_0 和 $f(t)$ 是已知的,$f(t)$ 对 $t \in [0, T]$ 一致连续,L 是闭算子,并假定对一切正整数 β, $D(L^\beta)$ 在 $\mathfrak{B}$ 中稠密.

定理 2.2 如果下列条件满足

(i) $U_0 \in D(L)$, $f(t) \in D(L) \cap D(L^2)$,

(ii) $Lf(t)$ 和 $L^2f(t)$ 连续,

那末,(2.9) 具有唯一解 $U(t)$,并且

$$U(t) = E(t)U_0 + \int_0^t E(t-s)f(s)ds, \tag{2.10}$$

其中 $E(t)$ 是与 (2.9) 对应的齐次问题的解算子.

证明 分四步进行. 首先,由 $E(t)$ 的一致有界性和 $f(s)$ 的连续性,(2.10) 中的积分是有意义的. 对 (2.10) 形式地求导得到

$$\begin{aligned}\frac{dU(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}E(t)U_0 + \frac{d}{dt}\int_0^t E(t-s)f(s)ds \\ &= LE(t)U_0 + \frac{d}{dt}\int_0^t E(t-s)f(s)ds.\end{aligned} \tag{2.11}$$

所以若能证明下式成立

$$\frac{d}{dt}\int_0^t E(t-s)f(s)ds = f(t) + \int_0^t \frac{d}{dt}E(t-s)f(s)ds, \tag{2.12}$$

那末由 (2.11) 得到

$$\begin{aligned}\frac{dU(t)}{dt} &= LE(t)U_0 + \int_0^t LE(t-s)f(s)ds \\ &\quad + f(t) = LU(t) + f(t),\end{aligned}$$

也就是说,(2.10) 是 (2.9) 的解.

其次,由 $E(t)$ 与 L 的可易性得到

$$\frac{d}{dt}E(t-s)f(s) = LE(t-s)f(s) = E(t-s)Lf(s),$$

所以由条件 (ii), (2.12) 右端的积分存在. 从而把原问题归结为证明,对一切 $s\in[0, T]$,当 $\tau\to 0$ 时,一致地有

$$\left\|\frac{E(t+\tau-s)-E(t-s)}{\tau}f(s) - LE(t-s)f(s)\right\|\to 0.$$

由于 $E(t-s)$ 是一致有界的且与 L 可易, 所以又把问题归结成证明对一切 $s\in[0, T]$,当 $\tau\to 0$ 时,

$$\left\|\frac{E(\tau)-I}{\tau}f(s) - Lf(s)\right\|\to 0. \tag{2.13}$$

第三,对于固定的 s, $\varphi(t) = E(t)f(s)$ 满足

$$\frac{d\varphi}{dt} = L\varphi.$$

由于 $f(t)\in D(L^2)$,所以又有

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = L^2\varphi.$$

可以证明,对任意的 $\varphi\in D(L)$,若 $L\varphi$ 连续,则

$$E(t)\varphi = \varphi + \int_0^t L\varphi(s)ds.$$

两次应用上式即得到

$$\frac{E(\tau)-I}{\tau}f(s) - Lf(s) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau (L\varphi(t) - L\varphi(0))dt$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \left(\int_0^t L^2\varphi(\xi)d\xi\right)dt$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \left(\int_0^t E(\xi)L^2f(s)d\xi\right)dt.$$

所以

$$\left\|\frac{E(\tau)-I}{\tau}f(s) - Lf(s)\right\| \leqslant \frac{\tau}{2}\sup_{0\leqslant \xi, s\leqslant 1}\|E(\xi)L^2f(s)\|.$$

因此当 $\tau \to 0$ 时，(2.13) 成立，从而 (2.12) 成立.

最后，设 (2.9) 有两个解，它们的差为 $\widetilde{U}(t)$，则有

$$\begin{cases}\dfrac{d\widetilde{U}(t)}{dt} = L\widetilde{U}(t),\\ \widetilde{U}(0) = 0,\end{cases}$$

并由此得到 $\widetilde{U}(t) \equiv 0$，即 (2.9) 的解是唯一的.

如果 $f(s)$ 不连续，但 (2.10) 的积分存在，则把它定义为 (2.9) 的广义解.

与 (2.9) 相对应的差分格式是

$$\begin{cases}A(\tau)u^{k+1} = B(\tau)u^k + f^k,\\ u^0 = U_0,\end{cases} \tag{2.14}$$

或

$$u^{k+1} = C(\tau)u^k + \tau D(\tau)f^k,$$

其中 $D(\tau)f^k$ 逼近 $f(k\tau)$. 由上式得到

$$u^k = [C(\tau)]^k U_0 + \tau\sum_{l=0}^{k-1}[C(\tau)]^{k-l-1}D(\tau)f^l. \tag{2.15}$$

假定 f^l 有误差 $\tilde{f}^l$，并由此引起 u^k 的误差 $\tilde{u}^k$. 如果存在正常数 c_2，使得当 $\tau \leqslant \tau_0$，$k\tau \leqslant T$ 时，一致地有

$$\|\tilde{u}^k\| \leqslant c_2\tau\sum_{l=0}^{k-1}\|\tilde{f}^l\|, \tag{2.16}$$

则称 (2.14) 的解对右端按范数 $\|\cdot\|$ 稳定。

因为

$$\tilde{u}^k = \tau \sum_{l=0}^{k-1} [C(\tau)]^{k-l-1} D(\tau) \tilde{f}^l, \tag{2.17}$$

所以，如果 (2.3) 对初值是稳定的，那末当 $\tau \leqslant \tau_0$, $k\tau \leqslant T$ 时，

$$\|\tilde{u}^k\| \leqslant c_1 \tau \sum_{l=0}^{k-1} \|D(\tau)\| \|\tilde{f}^{(l)}\|,$$

即解关于右端也是稳定的。

把 (2.10) 和 (2.15) 两式相减得到

$$\begin{aligned} u^k - U(t) = & [C(\tau)]^k U_0 - E(t) U_0 \\ & + \tau \sum_{l=0}^{k-1} ([C(\tau)]^{k-l-1} - E(t - l\tau - \tau)) D(\tau) f^l \\ & + \tau \sum_{l=0}^{k-1} E(t - l\tau - \tau) D(\tau) (f^l - f(l\tau)) \\ & + \tau \sum_{l=0}^{k-1} E(t - l\tau - \tau) D(\tau) f(l\tau) - \int_0^t E(t-s) f(s) ds. \end{aligned}$$

若当 $\tau \leqslant \tau_0$, $k\tau \leqslant T$ 时，$\|[C(\tau)]^k\|$ 一致有界，那末当 $\tau \to 0$, $k\tau \to t$ 时，上式的右端趋向于零，所以格式是收敛的. 反之，由收敛性可以推出稳定性. 从而 Lax 等价性定理对于线性非齐次方程的初值问题也是成立的。

可以把前面的全部结果推广到 L 依赖于 t 的情况。

还有许多其它的稳定性定义。

Richtmyer (1957) 最初研究的稳定性是指对一切 $\tau \leqslant \tau_0$，都有

$$\|C(\tau)\| \leqslant 1.$$

如果存在正常数 c_3，使得对一切 $\tau \leqslant \tau_0$，都有

$$\|C(\tau)\| \leqslant 1 + c_3 \tau,$$

则称格式 (2.3) 是强稳定的。

显然，Richtmyer (1957) 的稳定性包含了强稳定性，而强稳定性包含了稳定性。

如果存在非负常数 α 和正常数 c_4，使得对一切 $\tau \leqslant \tau_0$，$k\tau \leqslant T$，都有

$$\|[C(\tau)]^k\| \leqslant c_4\tau^{-\alpha},$$

则称格式 (2.3) 是弱稳定的。

显然，稳定的格式一定是弱稳定的。如果对于 $t \in [0, T]$，一致地有

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\|R_\tau(U(t))\|}{\tau^\alpha} = 0,$$

则当 $\tau \to 0$ 时，u^k 收敛到 $U(k\tau)$。

Strang(1960), Forsythe, Wasow(1960) 和 Richtmyer, Morton (1967)都研究了这种弱稳定性。有关材料还可见 Gottlieb, Orszag (1977)。

一般地说，常常存在 τ 的函数 $M(\tau)$，使得当 $\tau \leqslant \tau_0$，$k\tau \leqslant T$ 时，

$$\|[C(\tau)]^k\| \leqslant M(\tau).$$

如果 $M(\tau) \leqslant c_4\tau^{-\alpha}$，则该格式是弱稳定的。如果当 $\tau \to 0$ 时，它按 $\frac{1}{\tau}$ 的指数增长，则认为该格式绝对不可用。

2.3 不适定的初值问题

在流体力学，金属探矿和天气预报等问题中，会遇到不适定的初值问题。Лаврентьев(1956,1962)，Крейн(1957)，Крейн，Прозоровсая(1960) 和 Miller(1964) 等最早研究了这类问题。Чудов (1962) 和张关泉 (1965) 等讨论了有关的差分格式。本节介绍一类不适定初值问题及其差分解法，其范数具有凸性估计，它是张关泉 (1965) 工作的直接推广。

设 $\mathfrak{B}$ 是 Banach 空间，L 是线性算子，今考虑下列问题

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = LU, \quad 0 < t \leqslant T, \\ U(0) = U_0. \end{cases} \tag{2.18}$$

我们假定 (2.18) 是不适定的，但是存在正常数 c_0，使得对一

切解 $U(t)\in\mathfrak{B}$，它的范数满足

$$\|U(t)\|\leqslant c_0\|U(t)\|^{\frac{t}{T}}\|U(0)\|^{1-\frac{t}{T}}. \tag{2.19}$$

显然，这样的解是唯一的.

用 $\mathscr{D}$ 表示 $\mathfrak{B}$ 的一个子集，当 $U_0\in\mathscr{D}$ 时，(2.18) 有解并且 $\|U(T)\|<\infty$. 在 $\mathscr{D}$ 中定义范数

$$\|U_0\|'=\max(\|U_0\|,\ \|U(T)\|).$$

于是可以把 (2.18) 写成下列形式

$$U(t)=E(t)U_0,$$

其中 $E(t)$ 是定义在 $\mathscr{D}$ 上，并在 $\mathfrak{B}$ 中取值的线性算子. 根据 (2.19)，$E(t)$ 是有界算子，即存在正常数 c_1，使得

$$\|E(t)U_0\|\leqslant c_1\|U_0\|'. \tag{2.20}$$

注记 2.1 如果 (2.18) 是适定的，则存在正常数 c_2，使得 $\|U(T)\|\leqslant c_2\|U_0\|'$，所以 $\|U_0\|$ 和 $\|U_0\|'$ 等价，因此 (2.20) 等价于通常的稳定性.

如同 § 2.1 那样，计算 (2.18) 的线性差分格式是

$$u^{k+1}=C(\tau)u^k. \tag{2.21}$$

我们假定 $C(\tau)$ 满足下列条件:

(i) $[C(\tau)]^k$ 的定义域是 $\{U(t)/U(t)=E(t)U_0,\ U_0\in\mathscr{D},\ t+k\tau\leqslant T\}$，

(ii) $[C(\tau)]^kE(t)$ 连续地依赖于 t 和 τ，

(iii) $\mathscr{D}_0$ 是 $\mathscr{D}$ 的一个稠密子集，对任意的 t，τ 和 k，当 $U_0\in\mathscr{D}$ 时，有 $[C(\tau)]^kE(t)U_0\in\mathscr{D}_0$，

(iv) 对任意满足 $t+k\tau\leqslant T$ 的 t，τ 和 k，$[C(\tau)]^kE(t)$ 是作用在 $\mathscr{D}$ 上并在 $\mathfrak{B}$ 中取值的线性有界算子.

若对一切 $U_0\in\mathscr{D}_0$ 和 $t+\tau\leqslant T$，都有

$$C(\tau)E(t)U_0=E(t)C(\tau)U_0, \tag{2.22}$$

则称格式 (2.21) 是可易的.

一般来说，$\mathscr{D}$ 不是完备的. 根据 Hahn 定理，可以把算子 $E(t)$ 和 $[C(\tau)]^kE(t)$ 扩张到 $\mathscr{D}$ 的完备化空间上. 为方便计仍记为 $\mathscr{D}$，$E(t)$ 和 $[C(\tau)]^kE(t)$，并把 $E(t)U_0$ 称为 (2.18) 的广

义解.

如果对每个 $U_0 \in \mathscr{D}_0$ 和 $t \in [0, T]$,当 $\tau \to 0$ 时一致地有

$$\left\| \frac{[E(\tau) - C(\tau)]E(t)U_0}{\tau} \right\| \leqslant \varepsilon(U_0, \tau) \to 0, \qquad (2.23)$$

则称格式 (2.21) 对 (2.18) 的逼近是相容的.

若对一切 $U_0 \in \mathscr{D}$ 和 k, τ, t,其中 $t + k\tau \leqslant T$,当 $\tau \to 0$ 时,

$$\|([C(\tau)]^k - [E(\tau)]^k)E(t)U_0\| \leqslant \delta(U_0, \tau) \to 0, \quad (2.24)$$

则称 (2.21) 是对 (2.18) 的收敛格式.

若存在正常数 c_3,使得对一切 $\tau \leqslant \tau_0, t + k\tau \leqslant T$ 和 $U_0 \in \mathscr{D}$,

$$\|[C(\tau)]^k E(t)U_0\| \leqslant c_3\|U_0\|', \qquad (2.25)$$

则称格式 (2.21) 是稳定的.

定理 2.3 如果 (2.21) 是对 (2.18) 的收敛格式,那末它一定是稳定的.

证明 由 (2.20),当 $t + k\tau \leqslant T$ 时,对一切 $U_0 \in \mathscr{D}$,

$$\|[E(\tau)]^k E(t)U_0\| = \|E(t + k\tau)U_0\| \leqslant c_1\|U_0\|'.$$

结合 (2.24),即知存在仅与 U_0 有关的正常数 $M(U_0)$,使得

$$\|[C(\tau)]^k E(t)U_0\| \leqslant M(U_0). \qquad (2.26)$$

如果格式 (2.21) 不是稳定的,则可找到子列 $U_0^{(l)} \in \mathscr{D}$,和相应的 k_l, τ_l, t_l,使得 $t_l + k_l\tau_l \leqslant T$,且当 $l \to \infty$ 时,

$$\frac{\|[C(\tau_l)]^{k_l}E(t_l)U_0^{(l)}\|}{\|U_0\|'} \to \infty. \qquad (2.27)$$

但是由(2.26),$\{[C(\tau_l)]^{k_l}E(t_l)\}$ 是定义在 $\mathscr{D}$ 上的线性有界算子族,根据一致有界性定理必存在正常数 c_4,使得对一切 $U_0^{(l)} \in \mathscr{D}$,

$$\|[C(\tau_l)]^{k_l}E(t_l)U_0^{(l)}\| \leqslant c_4\|U_0^{(l)}\|',$$

但这是与 (2.27) 矛盾的.

定理 2.3′ 若格式 (2.21) 是可易且稳定的,对 (2.18) 的逼近是相容的,那末它一定是 (2.18) 的收敛格式.

证明 先假定 $U_0 \in \mathscr{D}_0$,则由可易性得到

$$\|([C(\tau)]^k - [E(\tau)]^k)E(t)U_0\|$$
$$= \left\| \sum_{q=0}^{k-1} [C(\tau)]^{k-1-q}[C(\tau) - E(\tau)]E^q(\tau)E(t)U_0 \right\|$$

$$\leqslant \sum_{\sigma=0}^{k-1} \|[C(\tau)]^{k-1-\sigma}E(t+\sigma\tau)(C(\tau)-E(\tau))U_0\|.$$

因为 $[C(\tau)-E(\tau)]U_0 \in \mathscr{D}_0$，而格式 (2.21) 对 (2.18) 的逼近是相容的，所以由 (2.23) 得到

$$\|[C(\tau)-E(\tau)]U_0\| \leqslant \tau\varepsilon(U_0,\tau),$$

$$\|E(t)[C(\tau)-E(\tau)]U_0\| = \|[C(\tau)-E(\tau)] \cdot E(t)U_0\| \leqslant \tau\varepsilon(U_0,\tau),$$

从而由稳定性条件推出

$$\|([C(\tau)]^k-[E(\tau)]^k)E(t)U_0\| \leqslant c_5\tau \sum_{\sigma=0}^{k-1} \varepsilon(U_0,\tau) \leqslant c_5 T\varepsilon(U_0,\tau).$$

显然，当 $\tau \to 0$ 时上式趋向于零.

若 U_0 是 $\mathscr{D}$ 中的任意元素，则可找到序列 $U_0^{(\mu)} \in \mathscr{D}_0$，使得当 $\mu \to \infty$ 时，$\varepsilon_\mu = \|U_0-U_0^{(\mu)}\|' \to 0$. 于是由 (2.20) 和稳定性条件得到

$$\begin{aligned}
&\|([C(\tau)]^k-[E(\tau)]^k)E(t)U_0\| \\
&\leqslant \|([C(\tau)]^k-[E(\tau)]^k)E(t)U_0^{(\mu)}\| \\
&\quad + \|[C(\tau)]^kE(t)(U_0-U_0^{(\mu)})\| \\
&\quad + \|[E(\tau)]^kE(t)(U_0-U_0^{(\mu)})\| \\
&\leqslant \|([C(\tau)]^k-[E(\tau)]^k)E(t)U_0^{(\mu)}\| + c_6\varepsilon_\mu.
\end{aligned}$$

显然，当 $\tau \to 0$，$\mu \to \infty$ 时，上式趋向零.

注记 2.2 若可易格式 (2.21) 对 (2.18) 的逼近是相容的，则收敛性等价于稳定性.

下面举一个例子. 设 $U(x,t)$ 是向量函数，其分量是 $U_l(x,t)$，$1 \leqslant l \leqslant p$. 今考虑下列问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = A\dfrac{\partial^q U}{\partial x^q}, & -\infty < x < \infty,\ 0 < t \leqslant T, \\ U(x,0) = U_0(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases} \tag{2.28}$$

其中 A 是常系数阵，并存在非奇异阵 Q，使得

$$Q^{-1}AQ = \Lambda, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_p \end{pmatrix}. \tag{2.29}$$

定义空间

$$L^\infty(0, T; L^2(\mathscr{R})) = \{U(t)/\|U(t)\|_{L^2(\mathscr{R})} < \infty, t \in [0, T]\},$$

其中

$$\|U(t)\|_{L^2(\mathscr{R})} = \left(\int_{\mathscr{R}} |U(x, t)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

令 $V = Q^{-1}U$，则

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \Lambda \frac{\partial^q V}{\partial x^q}. \tag{2.30}$$

若 $U(x, t) \in L^\infty(0, T; L^2(\mathscr{R}))$，则 $V(x,t) \in L^\infty(0,T;L^2(\mathscr{R}))$，所以

$$V(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}(\beta, t) e^{i\beta x} d\beta,$$

其中 $\hat{V}(\beta, t)$ 是 $V(x, t)$ 的 Fourier 变换，其分量是 $\hat{V}_l(\beta, t)$。由 (2.30) 得到

$$\hat{V}_l(\beta, t) = e^{t\mu_l(i\beta)^q} \hat{V}_l(\beta, 0),$$

所以

$$\|V(t)\|^2_{L^2(\mathscr{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\beta, t)|^2 d\beta, \tag{2.31}$$

其中

$$f(\beta, t) = \sum_{l=1}^{p} |e^{t\mu_l(i\beta)^q} \hat{V}_l(\beta, 0)|^2.$$

记

$$f_l(\beta, t) = e^{2t\mathrm{Re}\mu_l(i\beta)^q} |\hat{V}_l(\beta, 0)|^2,$$

则有

$$f(\beta, t) = \sum_{l=1}^{p} f_l(\beta, t).$$

不难验证

$$\frac{d^2 \ln f_l(\beta, t)}{dt^2} \geq 0.$$

Лаврентьев (1956) 证明，若 $g_l(t)$ 是二次可微的正函数，且 $\frac{d^2\ln g_l(t)}{dt^2} \geqslant 0$，则

$$\frac{d^2\ln\left(\sum_{l=1}^{p} g_l(t)\right)}{dt^2} \geqslant 0.$$

因此，

$$\frac{d^2}{dt^2}\ln f(\beta,t) \geqslant 0. \tag{2.32}$$

记

$$G(t) = \ln\int_{-N}^{N} f(\beta,t)d\beta.$$

把上式写成积分和的极限形式，则由 (2.32) 得到

$$\frac{d^2G(t)}{dt^2} \geqslant 0,$$

它表示 $G(t)$ 是 t 的凸函数，因此

$$G(t) \leqslant \frac{t}{T}G(t) + \left(1-\frac{t}{T}\right)G(0).$$

令 $N\to\infty$，即由 (2.31) 得到

$$\|V(t)\|_{L^2(\mathscr{R})} \leqslant \|V(T)\|_{L^2(\mathscr{R})}^{\frac{t}{T}}\|V(0)\|_{L^2(\mathscr{R})}^{1-\frac{t}{T}}.$$

因为 Q 为非奇异阵，所以由上式得到

$$\|U(t)\|_{L^2(\mathscr{R})} \leqslant c_7\|U(T)\|_{L^2(\mathscr{R})}^{\frac{t}{T}}\|U(0)\|_{L^2(\mathscr{R})}^{1-\frac{t}{T}}.$$

取 $\mathfrak{B} = L^2(\mathscr{R})$，则 (2.28) 的解满足凸性估计式 (2.19)。用 $\mathscr{D}$ 表示这样的 $U_0(x)$ 的集合，使得对这样的 $U_0(x)$，(2.18)有解且 $\|U(T)\| < \infty$。$\mathscr{D}_0$ 可以取为其 Fourier 变换在一个有界区域外为零的函数 $U_0(x)$ 的集合，亦即

$$U_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N}\hat{U}_0e^{i\beta x}d\beta, \tag{2.33}$$

显然 $\mathscr{D}_0$ 在 $\mathscr{D}$ 中是稠密的。

可以把上述结果推广到带有低阶项的方程，例如

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = \left(\sum_{\sigma=0}^{q} A_\sigma \dfrac{\partial^{q-\sigma}}{\partial x^{q-\sigma}} U \right), \\ U(x,0) = U_0(x), \end{cases} \tag{2.34}$$

其中 A_σ 是常系数阵，A_0 的特征值互异.

Agmon, Nirenberg (1967) 研究了 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的一类微分不等式，它的解也满足凸性估计. 关于不适定问题的一般研究可见 Тихонов (1943, 1963a, b, 1964a, b, 1965), Марчук (1973), Тихонов, Арсенин (1974) 和 Payne (1975) 等.

2.3 一般形式的线性差分格式

假定 $\mathfrak{B}_1$ 和 $\mathfrak{B}_2$ 是两个 Banach 空间，它们的范数分别为 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$. L 是作用在 $\mathfrak{B}_1$ 并取值在 $\mathfrak{B}_2$ 中的线性算子，$f \in \mathfrak{B}_2$，于是一般形式的线性定解问题是

$$LU = f. \tag{2.35}$$

为方便计，假定逆算子 L^{-1} 存在.

设 $\mathfrak{B}_l$ 是 n 维欧氏空间 $\mathscr{R}^n$ 中的有界或无界域上的函数类，x_m 的步长是 $h_m = g_m(h)$, $g_m(h)$ 是连续函数，并当 $h \to 0$ 时，$g_m(h) \to 0$, h 称为特征步长. 用有限维 Banach 空间 $\mathfrak{B}_{l,h}$ 逼近 $\mathfrak{B}_l$，其范数是 $\|\cdot\|_{l,h}$, $l = 1, 2$. $\gamma_{l,h}$ 是从 $\mathfrak{B}_l$ 到 $\mathfrak{B}_{l,h}$ 的限制算子，它们是连续的，并满足

$$\lim_{h\to 0} \|\gamma_{1,h} U\|_{1,h} = \|U\|_1, \quad \forall U \in \mathfrak{B}_1, \tag{2.36}$$

$$\lim_{h\to 0} \|\gamma_{2,h} f\|_{2,h} = \|f\|_2, \quad \forall f \in \mathfrak{B}_2. \tag{2.37}$$

q_h 是从 $\mathfrak{B}_{2,h}$ 到 $\mathfrak{B}_2$ 的连续算子，它满足

$$\gamma_{2,h} q_h f_h = f_h, \quad \forall f_h \in \mathfrak{B}_{2,h}. \tag{2.38}$$

$\mathfrak{B}_3$ 是另一个 Banach 空间，其范数是 $\|\cdot\|_3$. p_h 是从 $\mathfrak{B}_{1,h}$ 到 $\mathfrak{B}_3$ 的连续算子，ω 是从 $\mathfrak{B}_1$ 到 $\mathfrak{B}_3$ 的连续算子. 我们假定存在正常数 c_1，使得当 $h \leqslant h_0$ 时，

$$\|p_h\| = \sup_{u_h \in \mathfrak{B}_{1,h}} \frac{\|p_h u_h\|_3}{\|u_h\|_{1,h}} \leqslant c_1, \tag{2.39}$$

并对一切 $U \in \mathfrak{B}_1$,

$$\lim_{h\to 0}\|p_h\gamma_{1,h}U - \omega U\|_3 = 0. \tag{2.40}$$

在本节中假定 $\gamma_{1,h}$, p_h, q_h 和 ω 都是线性的.

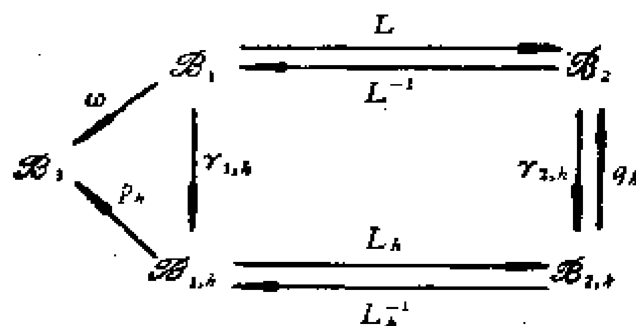


图 2.1

L_h 表示从 $\mathfrak{B}_{1,h}$ 到 $\mathfrak{B}_{2,h}$ 的可逆线性算子,并用下列近似问题逼近(2.35),

$$L_h u_h = \gamma_{2,h} f, \tag{2.41}$$

其逼近误差是

$$R_h(U) = LU - q_h L_h \gamma_{1,h} U.$$

设 $\mathscr{U}$ 是(2.35)的真解的一个集合,它所对应的全部定解条件 f 的集合 $\mathscr{F}$ 在 $\mathfrak{B}_2$ 中稠密. 如果当 $h\to 0$ 时,对一切 $U \in \mathscr{U}$,都有

$$\|R_h(U)\|_2 \to 0, \tag{2.42}$$

则称(2.41)对(2.35)的逼近是相容的.

设 U 和 u_h 分别是(2.35)和(2.41)的解. 若对一切这样的 U 和 u_h,

$$\lim_{h\to 0}\|p_h u_h - \omega U\|_3 = 0, \tag{2.43}$$

则称格式(2.41)是收敛的.

定解条件 f 的误差 $\tilde{f}$ 会引起 u_h 的误差 $\tilde{u}_h$. 如果存在正常数 c_2,使得对一切 $\tilde{f}$ 和 $h \leqslant h_0$,都有

$$\|p_h\tilde{u}_h\|_3 \leqslant c_2\|\tilde{f}\|_2, \tag{2.44}$$

则称(2.41)是稳定的.

由于 L_h 和 $r_{2,h}$ 是线性的，所以上式等价于

$$\|p_h u_h\|_3 \leqslant c_2 \|f\|_2. \tag{2.45}$$

又因为 $u_h = L_h^{-1} r_{2,h} f$，所以上式又等价于对一切 h 成立

$$\|p_h L_h^{-1} r_{2,h}\| = \sup_{f \in \mathfrak{B}_?} \frac{\|p_h L_h^{-1} r_{2,h} f\|_3}{\|f\|_2} \leqslant c_2. \tag{2.46}$$

定理 2.4 如果 L^{-1} 存在，(2.41) 对 (2.35) 的逼近是相容的，那末稳定性等价于收敛性.

证明 若格式是收敛的，则对一切 f，当 $h \to 0$ 时，

$$\|p_h L_h^{-1} r_{2,h} f - \omega L^{-1} f\|_3 \to 0,$$

因此，$\|p_h L_h^{-1} r_{2,h} f\|_3$ 对 h 一致有界. 由一致有界性定理，即知 (2.46) 成立.

反之，若格式是稳定的且 $U \in \mathscr{U}$，则得到

$$\|p_h u_h - \omega U\|_3 \leqslant \|p_h r_{1,h} U - \omega U\|_3 + \|p_h u_h - p_h r_{1,h} U\|_3,$$

由 (2.40)，当 $h \to 0$ 时，上式右端第一项趋向零. 因为 $L_h r_{1,h} U \in \mathfrak{B}_{2,h}$，故由 (2.38) 得到

$$\|p_h u_h - p_h r_{1,h} U\|_3 = \|p_h L_h^{-1} r_{2,h} f - p_h L_h^{-1} r_{2,h} q_h L_h r_{1,h} U\|_3$$

$$= \|p_h L_h^{-1} r_{2,h} (LU - q_h L_h r_{1,h} U)\|_3 \leqslant \|p_h L_h^{-1} r_{2,h}\| \|R_h(U)\|_2.$$

根据 (2.42) 和 (2.46)，当 $h \to 0$ 时，上式趋于零，所以对一切 $U \in \mathscr{U}$，

$$\|p_h u_h - \omega U\|_3 \to 0. \tag{2.47}$$

若 U 是 (2.35) 的解，但 $U \bar{\in} \mathscr{U}$，则存在 $U^{(l)} \in \mathscr{U}$，$U^{(l)}$ 对应的定解条件是 $f^{(l)} \in \mathscr{F}$，并且

$$\lim_{l \to \infty} \|f - f^{(l)}\|_2 \to 0. \tag{2.48}$$

用 $u_h^{(l)}$ 表示以 $f^{(l)}$ 为定解条件的 (2.41) 的解，则有

$$\|p_h u_h - \omega U\|_3 \leqslant \|p_h u_h - p_h u_h^{(l)}\|_3 + \|p_h u_h^{(l)} - \omega U^{(l)}\|_3 + \|\omega U^{(l)} - \omega U\|_3 \leqslant \|p_h L_h^{-1} r_{2,h}\| \|f - f^{(l)}\|_2 + \|p_h u_h^{(l)} - \omega U^{(l)}\|_3 + \|\omega\| \|L^{-1}\| \|f - f^{(l)}\|_2,$$

由 (2.46)—(2.48)，当 $h \to 0$ 时，上式右端趋于零，这就证明了收敛性.

注记 2.3 若 ω 是 $\mathfrak{B}_l$ 和 $\mathfrak{B}_2$ 间的一个同胚，则有 $\lim\limits_{h \to 0} \|\omega^{-1} p_h$

$u_h - U\|_1 = 0$.

注记 2.4　若 $\mathfrak{B}_3 = \mathfrak{B}_l = \mathfrak{B}_{l,h}$, $l = 1,2$, 则 $\gamma_{2,h}$, p_h, q_h 和 ω 都是恒等算子. 又若 $\mathcal{U} = \mathfrak{B}_1$, 则定理 2.4 等价于 Канторович (1948) 的基本收敛定理.

在许多情况下还可以获得误差的渐近估计，其中最早的工作是 Рябенький, Филиппов (1956) 和 Stetter (1965) 开展的. 下面是一个一般性定理.

定理 2.5　假定下列条件满足

(i) L_h 是稳定的,

(ii) $R_h(U) = \sum_{l=0}^{p} h^l q_h \gamma_{2,h} \varphi^{(l)} + q_h \phi_h$, $p \geqslant 0$,

其中 $\varphi^{(l)}$ 与 h 无关,

(iii) 方程 $L\eta^{(l)} = \varphi^{(l)}$ 有解,并且 $L_h \eta_h^{(l)} = \gamma_{2,h}\varphi^{(l)}$, $1 \leqslant l \leqslant p$,那末

$$p_h u_h = p_h \gamma_{1,h} U + p_h L_h^{-1} \phi_h + \sum_{l=0}^{p} h^l p_h \eta_h^{(l)}.$$

证明　不难直接验证

$$L_h\left(u_h - \gamma_{1,h} U - L_h^{-1}\phi_h - \sum_{l=0}^{p} h^l \eta_h^{(l)} \right)$$

$$= \gamma_{2,h} f - L_h \gamma_{1,h} U - \phi_h - \sum_{l=0}^{p} h^l \gamma_{2,h} \varphi^{(l)}$$

$$= \gamma_{2,h} R_h(U) - \phi_h - \sum_{l=0}^{p} h^l \gamma_{2,h} \varphi^{(l)} = 0,$$

所以

$$u_h = \gamma_{1,h} U + L_h^{-1}\phi_h + \sum_{l=0}^{p} h^l \eta_h^{(l)},$$

由此即得所证.

注记 2.5　由定理 2.5 得到

$$p_h u_h = \omega U + (p_h \gamma_{1,h} U - \omega U) + p_h L_h^{-1} \phi_h + \sum_{l=0}^{p} h^l \omega \eta^{(l)}$$

$$+\sum_{l=0}^{p} h^l(p_h\eta_h^{(l)}-\omega\eta^{(l)}). \tag{2.49}$$

如果 $\varphi^{(l)}=0$, $0\leqslant l\leqslant p-1$, $\|q_h\phi_h\|_2=O(h^p)$, $\|p_h\gamma_{1,h}U-\omega U\|_3=O(h^p)$,则由 (2.49) 得到

$$\|p_hu_h-\omega U\|_3=O(h^p).$$

如果 $\varphi^{(l)}=0$, $0\leqslant l\leqslant p-1$, $\|q_h\phi_h\|_2=o(h^p)$, $\|p_h\gamma_{1,h}U-\omega U\|_3=o(h^p)$, $\|p_h\eta_h^{(p)}-\omega\eta^{(p)}\|_3=o(1)$,则有

$$p_hu_h=\omega U+h^p\omega\eta^{(p)}+o(h^p). \tag{2.50}$$

上述渐近估计式是外推法的理论基础，例如设 (2.50) 成立，$h_1=\chi h_2$, $\chi>1$,则

$$p_{h_1}u_{h_1}=\omega U+\chi^p h_2^p\omega\eta^{(p)}+o(h_1^p),$$

$$p_{h_2}u_{h_2}=\omega U+h_2^p\omega\eta^{(p)}+o(h_2^p),$$

因此得到较高精度的近似解 v,

$$v=\frac{1}{\chi^p-1}(\chi^p p_{h_2}u_{h_2}-p_{h_1}u_{h_1})=\omega U+o(h_1^p).$$

有时还可以用多次外推法来提高精度。例如设 $\varphi_l=0$, $0\leqslant l\leqslant p-2$, $\|q_h\phi_h\|_2=o(h^p)$, $\|p_h\gamma_{1,h}U-\omega U\|_3=o(h^p)$, $\|p_h\eta_h^{(p-1)}-\omega\eta^{(p-1)}\|_3=o(h)$, $\|p_h\eta_h^{(p)}-\omega\eta^{(p)}\|_3=o(1)$,则当 $h_1=\chi_1h_2$, $h_2=\chi_2h_3$, $\chi_1>1$, $\chi_2>1$ 时,

$$p_{h_1}u_{h_1}=\omega U+\chi_1^{p-1}\chi_2^{p-1}h_3^{p-1}\omega\eta^{(p-1)}+\chi_1^p\chi_2^p h_3^p\omega\eta^{(p)}+o(h_1^p),$$

$$p_{h_2}u_{h_2}=\omega U+\chi_2^{p-1}h_3^{p-1}\omega\eta^{(p-1)}+\chi_2^p h_3^p\omega\eta^{(p)}+o(h_2^p),$$

$$p_{h_3}u_{h_3}=\omega U+h_3^{p-1}\omega\eta^{(p-1)}+h_3^p\omega\eta^{(p)}+o(h_3^p),$$

因此

$$v_1=\frac{1}{\chi_1^{p-1}-1}(\chi_1^{p-1}p_{h_2}u_{h_2}-p_{h_1}u_{h_1})$$

$$=\omega U+\frac{1}{\chi_1^{p-1}-1}(1-\chi_1)\chi_1^{p-1}\chi_2^p h_3^p\omega\eta^{(p)}+o(h_1^p),$$

$$v_2=\frac{1}{\chi_2^{p-1}-1}(\chi_2^{p-1}p_{h_3}u_{h_3}-p_{h_2}u_{h_2})$$

$$=\omega U+\frac{1}{\chi_2^{p-1}-1}(1-\chi_2)\chi_2^{p-1}h_3^p\omega\eta^{(p)}+o(h_1^p).$$

记

$$\alpha = \frac{\chi_2^{p-1}-1}{\chi_1^{p-1}-1}\frac{\chi_1-1}{\chi_2-1}\chi_1^{p-1}\chi_2,$$

则得到

$$v = \frac{\alpha v_2 - v_1}{\alpha - 1} = \omega U + o(h_1^p).$$

下面介绍另一类外推法. 设 $h_1 = \chi h_2, \chi > 1$, $\mathfrak{B}_{l,h_1} \subset \mathfrak{B}_{l,h_2}$, 此时

$$L_{h_s}\gamma_{1,h_s}U = \gamma_{2,h_s}f + \gamma_{2,h_s}R_{h_s}(U),\quad s = 1, 2.$$

假定

$$R_{h_s}(U) = h_s^p\varphi + q_{h_s}\phi_{h_s},$$

其中 φ 与 h 无关, $\phi_{h_s} = o(h_s^p)$. 记

$$\tilde{\phi}_{h_1,h_2}(U) = q_{h_1}\phi_{h_1} - q_{h_2}\phi_{h_2},\quad \tilde{R}_{h_1,h_2}(U) = R_{h_1}(U) - R_{h_2}(U),$$

则

$$\tilde{R}_{h_1,h_2}(U) = (\chi^p - 1)h_2^p\varphi + \tilde{\phi}_{h_1,h_2}(U).$$

若按下式计算 (2.35) 的近似解 v_{h_1},

$$L_{h_1}v_{h_1} = \gamma_{2,h_1}f + \frac{\chi^p}{\chi^p - 1}\gamma_{2,h_1}\tilde{R}_{h_1,h_2}(U),$$

则

$$L_{h_1}(v_{h_1} - \gamma_{1,h_1}U) = \frac{\chi^p}{\chi^p - 1}\gamma_{2,h_1}\tilde{\phi}_{h_1,h_2}(U) - \phi_{h_1},$$

所以

$$\|p_{h_1}v_{h_1} - \omega U\|_3 \leqslant \|p_{h_1}\gamma_{1,h_1}U - \omega U\| + \|p_{h_1}\|\|L_{h_1}^{-1}\|\|\phi_{h_1}\| + \frac{\chi^p}{\chi^p - 1}\|p_{h_1}\|\|L_{h_1}^{-1}\|\|\gamma_{2,h_1}\|\|\tilde{\phi}_{h_1,h_2}(U)\|.$$

从而可期望 $p_{h_1}v_{h_1}$ 比 $p_{h_1}L_{h_1}^{-1}\gamma_{2,h_1}f$ 更接近 ωU.

关键在于如何估计 $\tilde{R}_{h_1,h_2}(U)$, 例如可用下式代替它

$$\tilde{R}_{h_1,h_2}(U) = L_{h_1}\gamma_{h_1,h_2}u_{h_2} - q_{h_1,h_2}L_{h_2}u_{h_2},$$

其中 γ_{h_1,h_2} 是从 $\mathfrak{B}_{1,h_2}$ 到 $\mathfrak{B}_{1,h_1}$ 的连续转换算子, q_{h_1,h_2} 是从 $\mathfrak{B}_{2,h_2}$ 到 $\mathfrak{B}_{2,h_1}$ 的连续转换算子.

上述方法也被称为 τ 内插法, 它与多重网格方法密切相关.

由于它不是对近似解 $p_{h_i}u_{h_i}$ 进行内插，而是对近似方程的右端附加一个修正项，因此即使 p 与 x 有关，仍然可以使用。这个方法最早由 Brandt, Dinar(1979) 提出的。有关的资料还可见 Auzinger, Stetter (1981), Brandt (1982) 和 Stüben, Trottenberg (1982) 等人的文章.

提高计算精度的另一个方法是 Defect 方法. 简要介绍如下，设 $u_h^{(l)}$ 是第 l 次近似解，则

$$\begin{cases} u_h^{(0)} = L_h^{-1}\gamma_{2,h}f, \\ u_h^{(s)} = u_h^{(s-1)} - L_h^{-1}[\gamma_{2,h}LD_h u_h^{(s-1)} - \gamma_{2,h}f], \quad s \geq 1, \end{cases}$$

其中 D_h 是从 $\mathfrak{B}_{1,h}$ 到 $\mathfrak{B}_1$ 的连续延拓算子. 该方法的优点是可以在同一个空间 $\mathfrak{B}_{1,h}$ 中来计算 $u_h^{(s)}$. 也可以把这个方法与多重网格法结合起来，有关的资料可见 Stetter (1978), Hackbusch (1979, 1982) 和 Auzinger, Stetter (1982) 等人的文章.

线性格式的解还满足组合原理(见 Lin Qun, Lu Tao (1984)). 例如成立下面的定理:

定理 2.6 如果满足下列条件:

(i) $L_h^{(l)}$ 是稳定的，$L_h^{(l)}u_h^{(l)} = \gamma_{2,h}f$, $1 \leq l \leq M$,

(ii) $R_h^{(l)}(U) = h^p q_h \gamma_{2,h}\varphi^{(l)} + q_h \phi_h^{(l)}$, $1 \leq l \leq M$,

其中 $\varphi^{(l)}$ 与 h 无关,

(iii) 方程 $L\eta^{(l)} = \varphi^{(l)}$ 有解，并且 $L_h^{(l)}\eta_h^{(l)} = \gamma_{2,h}\varphi^{(l)}$,

(iv) a_l 是常数，并且 $\sum_{l=1}^{M} a_l = 1$, $\sum_{l=1}^{M} a_l\varphi^{(l)} = 0$,

那末

$$v = \sum_{l=1}^{M} a_l p_h u_h^{(l)} = p_h\gamma_{1,h}U + \sum_{l=1}^{M} a_l p_h (L_h^{(l)})^{-1}\phi_h^{(l)} + \sum_{l=1}^{M} a_l h^p (p_h\eta_h^{(l)} - \omega\eta^{(l)}).$$

证明 由 (2.49) 得到

$$p_h u_h^{(l)} - h^p\omega\eta^{(l)} = p_h\gamma_{1,h}U + p_h(L_h^{(l)})^{-1}\phi_h^{(l)} + h^p(p_h\eta_h^{(l)} - \omega\eta^{(l)}).$$

用 a_l 乘上式并求和，由于

$$\sum_{l=1}^{M} a_l h^p \omega \eta^{(l)} = h^p \omega \sum_{l=1}^{M} a_l \eta^{(l)}$$

$$= h^p \omega L^{-1} \left(\sum_{l=1}^{M} a_l \varphi^{(l)} \right) = 0,$$

即得所证.

根据定理 2.6,可以把用不同近似方法获得的解组合起来，从而得到更精确的结果. 例如设定理的条件满足,并且当 $h \to 0$ 时, $\|q_h \phi_h^{(l)}\|_2 = o(h^p)$, $\|p_h \eta_h^{(l)} - \omega \eta^{(l)}\|_3 = o(1)$, $\|p_h \gamma_{1,h} U - \omega U\|_3 = o(h^p)$,则

$$v = \omega U + o(h^p).$$

2.4 线性特征值问题

设 $\mathfrak{B}$ 是 Banach 空间，其范数是 $\|\cdot\|$, L 是从 $\mathfrak{B}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的线性全连续算子，λ 是复数,并考虑下列特征值问题

$$LU = \lambda U. \tag{2.51}$$

用 $\sigma(L)$ 表示算子 L 的谱. 由于 L 是全连续的，所以 $\sigma(L)$ 是由特征值所组成的可列集,并至多以原点为极限点. 用 $\mathscr{R}(L)$ 表示豫解集，则当 $z \in \mathscr{R}(L)$ 时，$(z - L)^{-1}$ 是有界算子. 设 $\lambda \in \sigma(L)$, $\lambda \neq 0$, ε 是小于 λ 到其它谱点的距离的正数. 定义下列投影算子

$$\mathscr{P}(\lambda, L) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\lambda|=\varepsilon} (z - L)^{-1} dz,$$

于是 $\mathscr{R}\text{ange}\mathscr{P}(\lambda, L) = \mathscr{P}(\lambda, L)\mathfrak{B}$ 是由 L 的对应于 λ 的简单或广义特征元素所组成的集合(见 Taylor (1958)).

用 $\mathfrak{B}_h$ 逼近 $\mathfrak{B}$, L_h 是从 $\mathfrak{B}_h$ 到 $\mathfrak{B}_h$ 的线性全连续算子，并用下列问题来代替 (2.51),

$$L_h u_h = \lambda_h u_h. \tag{2.52}$$

为简单计,下面假定 $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_h$,并满足下列条件

(i) $\lim\limits_{h \to 0} \|L_h U - LU\| = 0$, $\forall U \in \mathfrak{B}$, (2.53)

(ii) $\{L_h\}$ 是集体紧致算子族,即集合

$$\{L_h U/\|U\| \leqslant 1,\ U \in \mathfrak{B}\} \tag{2.54}$$

在 $\mathfrak{B}$ 中有紧致的闭包.

根据上述假定,存在正常数 c_0,使得

$$\|L\| \leqslant c_0,\ \|L_h\| \leqslant c_0, \tag{2.55}$$

以及

$$\lim_{h\to 0}\|(L - L_h)L\| = \lim_{h\to 0}\|(L - L_h)L_h\| = 0. \tag{2.56}$$

Atkinson (1967) 分析了近似解的收敛性, 下面介绍他的方法.

引理 2.1 设 $z \neq 0$, $\mathscr{A}_1$ 和 $(z - \mathscr{A}_1)^{-1}$ 是从 $\mathfrak{B}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的线性连续算子, $\mathscr{A}_2$ 是从 $\mathfrak{B}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的线性全连续算子,并且

$$\|(\mathscr{A}_2 - \mathscr{A}_1)\mathscr{A}_2\| < \frac{|z|}{\|(z - \mathscr{A}_1)^{-1}\|}, \tag{2.57}$$

那末 $(z - \mathscr{A}_2)^{-1}$ 存在,

$$\|(z - \mathscr{A}_2)^{-1}\| \leqslant \frac{1 + \|\mathscr{A}_2\|\|(z - \mathscr{A}_1)^{-1}\|}{|z| - \|(z - \mathscr{A}_1)^{-1}\|\|(\mathscr{A}_2 - \mathscr{A}_1)\mathscr{A}_2\|}, \tag{2.58}$$

并且对一切 $U \in \mathfrak{B}$,

$$\|(z - \mathscr{A}_1)^{-1}U - (z - \mathscr{A}_2)^{-1}U\| \leqslant \|(z - \mathscr{A}_1)^{-1}\| \cdot \frac{\|(\mathscr{A}_2 - \mathscr{A}_1)U\| + \|(z - \mathscr{A}_1)^{-1}U\|\|(\mathscr{A}_2 - \mathscr{A}_1)\mathscr{A}_2\|}{|z| - \|(z - \mathscr{A}_1)^{-1}\|\|(\mathscr{A}_2 - \mathscr{A}_1)\mathscr{A}_2\|}. \tag{2.59}$$

证明 我们有

$$(I + (z - \mathscr{A}_1)^{-1}\mathscr{A}_2)(z - \mathscr{A}_2) = z - (z - \mathscr{A}_1)^{-1}(\mathscr{A}_2 - \mathscr{A}_1)\mathscr{A}_2,$$

由条件 (2.57) 和 $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ 的性质即知 $(z - \mathscr{A}_2)^{-1}$ 存在并且满足 (2.58). 经过仔细的计算,则可进一步得到 (2.59).

如果 $z \neq 0$, $z \in \mathscr{R}(L)$, 那末当 h 很小时, 由引理 2.1 和 (2.56) 推得 $(z - L_h)^{-1}$ 的存在性,并且

$$\lim_{h\to 0}\|(z - L_h)^{-1}U - (z - L)^{-1}U\| = 0.$$

Turner (1966) 引入了下列算子族 $\{L_h^{(\mu)}\}$,

$$L_h^{(\mu)} = (1-\mu)L + \mu L_h,\quad 0 \leqslant \mu \leqslant 1.$$

显然有 $\|L_h^{(\mu)}\| \leqslant c_0$.

引理 2.2 设 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{R}(L)$ 中的紧致子集，$0 \bar{\in} \mathscr{F}$，那末存在正常数 h_0 和 c_1，使得

(i) 对一切 $z \in \mathscr{F}$，$\|(z-L)^{-1}\| \leqslant c_1$，

(ii) 当 $h \leqslant h_0$ 时，$\mathscr{F} \subset \mathscr{R}(L_h^{(\mu)})$，并对一切 $z \in \mathscr{F}$，

$$\|(z-L_h^{(\mu)})^{-1}\| \leqslant c_2 = \frac{2(1+c_0c_1)}{d},$$

其中 d 是 $\mathscr{F}$ 到原点的距离，

(iii) 对一切 $U \in \mathfrak{B}$，$z \in \mathscr{F}$ 和 $h \leqslant h_0$，

$$\|(z-L)^{-1}U - (z-L_h^{(\mu)})^{-1}U\| \leqslant \frac{2c_1}{d}$$
$$\cdot(\|(L-L_h^{(\mu)})U\| + c_1\|U\|\|(L-L_h^{(\mu)})L_h^{(\mu)}\|),$$

(iv) 若 $|\mu-\nu| < \dfrac{1}{4c_0c_2}$，$h \leqslant h_0$，$z \in \mathscr{F}$，则有

$$\|(z-L_h^{(\mu)})^{-1} - (z-L_h^{(\nu)})^{-1}\| \leqslant 4c_0c_2^2|\mu-\nu|.$$

证明 因为 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{R}(L)$ 中的紧致子集，$(z-L)^{-1}$ 关于 z 是连续的，所以结论 (i) 成立. 又由于

$$(L-L_h^{(\mu)})L_h^{(\mu)} = \mu(1-\mu)(L-L_h)L + \mu^2(L-L_h)L_h,$$

所以

$$\|(L-L_h^{(\mu)})L_h^{(\mu)}\| \leqslant \|(L-L_h)L_h\| + \frac{1}{4}\|(L-L_h)L\|.$$

选取 h_0 适当小，使得当 $h \leqslant h_0$ 时，上式右端小于 $\dfrac{d}{2c_1}$，因此由结论 (i) 得到

$$0 < \frac{d}{2} \leqslant d - c_1\left[\|(L-L_h^{(\mu)})L_h^{(\mu)}\| + \frac{1}{4}\|(L-L_h^{(\mu)})L\|\right]$$
$$\leqslant |z| - \|(z-L)^{-1}\|\|(L-L_h^{(\mu)})L_h^{(\mu)}\|,$$

从而

$$\|(L-L_h^{(\mu)})L_h^{(\mu)}\| \leqslant \frac{|z|}{\|(z-L)^{-1}\|}.$$

结合引理 2.1，即推得结论 (ii) 和 (iii).

最后当 $|\mu-\nu|\leqslant\frac{1}{4c_0c_2}$ 时,由结论(ii)推得

$$\|(z-L_h^{(\mu)})-(z-L_h^{(\nu)})\|=|\mu-\nu|\|L-L_h\|$$

$$\leqslant 2c_0|\mu-\nu|\leqslant\frac{1}{2c_2}\leqslant\frac{1}{2\|(z-L_h^{(\nu)})^{-1}\|}<\frac{1}{\|(z-L_h^{(\nu)})^{-1}\|},$$

到此,即由 Von Neumann 展开式(见 Taylor (1958)) 得到

$$\|(z-L_h^{(\mu)})^{-1}-(z-L_h^{(\nu)})^{-1}\|$$

$$\leqslant\frac{\|(z-L_h^{(\nu)})^{-1}\|^2\|L_h^{(\mu)}-L_h^{(\nu)}\|}{1-\|(z-L_h^{(\nu)})^{-1}\|\|L_h^{(\mu)}-L_h^{(\nu)}\|}\leqslant 4c_0c_2^2|\mu-\nu|.$$

下面两个定理给出了计算的收敛性.

定理 2.7 设 a 和 ε 是两个任意正数, λ_h 是 L_h 的特征值, $|\lambda_h|\geqslant a$,则存在 $h_0>0$,使得当 $h\leqslant h_0$ 时,$|\lambda-\lambda_h|\leqslant\varepsilon$,其中 λ 是 L 的某个特征值,并且 $|\lambda|\geqslant a$.

证明 由 (2.55), L 和 L_h 的全部特征值都落在圆 $|z|\leqslant c_0$ 之中. 不妨假定 $a<c_0$,并且用 E 表示环形区域 $a\leqslant|z|\leqslant c_0$. 对所有的 $\lambda\in\sigma(L)\cap E$,作圆 $|z-\lambda|<\varepsilon$,然后从 E 中挖去这些圆,并把余下的集合记为 E'. 由于 L 是全连续算子, $\sigma(L)\cap E$ 是有限集合,所以仅仅从 E 中挖去有限个开集,因此 E' 仍然是紧致集,并且 $E'\subset\mathscr{R}(L)$. 在引理 2.2 中令 $\mathscr{F}=E'$, $\mu=1$, 则当 $h\leqslant h_0$ 时,$E'\subset\mathscr{R}(L_h)$, 它表示 $E'\cap\sigma(L_h)$ 是空集. 因此,若

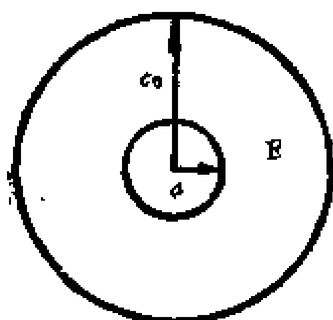


图 2.2

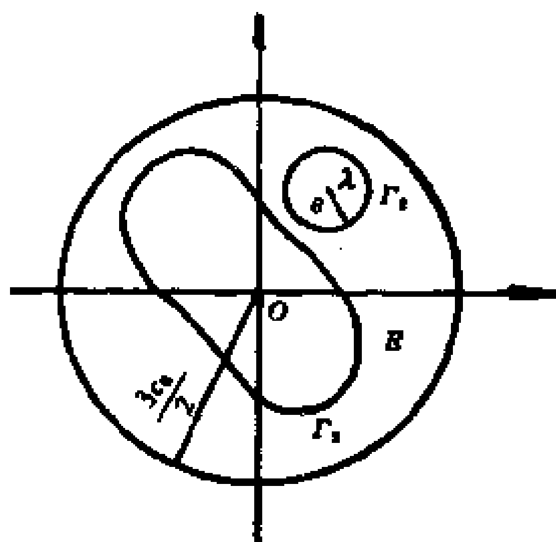


图 2.3

$\lambda_h \in \sigma(L_h) \cap E$，则一定存在 $\lambda \in \sigma(L)$，使得 $|\lambda - \lambda_h| \leqslant \varepsilon$，证毕.

假设 $\lambda \neq 0$，$\lambda \in \sigma(L)$，ε 的意义同前，用 Γ_1 表示圆周 $|z - \lambda| = \varepsilon$，$\Gamma_2$ 表示与 Γ_1 不相交的简单闭曲线，其内部包含了原点和 $\sigma(L)/\{\lambda\}$，定义 $E = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{z / |z| \leqslant \frac{3c_0}{2}$，且在 Γ_1 与 Γ_2 外部$\}$，则集合 E 是 $\mathscr{R}(L)$ 中的紧致子集. 显然，$\sigma(L_h^{(\mu)})$ 在圆 $|z| \leqslant \frac{3c_0}{2}$ 内.

根据引理 2.2，当 $h \leqslant h_0$ 时，$E \subset \mathscr{R}(L_h^{(\mu)})$，所以 $\sigma(L_h^{(\mu)})$ 一定在 Γ_1 或 Γ_2 的内部. 用 $\sigma_h^{(\mu)}$ 表示 $\sigma(L_h^{(\mu)})$ 在 Γ_1 内部的部份，特别记 $\sigma_h = \sigma_h^{(1)}$，它表示 $\sigma(L_h)$ 与圆 $|z - \lambda| \leqslant \varepsilon$ 的交集.

定义投影算子

$$\mathscr{P}(\sigma_h^{(\mu)}, L_h^{(\mu)}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} (z - L_h^{(\mu)})^{-1} dz.$$

定理 2.8 当 $h \leqslant h_0$ 时，

(i) $\mathscr{D}\mathrm{im}\mathscr{P}(\sigma_h, L_h)\mathfrak{B} = \mathscr{D}\mathrm{im}\mathscr{P}(\lambda, L)\mathfrak{B}$，

(ii) 对任意 $U \in \mathscr{P}(\lambda, L)\mathfrak{B}$，

$$\|U - \mathscr{P}(\sigma_h, L_h)U\| \leqslant \frac{2c_1\varepsilon}{d} (\|(L - L_h)U\| + c_1\|U\|\|(L - L_h)L_h\|),$$

从而

$$\lim_{h \to 0} \|U - \mathscr{P}(\sigma_h, L_h)U\| = 0.$$

证明 首先由引理 2.2 的结论 (iv)，当 $|\mu - \nu| \leqslant \frac{1}{4c_0c_2}$，$z \in \Gamma_1$ 和 $h \leqslant h_0$ 时，

$$\|\mathscr{P}(\sigma_h^{(\mu)}, L_h^{(\mu)}) - \mathscr{P}(\sigma_h^{(\nu)}, L_h^{(\nu)})\| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \|(z - L_h^{(\mu)})^{-1} - (z - L_h^{(\nu)})^{-1}\| |dz| \leqslant 4\varepsilon c_0 c_2^2 |\mu - \nu|.$$

所以 $\mathscr{P}(\sigma_h^{(\mu)}, L_h^{(\mu)})$ 关于 μ 是连续的.

根据泛函分析中的一个定理(见 Riesz, Nagy (1955))，若两个投影算子差的范数小于 1，那末它们的值域的维数相同. 但

$\mathscr{P}(\sigma^{(0)}, L_h^{(0)})\mathfrak{B} = \mathscr{P}(\lambda, L)\mathfrak{B}$，且 $\mathscr{P}(\sigma_h^{(\mu)}, L_h^{(\mu)})$ 关于 μ 连续，这就证明了结论 (i)。

又在引理 2.2 的结论 (iii) 中，令 $\mu = 1$，则对一切 $U \in \mathscr{P}(\lambda, L)\mathfrak{B}$，

$$\|U - \mathscr{P}(\sigma_h, L_h)U\| = \|\mathscr{P}(\lambda, L)U - \mathscr{P}(\sigma_h, L_h)U\|$$
$$= \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}((z - L)^{-1}U - (z - L_h)^{-1}U)dz\right\|$$
$$\leqslant \frac{2c_1\varepsilon}{d}(\|(L - L_h)U\| + c_1\|U\|\|(L - L_h)L_h\|).$$

下面来估计收敛速率。若 $\mathfrak{B}$ 是 Hilbert 空间，L 是自共轭算子或规范算子，则可得出许多结果，可参见 Nyström (1930), Bückner (1950), Brakhage (1961) 和 Keller (1965)。一般性的结果则由 Atkinson (1975) 最先得到，为此需要证明两个引理。

引理 2.3 设 $A = (A_{ij})$，$B = (B_{ij})$ 是 $N \times N$ 阶矩阵，$|A_{ij}| < B_{ij}$，那末 $\rho(A) \leqslant \rho(B)$，其中 $\rho(A)$ 是 A 的谱半径。

证明 对应于向量范数 $\|\eta\| = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant N}|\eta_j|$，有关的矩阵范数是

$\|A\| = \max\limits_{i}\sum\limits_{j=1}^{N}|A_{ij}|$，并且

$$\rho(A) = \lim_{r\to\infty}\|A^r\|^{\frac{1}{r}}. \tag{2.60}$$

由定理条件推得 $|(A^r)_{ij}| \leqslant (B^r)_{ij}$，所以 $\|A^r\| \leqslant \|B^r\|$，从而由 (2.60) 得到所证的结论。

引理 2.4 假设 λ 是 $N \times N$ 阶矩阵 A 的 N 重特征值，它的指标是 ν。又设 A_h 是 $N \times N$ 阶矩阵，并且当 $h \to 0$ 时，$\|A - A_h\| \to 0$，那末，存在正常数 c_3，使得

$$\max_{\lambda_h \in \sigma(A_h)}|\lambda - \lambda_h| \leqslant c_3\|A - A_h\|^{\frac{1}{\nu}}, \tag{2.61}$$

其中 $\sigma(A_h)$ 是 A_h 的特征值 λ_h 的集合。

证明 不妨设 A 已是 Jardon 典则形式。记 $A = \lambda I + \mathfrak{M}$，其中

$$\mathfrak{M}=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix},\quad J_l=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad 1\leqslant l\leqslant r.$$

J_l 是 $\nu_l\times\nu_l$ 阶矩阵. 由条件得到

$$\max_{1\leqslant l\leqslant r}\nu_l=\nu\geqslant 1,\quad \sum_{l=1}^{r}\nu_l=N.$$

记 $D_h=A_h-A$,则

$$\mathrm{Det}(A_h-\lambda_h I)=\mathrm{Det}(\mathfrak{M}+D_h-(\lambda_h-\lambda)I).$$

所以为了估计 $|\lambda-\lambda_h|$, 只要估计 $\mathfrak{M}+D_h$ 的特征值 β_h. 令 $\alpha_h=\max\limits_{l,j}|(D_h)_{lj}|$,则由引理 2.3 得到

$$\rho(\mathfrak{M}+D_h)\leqslant\rho(\mathfrak{M}+\alpha_h\mathfrak{S}),$$

其中 $\mathfrak{S}$ 是$N\times N$阶矩阵, 它的元素都是 1. 下面估计 $\mathfrak{M}+\alpha_h\mathfrak{S}$ 的特征值 μ_h. 设 $v=(v_1,v_2,\cdots,v_N)^*$ 是相应的特征向量,即有

$$(\mathfrak{M}+\alpha_h\mathfrak{S})v=\mu_h v.$$

令 $e'=(1,1,\cdots 1)^*\in\mathscr{R}^N$, $s=\sum\limits_{j=0}^{N}v_j$,则上式可改写为

$$(\mathfrak{M}v+\alpha_h se')=\mu_h v. \tag{2.62}$$

若 $\nu=1$,则 $\mathfrak{M}$ 是零阵, 从而 $\sigma(\mathfrak{M}+\alpha_h\mathfrak{S})=\{0,N\alpha_h\}$, 由此可推得 (2.61).

若 $\nu>1$, 则令 $v=(v^{(1)},v^{(2)},\cdots v^{(r)})^*$, 其中 $v^{(l)}=(v_1^{(l)},v_2^{(l)},\cdots,v_{\nu_l}^{(l)})^*$. 由 (2.62) 得到

$$J_l v^{(l)}+\alpha_h se'^{(l)}=\mu_h v^{(l)},\quad 1\leqslant l\leqslant r,$$

或者写成分量形式

$$\begin{cases} v_{j+1}^{(l)}+\alpha_h s=\mu_h v_j^{(l)}, & 1\leqslant j\leqslant \nu_{l-1},\ 1\leqslant l\leqslant r, \\ \alpha_h s=\mu_h v_{\nu_l}^{(l)}, & 1\leqslant l\leqslant r. \end{cases} \tag{2.63}$$

如果 $s=0$,那末由于 $v\neq 0$, 所以一定有 $\mu_h=0$. 若同时有 $r\geqslant 2$, 则确实可以找到 $v\neq 0$, 使得它满足(2.63). 所以 $\mu_h=0$ 确实是 $\mathfrak{M}+\alpha_h\mathfrak{S}$ 的特征值.

如果 $s\neq 0$,则一定 $\mu_h\neq 0$. 下面证明当N适当大时, μ_h不可能等于1. 若不然,则由(2.63)得到

$$v_j^{(l)}=(\nu_l+1-j)\alpha_h s,\ 1\leqslant j\leqslant \nu_l,\ 1\leqslant l\leqslant r.$$

把上式对 j 求和即得到

$$s_l=\sum_{j=1}^{\nu_l}v_j^{(l)}=\frac{\nu_l(\nu_l+1)}{2}\alpha_h s,$$

再对 l 求和后得到

$$\frac{\alpha_h}{2}\sum_{l=1}^{r}\nu_l(\nu_l+1)=1,$$

令 $\alpha_h\to 0$,则会导致矛盾,所以 $\mu_h\neq 1$.

又由(2.63)得到

$$s_l-v_1^{(l)}+\nu_l\alpha_h s=\mu_h s_l,\ 1\leqslant l\leqslant r.$$

再对 l 求和就得到

$$\sum_{l=1}^{r}v_1^{(l)}=(1-\mu_h+N\alpha_h)s, \tag{2.64}$$

另一方面,又从(2.63)推得

$$\mu_h^{\nu_l}v_1^{(l)}=\alpha_h s\,\frac{1-\mu_h^{\nu_l}}{1-\mu_h},$$

用 $\mu_h^{\nu_l}$ 除上式,并对 l 求和,代入到(2.64),再乘以 μ_h^{ν}, 即得到

$$-\mu_h^{\nu+1}+\mu_h^{\nu}(1+N\alpha_h)-\alpha_h\sum_{l=1}^{r}\mu_h^{\nu-\nu_l}\left(\frac{1-\mu_h^{\nu_l}}{1-\mu_h}\right)=0, \tag{2.65}$$

上式左端的最后一项是 $\nu-1$ 次多项式. 把上式看作为关于 μ_h 的代数方程,则1是它的根. 用 μ_h-1 除方程的两边就得到

$$-\mu_h^{\nu}+\alpha_h q(\mu_h)=0, \tag{2.66}$$

其中 $q(\mu_h)$ 是 $\nu-1$ 次多项式.

因为 μ_h 是 α_h 的连续函数, 所以存在正常数 c_4, 使得当 $|\alpha_h|\leqslant 1$ 时, $|\mu_h(\alpha_h)|\leqslant c_4$. 把它代入(2.66), 则知存在正常数 c_5,使得对充分小的 h, $|\mu_h(\alpha_h)|^{\nu}\leqslant c_5\alpha_h$. 适当放大常数 c_5, 即知对一切 h 都成立上式,这就证明了(2.61).

定理 2.9 设 $\lambda \neq 0$，$\lambda \in \sigma(L)$，它的指标是 ν，也就是说，ν 是使得下式成立的最小正整数

$$\mathscr{N}\mathrm{ull}((\lambda - L)^{\nu}) = \mathscr{N}\mathrm{ull}((\lambda - L)^{\nu+1}),$$

那末，存在正常数 c_6，使得当 $h \leqslant h_0$ 时，

$$\max_{\lambda_h \in \sigma_h} |\lambda - \lambda_h| \leqslant c_6 \max_{1 \leqslant l \leqslant N} \|L\varphi_l - L_h \varphi_l\|^{\frac{1}{\nu}},$$

其中 φ_l 是 $\mathscr{N}\mathrm{ull}((\lambda - L)^{\nu})$ 的基，$1 \leqslant l \leqslant N$，$\nu \leqslant N$，$N$ 是 λ 的重数。

证明 设 $\sigma_h = \{\lambda_h^{(1)}, \lambda_h^{(2)}, \cdots \lambda_h^{(r(h))}\}$，其中 $\lambda_h^{(l)}$ 的指标是 $\nu(\lambda_h^{(l)})$。根据定理 2.8，当 $h \leqslant h_0$ 时，$\lambda_h^{(l)} (1 \leqslant l \leqslant r(h))$ 的重数元和等于 N。$\mathscr{P}(\sigma_h, L_h)$ 的值域 $\mathscr{N}(\sigma_h)$ 可分解为

$$\begin{aligned}\mathscr{N}(\sigma_h) = & \mathscr{N}\mathrm{ull}(\lambda_h^{(1)} - L_h)^{\nu(\lambda_h^{(1)})} \oplus \mathscr{N}\mathrm{ull}(\lambda_h^{(2)} - L_h)^{\nu(\lambda_h^{(2)})} \\ & \oplus \cdots \oplus \mathscr{N}\mathrm{ull}(\lambda_h^{(r(h))} - L_h)^{\nu(\lambda_h^{(r(h))})}.\end{aligned}$$

把 $\mathscr{P}(\sigma_h, L_h)$ 看作为从 $\mathscr{N}(\lambda) = \mathscr{N}\mathrm{ull}((\lambda - L)^{\nu})$ 到 $\mathscr{N}(\sigma_h)$ 的算子，并对一切 $U \in \mathscr{N}(\lambda)$，定义下列算子

$$\mathscr{A}_h U = U - \mathscr{P}(\lambda, L)\mathscr{P}(\sigma_h, L_h)U,$$

于是由定理 2.8 得到

$$\begin{aligned}\|\mathscr{A}_h U\| & \leqslant \|\mathscr{P}(\lambda, L)\| \|U - \mathscr{P}(\sigma_h, L_h)U\| \\ & \leqslant c_7 \beta_h \|\mathscr{P}(\lambda, L)\| \|U\|,\end{aligned}$$

其中

$$\beta_h = \max(\|(L - L_h)L\|, \|(L - L_h)L_h\|).$$

把 $\mathscr{A}_h$ 看作为从 $\mathscr{N}(\lambda)$ 到 $\mathscr{N}(\lambda)$ 的算子，则当 $h \to 0$ 时，$\|\mathscr{A}_h\| \to 0$。因此当 $h \leqslant h_0$ 时，$(I - \mathscr{A}_h)^{-1}$ 存在并且一致有界。

不难验证在 $\mathscr{N}(\lambda)$ 上 $\mathscr{P}(\sigma_h, L_h)$ 的逆算子是

$$(\mathscr{P}(\sigma_h, L_h))^{-1} = (I - \mathscr{A}_h)^{-1}\mathscr{P}(\lambda, L),$$

并且当 $h \leqslant h_0$ 时是一致有界的。

今定义从 $\mathscr{N}(\lambda)$ 到 $\mathscr{N}(\lambda)$ 的算子 $\mathscr{L}_h$ 如下：

$$\mathscr{L}_h U = (\mathscr{P}(\sigma_h, L_h))^{-1} L_h \mathscr{P}(\sigma_h, L_h)U,\ U \in \mathscr{N}(\lambda),$$

那末 $\mathscr{L}_h$ 的谱也是 σ_h。由于 $\{\varphi_l\}$ 是 $\mathscr{N}(\lambda)$ 的基，所以对一切

$U \in \mathscr{N}(\lambda)$, $U = \sum_{l=1}^{N} \alpha_l \varphi_l$，并且

$$\|LU - \mathscr{L}_h U\| \leqslant \left(\sum_{l=1}^{N} |\alpha_l|\right) \max_{1 \leqslant l \leqslant N} \|(L - \mathscr{L}_h)\varphi_l\|. \quad (2.67)$$

由于有限维空间的一切范数都等价，所以存在正常数 c_8，使得 $\sum_{l=1}^{N} |\alpha_l| \leqslant c_8 \|U\|$，从而由 (2.67) 得到

$$\|LU - \mathscr{L}_h U\| \leqslant c_8 \|U\| \max_{1 \leqslant l \leqslant N} \|(L - \mathscr{L}_h)\varphi_l\|. \quad (2.68)$$

由于对一切 $V \in \mathscr{N}(\lambda)$，

$$\|LV - \mathscr{L}_h V\| \leqslant \|(\mathscr{P}(\sigma_h, L_h))^{-1}\| \cdot \|\mathscr{P}(\sigma_h, L_h) LV - L_h \mathscr{P}(\sigma_h, L_h) V\|,$$

因此由 $L_h \mathscr{P}(\sigma_h, L_h) V = \mathscr{P}(\sigma_h, L_h) V$ 得到

$$\|LV - \mathscr{L}_h V\| \leqslant \|(\mathscr{P}(\sigma_h, L_h))^{-1}\| \|\mathscr{P}(\sigma_h, L_h)\| \|LV - L_h V\|,$$

把它代入 (2.68)，即知对一切 $U \in \mathscr{N}(\lambda)$，

$$\|LU - \mathscr{L}_h U\| \leqslant c_9 \|U\| \max_{1 \leqslant l \leqslant N} \|L\varphi_l - L_h \varphi_l\|,$$

这样，就在 $\mathscr{N}(\lambda)$ 上得到

$$\|L - \mathscr{L}_h\| \leqslant c_9 \max_{1 \leqslant l \leqslant N} \|L\varphi_l - L_h \varphi_l\|. \quad (2.69)$$

但在 $\mathscr{N}(\lambda)$ 的基底下，$\mathscr{L}_h$ 和 L 可分别用矩阵 A 和 A_h 来表示，$\|A - A_h\| \leqslant c_{10} \|L - \mathscr{L}_h\|$，所以结合 (2.69) 即可得到 $\|A - A_h\|$ 的上界. 最后，应用引理 2.4 就证明了定理的结论.

关于特征值问题的其它工作可见 Chatelin (1973, 1981) 的文章。

§3 非线性差分格式的稳定性和收敛性

非线性差分格式和线性格式有本质上的差别. 一般说来，非线性格式不可能具有 §2.3 所定义的稳定性. 另一方面，Lax 等价性定理和 Канторович 型的等价性定理也不成立. 因此，人们从不同的角度出发来推广稳定性，并讨论在什么条件下可由此推得

收敛性.

3.1 非线性问题的广义稳定性

假设 $\mathfrak{B}_l$ 是 Banach 空间，其范数是 $\|\cdot\|_l$，L 是从 $\mathfrak{B}_1$ 到 $\mathfrak{B}_2$ 的算子，$f\in\mathfrak{B}_2$，并考虑下列问题

$$LU=f. \tag{3.1}$$

在本节中，假设 L^{-1} 存在.

用 $\mathfrak{B}_{l,h}$ 来逼近 $\mathfrak{B}_l$，算子 $\gamma_{l,h}$，p_h 和 ω 的定义同 § 2.3，并满足 (2.36)，(2.37)，(2.39) 和 (2.40)，但它们可能是非线性的. 用 L_h 和 f_h 来逼近 L 和 f，并考虑下列近似问题

$$L_hu_h=f_h. \tag{3.2}$$

若 U 是 (3.1) 的解，则逼近误差 $R_h(U)$ 定义为

$$R_h(U)=f_h-L_h\gamma_{1,h}U.$$

若当 $h\to 0$ 时，$\|R_h(U)\|_{2,h}\to 0$，则称在点 U，格式 (3.2) 对 (3.1) 的逼近是相容的.

如果 $\|R_h(U)\|_{2,h}=O(h^{s_a(L_h,U)})$，则称在点 U，格式的逼近是 $s_a(L_h,U)$ 阶的，并定义 $s_a(L_h)=\sup\limits_U s_a(U)$.

如果

$$\lim_{h\to 0}\|p_hu_h-\omega U\|_3=0,$$

则称格式 (3.2) 的解 u_h 收敛到 U.

问题在于如何定义稳定性. 可以仿照 § 2，把稳定性定义为：存在正常数 c_1，使得当 $h\leqslant h_0$ 时，对一切 $u_h^{(i)}\in\mathfrak{B}_{1,h}$，都有

$$\|u_h^{(1)}-u_h^{(2)}\|_{1,h}\leqslant c_1\|L_hu_h^{(1)}-L_hu_h^{(2)}\|_{2,h}.$$

通常把这种稳定性称为线性稳定性.

大量事实表明非线性格式很难具有上述稳定性. 郭本瑜 (1965a, 1976) 针对非线性问题的特点提出了广义稳定性的概念.

如果存在依赖于 u_h 而不直接依赖于 h 的常数 $M(u_h)$ 和 $N(u_h)$，以及绝对常数 q，使得当

$$\|L_h u_h - L_h v_h\|_{2,h} \leqslant N(u_h) h^q \tag{3.3}$$

时，

$$\|u_h - v_h\|_{1,h} \leqslant M(u_h) \|L_h u_h - L_h v_h\|_{2,h}, \tag{3.4}$$

则称格式 (3.2) 对点 u_h 是广义稳定的.

假定 h 适当小，$q \leqslant q'$，那末当

$$\|L_h u_h - L_h v_h\|_{2,h} \leqslant N(u_h) h^{q'}$$

时，(3.3) 自然成立. 因此，对一切 L_h 和 u_h，这样的 q 的上界都是 $+\infty$. 人们感兴趣的是它的下确界，并且被称为 L_h 对 u_h 的广义稳定性指标，记为 $s(L_h, u_h)$. 而 $s(L_h) = \sup_{u_h \in \mathfrak{B}_{1,h}} s(L_h, u_h)$ 被称为 L_h 的广义稳定性指标.

若对任意的 q，(3.4) 都成立，则记 $s(L_h, u_h) = -\infty$. 如果对任意的 u_h，$s(L_h, u_h) = -\infty$，则记 $s(L_h) = -\infty$.

如果对一切 $u_h^{(i)} \in \mathfrak{B}_{1,h}$，当 $\|L_h u_h^{(i)} - L_h u_h\|_{2,h} \leqslant \bar{N}(u_h) h^{\bar{q}}$ 时，

$$\|u_h^{(1)} - u_h^{(2)}\|_{1,h} \leqslant \bar{M}(u_h) \|L_h u_h^{(1)} - L_h u_h^{(2)}\|_{2,h},$$

则称 (3.2) 对点 u_h 是一致广义稳定的，并把这种 $\bar{q}$ 的下确界称为 L_h 对点 u_h 的一致广义稳定性指标，记为 $\bar{s}(L_h, u_h)$. 而 L_h 的一致广义稳定性指标是 $\bar{s}(L_h) = \sup_{u_h \in \mathfrak{B}_{1,h}} \bar{s}(L_h, u_h)$.

我们知道，非线性系统通常当且仅当外界扰动不超过临界值时才是稳定的，广义稳定性就是适应了这种情况. 特别，若 u_h 是 (3.2) 的解，f_h 的误差是 $\tilde{f}_h$，$s(L_h, u_h) \leqslant 0$，则当 $\|\tilde{f}_h\|_{2,h}$ 不超过某常数时，u_h 就是稳定的. 对于固定的 h，一般说来，$s(L_h, u_h)$ 越小，格式就越稳定. Griffiths (1982) 专文介绍了这种稳定性，并称它为 g 稳定性.

广义稳定性是线性稳定性的推广.

定理 3.1 若 L_h 是线性的，则线性稳定性的充要条件是 $M(u_h)$ 和 $N(u_h)$ 与 u_h 无关，且 $s(L_h) < +\infty$.

证明 若 L_h 是线性稳定的，则对一切 u_h，$s(L_h, u_h) = -\infty$，从而 $s(L_h) = -\infty$，且 $M(u_h)$，$N(u_h)$ 为常数.

反之，设 $M(u_h)$，$N(u_h)$ 为常数，且 $s(L_h) < q < +\infty$. 对

任意的 $u_h^{(l)}$，引人 $v_h^{(l)} = Nh^q\|L_h u_h^{(1)} - L_h u_h^{(2)}\|_{2,h}^{-1} u_h^{(l)}$，$l = 1, 2$，则有

$$\|L_h v_h^{(1)} - L_h v_h^{(2)}\|_{2,h} \leqslant Nh^q,$$

并由此得到

$$\|v_h^{(1)} - v_h^{(2)}\|_{1,h} \leqslant M\|L_h v_h^{(1)} - L_h v_h^{(2)}\|_{2,h}.$$

因为 $q < +\infty$，所以可由上式推出线性稳定性.

当 L_h 是线性算子时，线性稳定性的另一个充要条件是 $\bar{M}(u_h)$，$\bar{N}(u_h)$ 与 u_h 无关，且 $\bar{s}(L_h) < +\infty$.

下面来讨论 (3.2) 的可解性.

引理 3.1 假设满足下列条件

(i) L_h 在球 $B_{1,h}(v', R)$ 中有定义并连续，其中

$$B_{1,h}(v', R) = \{v/v, v' \in \mathfrak{B}_{1,h}, \|v - v'\|_{1,h} < R\};$$

(ii) 对一切 $v^{(l)} \in B_{1,h}(v'R)$，若

$$L_h v^{(l)} \in B_{2,h}(L_h v', r) = \{g/g \in \mathfrak{B}_{2,h}, \|g - L_h v'\|_{2,h} < r\},$$

则

$$\|v^{(1)} - v^{(2)}\|_{1,h} \leqslant M\|L_h v^{(1)} - L_h v^{(2)}\|_{2,h},$$

其中 M 是正常数；

(iii) $\mathscr{D}\mathrm{im}(\mathfrak{B}_{1,h}) = \mathscr{D}\mathrm{im}(\mathfrak{B}_{2,h})$，

那末，对一切 $g \in B_{2,h}(L_h v', r_0)$，都在 $B_{1,h}(v', R)$ 中存在唯一的 v，使得 $L_h v = g$，其中

$$r_0 = \min\left(r, \frac{R}{M}\right).$$

证明 条件 (ii) 保证了在集合 $B_{2,h}(L_h v', r_0) \cap L_h(B_{1,h}(v', R))$ 中，L_h^{-1} 是唯一的，所以只要证明 $B_{2,h}(L_h v', r_0) \subset L_h(B_{1,h}(v', R))$. 下面用反证法来证明它.

假定 $g' \in B_{2,h}(L_h v', r_0)$，但 $g' \bar{\in} L_h(B_{1,h}(v', R))$. 令

$$g(\lambda) = (1 - \lambda)L_h v' + \lambda g', \quad \lambda \geqslant 0, \tag{3.5}$$

并记

$$\bar{\lambda} = \begin{cases} \sup\{\lambda'/\lambda' \geqslant 0, \text{且对一切 } \lambda \in (0, \lambda'), g(\lambda) \in L_h(B_{1,h}(v', R))\}, \\ 0, \text{若上述集合为空.} \end{cases} \tag{3.6}$$

若 $\lambda > 1$，则 $g(1) = g' \in L_h(B_{1,h}(v', R))$，从而定理已得证明.

若 $\lambda = 0$，则 $g = g(\lambda) = L_h v' \in L_h(B_{1,h}(v',R))$，并且对应的原象是 $\bar{v} = L_h^{-1} g = v'$.

若 $0 < \lambda \leqslant 1$，则对所有小于 λ 的正数 ε，都有

$$g(\lambda - \varepsilon) \in L_h(B_{1,h}(v', R)) \cap B_{2,h}(L_h v', r_0),$$

所以元素 $L_h^{-1}(g(\lambda - \varepsilon))$ 存在. 由条件 (ii)，还存在极限元素 $\bar{v}$，使得

$$\bar{v} = \lim_{\varepsilon \to 0} L_h^{-1}(g(\lambda - \varepsilon)).$$

但对一切这样的 ε，由条件 (ii) 及 (3.5) 得到

$$\begin{aligned} \|L_h^{-1}(g(\lambda - \varepsilon)) - v'\|_{1,h} &\leqslant M\|g(\lambda - \varepsilon) - L_h v'\|_{2,h} \\ &= M(\lambda - \varepsilon)\|g' - L_h v'\|_{2,h} < r_0 M(\lambda - \varepsilon) \leqslant (1 - \varepsilon)R, \end{aligned}$$

因此 $\bar{v} \in B_{1,h}(v',R)$. 根据 L_h 在 $B_{1,h}(v',R)$ 中的连续性，尚有 $L_h(\bar{v}) = g$.

现在以 $\bar{v}$ 为中心，作闭球 $\bar{B}_{1,h}(\bar{v}, \varepsilon) \subset B_{1,h}(v', R)$，并使 $L_h(\bar{B}_{1,h}(\bar{v}, \varepsilon)) \subset B_{2,h}(L_h v', r)$，于是在 $\bar{B}_{1,h}(\bar{v}, \varepsilon)$ 和 $L_h(\bar{B}_{1,h}(\bar{v}, \varepsilon))$ 之间，L_h 是个一一对应算子. 从而由条件 (iii)，$L_h(\bar{B}_{1,h}(\bar{v}, \varepsilon))$ 包含了 g 的一个开邻域，而这与 λ 的定义 (3.6) 相矛盾.

定理 3.2 如果下列条件满足

(i) L_h 在球 $B_{1,h}(\gamma_{1,h}U, R)$ 中有定义且连续，

(ii) L_h 对点 $\gamma_{1,h}U$ 是一致广义稳定的，

(iii) $\mathscr{D}\mathrm{im}(\mathfrak{B}_{1,h}) = \mathscr{D}\mathrm{im}(\mathfrak{B}_{2,h})$，

(iv) $\|R_h(U)\|_{2,h} < r_0(h)$，其中

$$r_0(h) = \min\left(\bar{N}(\gamma_{1,h}U) h^{l(L_h,\gamma_{1,h}U)}, \frac{R}{\bar{M}(\gamma_{1,h}U)}\right),$$

则格式 (3.2) 有唯一解.

证明 在引理 3.1 中令 $v' = \gamma_{1,h}U$，$r_0 = r_0(h)$，那末本定理的条件 (i)—(iii) 恰为引理 3.1 的条件，所以在 $B_{2,h}(L_h(\gamma_{1,h}U), r_0(h))$ 中，L_h^{-1} 是存在的. 又由定理的条件 (iv) 得到

$$\|f_h - L_h \gamma_{1,h}U\|_{2,h} < r_0(h),$$

从而 $f_h\in B_{2,h}(L_h(\gamma_{1,h}U),r_0(h))$，这就证明了本定理。

注记 3.1　若 (3.1) 是偏微分方程的初值问题或初、边值问题，(3.2) 是相应的显式格式，则它的可解性是显然的。对于其它的情况，则往往可由定理 3.2 来保证它的可解性。

下面来讨论收敛性。

定理 3.3　假定下列条件满足

(i) 对充分小的 h，格式 (3.2) 有唯一解 u_h，

(ii) 对点 $\gamma_{1,h}U$，(3.2) 是广义稳定的，

(iii) p_h 是线性算子，

(iv) $\|R_h(U)\|_{2,h}\leqslant N(\gamma_{1,h}U)h^{s(L_h,\gamma_{1,h}U)}$，并且

$$\lim_{h\to 0}M(\gamma_{1,h}U)\|R_h(U)\|_{2,h}=0,$$

那末

$$\lim_{h\to 0}\|p_hu_h-\omega U\|_3=0.$$

证明　令 $u_h=\gamma_{1,h}U+\tilde{u}_h$，则

$$\begin{cases}L_h\gamma_{1,h}U=f_h-R_h(U),\\ L_h(\gamma_{1,h}U+\tilde{u}_h)=f_h.\end{cases}$$

由条件 (ii)，(iv) 和 (2.39)，当 $h\to 0$ 时，

$$\|p_h\tilde{u}_h\|_3\leqslant c_2\|\tilde{u}_h\|_{1,h}\leqslant c_2M(\gamma_{1,h}U)\|R_h(U)\|_{2,h}\to 0,$$

由于 $p_hu_h-\omega U=p_h\tilde{u}_h+p_h\gamma_{1,h}U-\omega U$，因此由上式和 (2.40) 即得所证。

注记 3.2　如果存在正常数 M_0 与 N_0，使得 $M(\gamma_{1,h}U)\leqslant M_0$，$N(\gamma_{1,h}U)\geqslant N_0$，并且 $s(L_h,\gamma_{1,h}U)\leqslant 0$，则当 $\|R_h(U)\|_{2,h}\to 0$ 时，格式就是对 U 收敛的。

注记 3.3　如果 $M(\gamma_{1,h}U)\|R_h(U)\|_{2,h}=O(h^\mu)$，$\|p_h\gamma_{1,h}U-\omega U\|_3=O(h^\mu)$，$\mu>\max(s(L_h,\gamma_{1,h}U),0)$，则

$$\|p_hu_h-\omega U\|_3=O(h^\mu).$$

另一个问题是 $\{u_h\}$ 对 f_h 的一致连续依赖性。对于线性格式来说，解对定解条件的一致连续依赖性等价于格式的稳定性。若格式对原问题的逼近是相容的，那末它又等价于收敛性。所以人们把主要精力放在研究 $\|u_h\|_{1,h}$ 对 $\|f_h\|_{2,h}$ 的一致连续依赖性。

对于非线性问题，并没有上述关系．反之，往往由广义稳定性或收敛性推得解的有界性和对定解条件的一致连续依赖性．

定理 3.4 若 $L_h(0)=0$, $s(L_h,0)\leqslant 0$, $\|f_h\|_{2,h}\leqslant N(0)$，则当 $h\leqslant 1$ 时，一致地有 $\|p_h u_h\|_3\leqslant c_2 M(0)N(0)$。

证明 我们有

$$\begin{cases} L_h(0)=0, \\ L_h(u_h)=f_h. \end{cases}$$

因此由广义稳定性定义得到 $\|u_h\|_{1,h}\leqslant M(0)\|f_h\|_{2,h}$, 并由 (2.39) 即得所证。

设 U 是 x 的函数，$x=(x_1, x_2, \cdots x_n)^T$, U_{x_m} 表示 U 对 x_m 的以 h 为步长的向前差商，$\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n)^T$, $\alpha_m\geqslant 0$, $|\alpha|=\sum_{m=1}^{n}\alpha_m$,

$$U_{x^\alpha}=U_{\underbrace{x_1\cdots x_1}_{\alpha_1\text{个}}\underbrace{x_2\cdots x_2}_{\alpha_2\text{个}}\cdots\underbrace{x_n\cdots x_n}_{\alpha_n\text{个}}},\quad D^\alpha U=\frac{\partial^{|\alpha|}U}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

定理 3.5 假设定理 3.3 的条件成立，并且

(i) ω 是线性的，

(ii) $M(\gamma_{1,h}U)\|R_h(U)\|_{2,h}=O(h^\mu)$, $\|p_h\gamma_{1,h}U-\omega U\|_3=O(h^\mu)$,

(iii) $D^\alpha U$ 连续，并且 $|\alpha|\geqslant\mu>0$, $|\beta|\leqslant\mu$,

那末，$p_h u_h$ 对 x 的 β 阶向前差商一致有界．

证明 由条件 (i) 得到

$$(p_h u_h)_{x^\beta}=\omega D^\beta U+\omega(U_{x^\beta}-D^\beta U)+(p_h u_h-\omega U)_{x^\beta},$$

由条件 (ii), (iii) 及注记 3.3 即得所证．

注记 3.4 若条件 (ii) 中的 $O(h^\mu)$ 改为 $o(h^\mu)$，则当 $h\to 0$ 时，$(p_h u_h)_{x^\beta}\to\omega D^\beta U$。

一般说来，L_h 依赖于若干参数．记 $a=(a_1, a_2, \cdots a_d)$，所以 $\bar{s}(L_h)$ 也是 a 的函数．我们自然希望选取 $a=a'$，使得 $\bar{s}(L_h)$ 达到最小．由于实际上很难得到 a' 的准确值，所以只能设法使 $\bar{s}(L_h)$ 尽可能小．Weinberger (1972), Michelli, Miranker (1973)

和 Birkhoff, Gulati (1974) 等都研究过格式参数的最优选取问题,但他们只考虑线性问题,并设法增大 $s_a(L_h)$. 对于非线性问题则应同时考虑 $s_a(L_h)$ 和 $s(L_h)$,设法增大 $s_a(L_h)$ 以提高精度,减少 $s(L_h)$ 以增强稳定性,而且一旦 $s(L_h) < s_a(L_h)$,那末就可得到收敛性.

综上所述,我们可以按照下列途径来研究非线性格式. 即先估计 $s(L_h,u_h)$ 或 $s(L_h)$,并使它尽可能小. 然后在一定条件下,由定理 3.3 得到收敛性. 若再附加一些条件,则可能由定理 3.4 和定理 3.5 得到 $p_h u_h$ 或它的差商的一致有界性. 如果 $M(u_h)$, $N(u_h)$ 所依赖的 $\|u_h\|_{1,h}$, $\|(u_h)_x p\|_{1,h}$ 都一致有界;那末还可比较当 $h \to 0$ 时,两个格式的稳定性的强弱(见 Guo Ben-yu (1982)).

上面所讲的非线性稳定性是对一般情况而言的,在实际计算中,许多因素都会导致误差. 为了判别格式对某种误差的稳定性质,还需要进行具体的分析. 例如,设 u_h 和 f_h 是 x 的函数,

$$L_h u_h(x) = f_h(x),$$

并可通过有限次算术运算,逐点地计算 $u_h(x)$. 假定采用 q 进制的定点运算计算机,它的字长是 r,于是每进行一次算术运算就会有一次舍入误差,其绝对值不超过 q^{-r} 的适当倍数. 假定 L_h 是 p 阶差分算子,舍入误差引起的误差是 $\tilde{f}_h$,u_h 的误差是 $\tilde{u}_h$,则

$$L_h(u_h + \tilde{u}_h)(x) = (f_h + \tilde{f}_h)(x),$$

其中 $\|\tilde{f}_h\|_{2,h} \leqslant c_2 h^{-p} q^{-r}$, c_2 是适当的正常数. 设广义稳定性指标是 $s(L_h,u_h)$,那末当 $c_2 h^{-p} q^{-r} \leqslant N(u_h) h^{s(L_h,u_h)}$ 时,有

$$\|\tilde{u}_h\|_{1,h} \leqslant M(u_h)\|\tilde{f}_h\|_{2,h} \leqslant c_2 M(u_h) h^{-p} q^{-r}.$$

由于通常 $h < 1$,所以从上面的分析可以看到:

(i) $s(L_h,u_h)$ 越小,解对舍入误差就越稳定,

(ii) 计算机的字长越大,计算就越稳定,

(iii) h 越小,就越可能不稳定,此时宜采用双倍位运算或字长大的计算机.

(iv) 差分格式的阶数 p 越大,计算越不稳定,因此宜把它化为低阶的方程组.

Kuo Pen-yu (1981) 还把广义稳定性推广为广义弱稳定性，即指存在函数 $M(u_h,h)\geqslant 0$ 和 $N(u_h,h)>0$,使得当 $\|L_hu_h-L_hv_h\|_{2,h}\leqslant N(u_h,h)$ 时，

$$\|u_h-v_h\|_{1,h}\leqslant M(u_h,h)\|L_hu_h-L_hv_h\|_{2,h}.$$

在该论文中建立了与定理 3.2—3.5 相类似的结果.

Stetter (1966, 1973) 也研究了非线性稳定性. 他认为如果存在仅与 u_h 有关的正常数 $M(u_h)$ 和 $N(u_h)$, 使得当 $\|L_hu_h^{(1)}-L_hu_h\|_{2,h}\leqslant N(u_h)$ 时，

$$\|u_h^{(1)}-u_h^{(2)}\|_{1,h}\leqslant M(u_h)\|L_hu_h^{(1)}-L_hu_h^{(2)}\|_{2,h},$$

则称格式 (3.2) 在点 u_h 是稳定的. 显然，它等价于 $s(L_h,u_h)=0$ 时的一致广义稳定性.

Rosinger (1980a,b) 定义了另一种稳定性，即对 $\mathfrak{B}_{1,h}$ 中的任意紧致集合 E, 都存在仅与 E 有关的正常数 $M(E)$, 使得对一切 u_h, $v_h\in E$, 都有

$$\|u_h-v_h\|_{1,h}\leqslant M(E)\|L_hu_h-L_hv_h\|_{2,h}.$$

并且也建立了一系列定理. 自然，这种稳定性已经很接近于线性稳定性.

此外，Рябенкий, Филиппов (1956) 也定义了另一种非线性稳定性.

3.2 非线性问题的局部稳定性

如果 (3.1) 具有多个解，那末 (3.2) 也应该有多个解. Keller (1975) 所提出的局部稳定性，就是适用于这种情况的. 记

$$B_1(U,R)=\{V/V\in\mathfrak{B}_1,\|V-U\|_1\leqslant R\}.$$

如果存在正常数 c_R,使得对一切 $V^{(l)}\in B_1(U,R)$,

$$\|V^{(1)}-V^{(2)}\|_1\leqslant c_R\|LV^{(1)}-LV^{(2)}\|_2,$$

则称 L 在 $B_1(U,R)$ 内是稳定的.

如果 U 是 (3.1) 的解，并存在 $R>0$, 使得 L 在 $B_1(U,R)$ 内是稳定的，则称它是 (3.1) 的稳定解. 显然，它也是 (3.1) 在 $B_1(U,R)$ 内的唯一解.

定理 3.6 假设 L 是线性的，并在球 $B_1(U, R)$ 内稳定，f 的误差 $\tilde{f}$ 引起了 U 的误差 $\tilde{U}$，则

$$\|\tilde{U}\|_1 \leqslant c_R \|\tilde{f}\|_2.$$

证明 若 $\|\tilde{U}\|_1 \neq 0$，则记 $\tilde{U}' = \frac{R\tilde{U}}{\|\tilde{U}\|_1}$，于是 $\|\tilde{U}'\|_1 \leqslant R$，并且

$$L(U + \tilde{U}') = f + \frac{R\tilde{f}}{\|\tilde{U}\|_1}.$$

由稳定性的定义即得到

$$\|\tilde{U}'\|_1 \leqslant \frac{c_R R \|\tilde{f}\|_2}{\|\tilde{U}\|_1},$$

并由此推得定理的结论.

如果存在线性连续算子 $L'(U)$，使得

$$L(U + V) - L(U) = L'(U)V + r(U, V),$$

其中

$$\lim_{\|V\|_1 \to 0} \frac{\|r(U, V)\|_2}{\|V\|_1} = 0,$$

则称 L 在点 U 是 Fréchet 可导的. $L'(U)$ 是该点的 Fréchet 导数.

若当 $L'(U)V = 0$ 时，必有 $V = 0$，则称 $L'(U)$ 是非奇异的.

如果存在正数 r 和 c_r，使得当 $U^{(i)} \in B_1(U, r)$ 时，

$$\| L'(U^{(1)}) - L'(U^{(2)})\| \leqslant c_r \|U^{(1)} - U^{(2)}\|_1,$$

则称 L' 在 $B_1(U, r)$ 内是 Lipschitz 连续的.

若 U 是 (3.1) 的解，且 $L'(U)$ 非奇异，则称它是 (3.1) 的孤立解.

定理 3.7 设 U 是 (3.1) 的稳定解，且 $L'(U)$ 存在，则它一定是孤立解.

证明 假定 $L'(U)$ 是奇异的，则必存在 $V \neq 0$，使得 $L'(U)V = 0$. 设 a 是任意正数，$W(a) = U + aV$，则当 $a < \frac{R}{\|V\|_1}$ 时，$W(a) \in B_1(U, R)$. 由于 U 是稳定解，因此

$$a\|V\|_1 = \|U - W(a)\|_1 \leqslant c_R\|L(U) - L(W(a))\|_2$$
$$\leqslant c_R(\|L'(U)aV\|_2 + \|r(U,aV)\|_2) = c_R\|r(U,aV)\|_2.$$
适当地选取 a，即可使得 $\|V\|_1 = 0$，而这是矛盾的.

定理 3.8 设 $U \in \mathfrak{B}_1$，$L'(U)$ 非奇异，并且在 $B_1(U, r)$ 内，$L'(U)$ 是 Lipschitz 连续的，那末 L 在 $B_1(U,R)$ 内是稳定的，其中

$$R < c_r^{-1}\|(L'(U))^{-1}\|^{-1},$$
$$c_R = \frac{\|(L'(U))^{-1}\|}{1 - rc_r\|(L'(U))^{-1}\|}.$$

证明 对任意的 $R \leqslant r$ 和 $V^{(i)} \in B_1(U,R)$，我们有

$$L(V^{(1)}) - L(V^{(2)}) = G(V^{(1)},V^{(2)})(V^{(1)} - V^{(2)}), \tag{3.7}$$

其中

$$G(V^{(1)}, V^{(2)}) = \int_0^1 L'(tV^{(1)} + (1-t)V^{(2)})dt.$$

由于

$$G(V^{(1)}, V^{(2)}) = L'(U) + (G(V^{(1)},V^{(2)}) - L'(U))$$

以及

$$\|G(V^{(1)},V^{(2)}) - L'(U)\|$$
$$\leqslant \int_0^1 \|L'(tV^{(1)} + (1-t)V^{(2)}) - L'(tU + (1-t)U)\| dt$$
$$\leqslant c_r \int_0^1 \|t(V^{(1)}-U)+(1-t)(V^{(2)}-U)\|_1 dt \leqslant Rc_r, \tag{3.8}$$

所以当适当选择 R，使得 $Rc_r\|(L'(U))^{-1}\| < 1$ 时，即由 Banach 定理得到

$$G^{-1}(V^{(1)},V^{(2)}) = (I + (L'(U))^{-1}(G(V^{(1)},V^{(2)})$$
$$- L'(U)))^{-1}(L'(U))^{-1},$$

并且由 (3.8) 推得

$$\|G^{-1}(V^{(1)}, V^{(2)})\| \leqslant \frac{\|(L'(U))^{-1}\|}{1 - Rc_r\|(L'(U))^{-1}\|}.$$

从而由 (3.7) 得到

$$\|V^{(1)} - V^{(2)}\|_1 \leqslant c_R\|LV^{(1)} - LV^{(2)}\|_2.$$

注记 3.5　若在 $B_1(U,r)$ 内

$$\|L'(V^{(1)}) - L'(V^{(2)})\| \leqslant c_r \|V^{(1)} - V^{(2)}\|_1^{\alpha}, \ 0 < \alpha \leqslant 1,$$

则引理的结论同样成立，但此时

$$R \leqslant (c_r \|(L'(U))^{-1}\|)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

定理 3.9　假定 U 是 (3.1) 的孤立解，并在 $B_1(U, r)$ 内，L' 是 Lipschitz 连续的，那末，U 是 (3.1) 的稳定解.

现在用 (3.2) 来近似计算 (3.1)，对任意 $V \in \mathfrak{B}_1$.　逼近误差是 $R_h(V) = f_h - L_h \gamma_{1,h} V - \gamma_{2,h} f + \gamma_{2,h} L V$.

为方便计，设 $\gamma_{1,h}$ 是线性的，L'_h 表示 L_h 的 Fréchet 导数.

如果对一切 $V \in B_1(U, R)$，当 $h \to 0$ 时，$\|R_h(V)\|_{2,h} \to 0$，则称在 $B_1(U,R)$ 内，格式 (3.2) 对 (3.1) 的逼近是相容的.

如果存在正常数 h_0, R 和与 h 无关的正常数 M_R，使得对一切 $h \leqslant h_0$ 和 $u_h^{(i)} \in B_{1,h}(u_h, R)$，都有

$$\|u_h^{(1)} - u_h^{(2)}\|_{1,h} \leqslant M_R \|L_h u_h^{(1)} - L_h u_h^{(2)}\|_{2,h},$$

则称 L_h 对 u_h 是稳定的.

可仿定理 3.8 证明：

定理 3.10　假设 $u_h \in \mathfrak{B}_{1,h}$, L'_h 在 $B_{1,h}(u_h, \rho)$ 内存在，并且满足下列条件

(i) 存在正常数 M_0，使得对一切 h, $\|(L'_h(u_h))^{-1}\| \leqslant M_0$,

(ii) 存在正常数 M_ρ，使得对一切 $u_h^{(i)} \in B_{1,h}(u_h, \rho)$,

$$\|L'_h(u_h^{(1)}) - L'_h(u_h^{(2)})\| \leqslant M_\rho \|u_h^{(1)} - u_h^{(2)}\|_{1,h},$$

那末，L_h 对 u_h 是稳定的.

下面来讨论 (3.2) 的可解性.　为此先介绍 Канторович 的引理（见 Красносельский, Вайникко, Забрейко, Рутицкий, Стеценко (1969)).

引理 3.2　设 $\mathscr{F}_1$ 和 $\mathscr{F}_2$ 是两个 Banach 空间，$\mathscr{L}$ 是映 $\mathscr{D} \in \mathscr{F}_1$ 到 $\mathscr{F}_2$ 的算子，在球 $S_1(w^{(0)}, \rho)$ 为 $\mathscr{L}$ 的 Fréchet 导数 $\mathscr{L}'$ 存在，并且满足

$$\|\mathscr{L}'(w_1) - \mathscr{L}'(w_2)\| \leqslant k_\rho \|w_1 - w_2\|_{\mathscr{F}_1},$$

其中 k_ρ 是正常数；

$$S_1(w^{(0)}, \rho) = \{w \in \mathscr{T}_1, \|w - w^{(0)}\|_{\mathscr{T}_1} < \rho\},$$

又假定 $g_0 = [\mathscr{L}'(w^{(0)})]^{-1}$ 存在，$\|g_0\| \leqslant b_0$，$\|g_0 \mathscr{L}(w^{(0)})\| \leqslant \eta_0$，那末，当

$$a_0 = b_0 k_\rho \eta_0 < \frac{1}{2}, \quad \rho_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2a_0}}{b_0 k_\rho} \leqslant \rho$$

时，下列 Newton 迭代过程

$$w^{(l+1)} = w^{(l)} - [\mathscr{L}'(w^{(l)})]^{-1} \mathscr{L}(w^{(l)}), \ l \geqslant 0 \qquad (3.9)$$

收敛，其极限 $\bar{w} \in S_1(w^{(0)}, \rho_0)$，并满足 $\mathscr{L}(\bar{w}) = 0$.

证明 定义下列序列

$$b_{l+1} = \frac{b_l}{1 - a_l}, \ \eta_{l+1} = \frac{a_l \eta_l}{2(1 - a_l)}, \ a_{l+1} = b_{l+1} k_\rho \eta_{l+1},$$

$$\rho_{l+1} = \frac{1 - \sqrt{1 - 2a_{l+1}}}{a_{l+1}} \eta_{l+1}, \ l \geqslant 0,$$

并用归纳法证明

$$\|[\mathscr{L}'(w^{(l)})]^{-1}\| \leqslant b_l, \|[\mathscr{L}'(w^{(l)})]^{-1} \mathscr{L}(w^{(l)})\|_{\mathscr{T}_1} \leqslant \eta_l,$$
$$a_l \leqslant \frac{1}{2}, \qquad (3.10)$$

以及

$$S_1(w^{(l)}, \rho_l) \subset S_1(w^{(l-1)}, \rho_{l-1}). \qquad (3.11)$$

当 $l = 0$ 时，(3.10) 和 (3.11) 自然成立. 假设 (3.10) 和 (3.11) 对 l 成立，则

$$\|w^{(l+1)} - w^{(l)}\|_{\mathscr{T}_1} = \|[\mathscr{L}'(w^{(l)})]^{-1} \mathscr{L}(w^{(l)})\|_{\mathscr{T}_1} \leqslant \eta_l, \qquad (3.12)$$

所以，$w^{(l+1)} \in S_1(w^{(l)}, \rho_l) \subset S_1(w^{(0)}, \rho)$，从而 $\mathscr{L}'(w^{(l+1)})$ 存在并且满足

$$\|[\mathscr{L}'(w^{(l)})]^{-1}[\mathscr{L}'(w^{(l+1)}) - \mathscr{L}'(w^{(l)})]\|$$
$$\leqslant b_l k_\rho \|w^{(l+1)} - w^{(l)}\|_{\mathscr{T}_1} \leqslant a_l \leqslant \frac{1}{2},$$

于是 $[\mathscr{L}'(w^{(l+1)})]^{-1}$ 存在，并且由 Banach 展开定理得到

$$[\mathscr{L}'(w^{(l+1)})]^{-1} = \{I + [\mathscr{L}'(w^{(l)})]^{-1}[\mathscr{L}'(w^{(l+1)})$$

$$- \mathscr{L}'(w^{(l)})\}\}^{-1}[\mathscr{L}'(w^{(l)})]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \{[\mathscr{L}'(w^{(l)})]^{-1}$$

$$\cdot [\mathscr{L}'(w^{(l+1)}) - \mathscr{L}'(w^{(l)})]\}^k [\mathscr{L}'(w^{(l)})]^{-1}$$

和

$$\|[\mathscr{L}'(w^{(l+1)})]^{-1}\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} b_l \|[\mathscr{L}'(w^{(l)})]^{-1}[\mathscr{L}'(w^{(l+1)})$$

$$- \mathscr{L}'(w^{(l)})]\|^k = 2b_l \leqslant \frac{b_l}{1-a_l} = b_{l+1}. \tag{3.13}$$

因此,(3.10) 中的第一式对 $l+1$ 成立。

由于

$$\mathscr{L}'(w^{(l)})(w^{(l+1)} - w^{(l)}) = -\mathscr{L}(w^{(l)}),$$

因此

$$\mathscr{L}(w^{(l+1)}) = \mathscr{L}(w^{(l+1)}) - \mathscr{L}(w^{(l)})$$

$$- \mathscr{L}'(w^{(l)})(w^{(l+1)} - w^{(l)}) = \int_0^1 [\mathscr{L}'(w^{(l)}$$

$$+ t(w^{(l+1)} - w^{(l)})) - \mathscr{L}'(w^{(l)})](w^{(l+1)} - w^{(l)})dt,$$

$$\|\mathscr{L}(w^{(l+1)})\|_{\mathscr{F}_1} \leqslant \frac{k_\rho}{2} \|w^{(l+1)} - w^{(l)}\|^2_{\mathscr{F}_1}.$$

结合上式及 (3.12), (3.13),即得到

$$\|[\mathscr{L}'(w^{(l+1)})]^{-1}\mathscr{L}(w^{(l+1)})\|_{\mathscr{F}_1} \leqslant \frac{b_l k_\rho \eta_l^2}{2(1-a_l)}$$

$$= \frac{a_l \eta_l}{2(1-a_l)} = \eta_{l+1},$$

从而 (3.10) 中的第二式对 $l+1$ 也成立。

容易验证

$$a_{l+1} = b_{l+1} k_\rho \eta_{l+1} = \frac{b_l k_\rho a_l \eta_l}{2(1-a_l)^2} = \frac{a_l^2}{2(1-a_l)^2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

最后,若 $\|w - w^{(l+1)}\|_{\mathscr{F}_1} \leqslant \rho_{l+1}$,则由 (3.12) 得到

$$\|w - w^{(l)}\|_{\mathscr{F}_1} \leqslant \|w - w^{(l+1)}\|_{\mathscr{F}_1} + \|w^{(l+1)}$$

$$- w^{(l)}\|_{\mathscr{F}_1} \leqslant \rho_{l+1} + \eta_l = \rho_l,$$

即 (3.11) 对 $l+1$ 也成立。

又由 (3.10) 的第三式，$\eta_{l+1} \leqslant \frac{1}{2}\eta_l$，所以当 $l\to\infty$时，$\rho_l \to 0$，故存在极限 $\bar{w}$. 在迭代公式(3.9)中取极限，就得到$\mathscr{L}(\bar{w}) = 0$.

引理 3.3 在引理 3.2 的条件下，下列简化的 Newton 迭代过程

$$w^{(l+1)} = w^{(l)} - g_0\mathscr{L}(w^{(l)}),\ l \geqslant 0 \tag{3.14}$$

收敛，其极限 $\bar{w} \in S_1(w^{(0)}, \rho_0)$，且 $\mathscr{L}(\bar{w}) = 0$.

证明 记 $\mathscr{A}w = w - g_0\mathscr{L}(w)$. 先证明在球 $S_1(w^{(0)}, \rho_0)$ 内，$\mathscr{A}$ 是压缩算子. 事实上，对任意的 $w, v \in S_1(w^{(0)}, \rho_0)$，

$$\begin{aligned}\mathscr{A}w - \mathscr{A}v &= w - v - g_0(\mathscr{L}(w) - \mathscr{L}(v)) \\ &= g_0\int_0^1 [\mathscr{L}'(w^{(0)}) - \mathscr{L}'(v + t(w - v))](w - v)dt,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\|\mathscr{A}w - \mathscr{A}v\|_{\mathscr{F}_1} &\leqslant b_0k_\rho\rho_0\|w - v\|_{\mathscr{F}_1} \leqslant \frac{b_0k_\rho\eta_0}{a_0} \\ &\cdot (1 - \sqrt{1 - 2a_0})\|w - v\|_{\mathscr{F}_1} < \theta\|w - v\|_{\mathscr{F}_1}\end{aligned}$$

其中 $0 \leqslant \theta < 1$，即 $\mathscr{A}$ 是压缩算子.

再证明 $\mathscr{A}S_1(w^{(0)}, \rho_0) \subset S_1(w^{(0)}, \rho_0)$. 事实上，若 $\|w - w^{(0)}\|_{\mathscr{F}_1} \leqslant \rho_0$，则有

$$\begin{aligned}\|\mathscr{A}w - w^{(0)}\|_{\mathscr{F}_1} &\leqslant \|\mathscr{A}w - \mathscr{A}w^{(0)}\|_{\mathscr{F}_1} \\ &+ \|\mathscr{A}w^{(0)} - w^{(0)}\|_{\mathscr{F}_1} \leqslant \|g_0\int_0^1 [\mathscr{L}'(w^{(0)}) \\ &- \mathscr{L}'(w^{(0)} + t(w - w^{(0)}))](w - w^{(0)})dt\|_{\mathscr{F}_1} \\ &+ \eta_0 \leqslant \frac{b_0k_\rho}{2}\|w - w^{(0)}\|^2_{\mathscr{F}_1} + \eta_0 \leqslant \frac{b_0k_\rho\rho_0^2}{2} + \eta_0 = \rho_0.\end{aligned}$$

根据上面的证明，$\mathscr{A}w^{(l)}$ 在 $S_1(w^{(0)}, \rho_0)$ 内有唯一的极限 $\bar{w}$，且 $\mathscr{L}(\bar{w}) = 0$.

定理 3.11 设 U 是 (3.1) 的解，并在 $B_1(U, \rho)$ 内，L_h 对 L 的逼近是相容的，定理 3.10 的条件对 $\gamma_{1,h}U$ 成立，那末存在适当小的 ρ_0 和 h_0，使得当 $h \leqslant h_0$ 时，(3.2) 在 $B_{1,h}(\gamma_{1,h}U, \rho_0)$ 内有唯一解.

证明 在引理 3.2 或引理 3.3 中，令 $\mathscr{F}_1 = \mathfrak{B}_{1,h}$，$\mathscr{D} = \mathfrak{B}_{1,h}$，$w = u_h$，$\mathscr{L}(w) = L_h w - f_h$，于是 (3.2) 的解满足 $\mathscr{L}(u_h) = 0$，且 $\mathscr{L}' = L'_h$. 因此，若能选取适当的初始值，使得引理的条件满足，则就证明了本定理.

今取 $w^{(0)} = \gamma_{1,h}U$，$b_0 = M_0$. 又因为 $L_h\gamma_{1,h}U - f_h = -R_h(U)$，且当 $h \to 0$ 时，$\|R_h(U)\| \to 0$，所以当 h 充分小时，可取 $\eta_0 = M_0\varepsilon$，其中 ε 是适当小的正数. 根据定理的条件，还可令

$$a_0 = \varepsilon M_0^2 M_\rho < \frac{1}{2}, \quad \rho_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2a_0}}{M_0 M_\rho} \leqslant \rho.$$

这样，就满足了引理 3.2 或引理 3.3 的全部条件.

注记 3.6　(3.9) 和 (3.14) 还给出了求 (3.2) 的解的具体迭代方法，但收敛性与初值选择有关.

定理 3.12　假设 U 和 u_h 分别是 (3.1) 和 (3.2) 的解，$u_h \in B_{1,h}(\gamma_{1,h}U, \rho_0)$，$L_h$ 在 $B_1(U, \rho)$ 内对 L 的逼近是相容的，对 $\gamma_{1,h}U$ 是稳定的，$\rho_0 \leqslant \rho$，那末

$$\|\gamma_{1,h}U - u_h\|_{1,h} \leqslant M_R\|R_h(U)\|_{2,h}.$$

证明　我们有

$$\begin{cases} L_h u_h = f_h, \\ L_h\gamma_{1,h}U = f_h - R_h(U), \end{cases}$$

从而由 L_h 的稳定性即得所证.

注记 3.7　若 $\|R_h(U)\|_{2,h} = O(h^\mu)$，则 $\|\gamma_{1,h}U - u_h\|_{2,h} = O(h^\mu)$.

对于许多非线性问题，Keller 的稳定性条件很难满足，为此，Guo Ben-yu(1985a) 推广了 Keller 的理论. 如果存在正常数 h_0、R，非负函数 $M(u_h, h)$ 以及正值函数 $N(u_h, h)$，使得当 $h \leqslant h_0$，$v_h \in B_{1,h}(u_h, R)$，

$$\|L_h u_h - L_h v_h\|_{2,h} \leqslant N(u_h, h)$$

时，

$$\|u_h - v_h\|_{1,h} \leqslant M(u_h, h)\|L_h u_h - L_h v_h\|_{2,h},$$

则称 L_h 是在球 $B_{1,h}(u_h, R)$ 内对 u_h 是广义弱稳定的.

如果当 $h \leqslant h_0$, $u_h^{(l)} \in B_{1,h}(u_h, R)$,

$$\|L_h u_h^{(l)} - L_h u_h\|_{2,h} \leqslant \bar{N}(u_h, h) \tag{3.15}$$

时,

$$\|u_h^{(1)} - u_h^{(2)}\|_{1,h} \leqslant \bar{M}(u_h, h)\|L_h u_h^{(1)} - L_h u_h^{(2)}\|_{2,h}, \tag{3.16}$$

则称 L_h 是在球 $B_{1,h}(u_h, R)$ 内对 u_h 是一致广义弱稳定的.

定理 3.13 如果满足下列条件:

(i) L_h 在 $B_{1,h}(u_h, R)$ 内有定义且连续,

(ii) $\mathscr{D}\mathrm{im}(\mathfrak{B}_{1,h}) = \mathscr{D}\mathrm{im}(\mathfrak{B}_{2,h})$,

(iii) 若 $v_h \in B_{1,h}(u_h, R)$, $L_h v_h \in B_{2,h}(L_h u_h, \bar{N}(u_h, h))$, 则 $[L_h'(v_h)]^{-1}$ 存在,并且一致地有

$$\|[L_h'(v_h)]^{-1}\| \leqslant \bar{M}(u_h, h), \tag{3.17}$$

那末,L_h 在球 $B_{1,h}(u_h, r_0(h))$ 内是对 u_h 一致广义弱稳定的,其中

$$r_0(h) = \min\left((\bar{N}(u_h, h), \frac{R}{\bar{M}(u_h, h)}\right).$$

证明 由隐函数存在定理(见 Schwartz(1969)),对一切 $v_h \in B_{1,h}(u_h, R)$, $L_h v_h \in B_{2,h}(L_h u_h, r_0(h))$, 在 $L_h v_h$ 的一个邻域内存在 L_h^{-1},并且

$$(L_h^{-1})'(L_h v_h) = [L_h'(v_h)]^{-1}, \tag{3.18}$$

所以由 (3.17) 得到

$$\|(L_h^{-1})'(L_h v_h)\| \leqslant \bar{M}(u_h, h). \tag{3.19}$$

由于 $B_{2,h}(L_h u_h, r_0(h))$ 是凸集,故若 $L_h u_h^{(l)} \in B_{2,h}(L_h u_h, r_0(h))$,

$$g_h(t) = L_h u_h^{(2)} + t(L_h u_h^{(1)} - L_h u_h^{(2)}),\ 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

则 $(L_h^{-1})'(L_h g_h(t))$ 存在并且满足 (3.19),从而由中值定理得到

$$\begin{aligned}\|u_h^{(1)} - u_h^{(2)}\|_{1,h} &= \|L_h^{-1}(L_h u_h^{(1)}) - L_h^{-1}(L_h u_h^{(2)})\|_{2,h} \\ &\leqslant \bar{M}(u_h, h)\|L_h u_h^{(1)} - L_h u_h^{(2)}\|_{2,h}.\end{aligned}$$

仿照定理 3.3 和定理 3.4,可证明下列结果:

定理 3.14 假设下列条件满足

(i) L_h 在球 $B_{1,h}(\gamma_{1,h}U, R)$ 中有定义且连续,

(ii) L_h 是在 $B_{1,h}(\gamma_{1,h}U, R)$ 内对 $\gamma_{1,h}U$ 一致广义弱稳定的,

(iii) $\mathscr{D}\text{im}(\mathfrak{B}_{1,h}) = \mathscr{D}\text{im}(\mathfrak{B}_{2,h})$,

(iv) $\|R_h(U)\|_{2,h} < r_0(h)$,其中

$$r_0(h) = \min\left(\bar{N}(\gamma_{1,h}U, h),\ \frac{R}{\bar{M}(\gamma_{1,h}U, h)}\right),$$

则在 $B_{1,h}(\gamma_{1,h}U, R)$ 内,(3.2) 有唯一解.

定理 3.15 假设下列条件满足:

(i) U 是 (3.1) 的解,并当 $h \leqslant h_0$ 时,(3.2) 有解 $u_h \in B_{1,h}(\gamma_{1,h}U, R)$,

(ii) L_h 是在 $B_{1,h}(\gamma_{1,h}U, R)$ 内对 $\gamma_{1,h}U$ 广义弱稳定的,

(iii) $\|R_h(U)\|_{2,h} \leqslant N(\gamma_{1,h}U, h)$,

则

$$\|u_h - \gamma_{1,h}U\|_{1,h} \leqslant M(\gamma_{1,h}U, h)\|R_h(U)\|_{2,h}. \tag{3.20}$$

又若当 $h \to 0$ 时, $M(\gamma_{1,h}U, h)\|R_h(U)\|_{2,h} \to 0$, 则 $\|u_h - \gamma_{1,h}U\|_{1,h} \to 0$.

3.3 分歧点问题

前节讨论求孤立解的数值方法,但在实际问题中还需要研究分歧现象,例如分歧点的位置,分歧后的情况,分歧的终止与再分歧等等. 关于这方面的工作可见 Krasnosel' skii(1964), Rabinowitz (1968, 1971, 1974, 1976), Keller, Antman (1969), Sattinger (1973), Nirenberg(1974), Berger(1977) 和 Crandall, Rabinowitz (1980) 等人的文章.

假设 $\mathfrak{B}$ 是实 Banach 空间, 其范数是 $\|\cdot\|$. $\mathscr{D}$ 是 $\mathfrak{B}$ 中的开子集, $0 \in \mathscr{D}$. G 是从 $\mathscr{D}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的算子, λ 是实参数. 今考虑下列问题

$$G(\lambda, U) = 0. \tag{3.21}$$

最简单的分歧现象是关于平凡解的分歧. 为简单计,假定 (3.21) 有如下形式

$$LU - \lambda U = 0, \tag{3.22}$$

其中 L 是非线性算子,$L(0) = 0$. 于是对一切 λ,(3.22) 都有平凡

解.

如果在 $(\lambda_0,0)\in\mathscr{R}\times\mathfrak{B}$ 的任意邻域内，都存在 (3.21) 的非平凡解，则称 λ_0 是 (3.22) 对平凡解的分歧点.

如果

$$L'(U)V=\mu V$$

存在非平凡解，则称 μ 为 $L'(U)$ 的特征值，其全体记为 $\sigma(L'(U))$.

定理 3.16 如果 λ_0 是 (3.22) 对平凡解的分歧点，则 $\lambda_0\in\sigma(L'(0))$

证明 若 λ_0 是 (3.22) 对平凡解的分歧点，则存在序列 $\{\lambda^{(l)},U^{(l)}\}$，其中 $\|U^{(l)}\|\neq 0$，$LU^{(l)}=\lambda^{(l)}U^{(l)}$，并且当 $l\to\infty$ 时，$\lambda^{(l)}\to\lambda_0$，$U^{(l)}\to 0$，所以

$$\begin{aligned}(\lambda^{(l)}-\lambda_0)U^{(l)}&=LU^{(l)}-\lambda_0U^{(l)}\\&=L'(0)U^{(l)}-\lambda_0U^{(l)}+r(0,U^{(l)}).\end{aligned}$$

记 $W^{(l)}=\dfrac{U^{(l)}}{\|U^{(l)}\|}$，则 $\|W^{(l)}\|=1$，并且

$$\begin{cases}L'(0)W^{(l)}-\lambda_0W^{(l)}=g^{(l)},\\g^{(l)}=(\lambda^{(l)}-\lambda_0)W^{(l)}-\dfrac{r(0,U^{(l)})}{\|U^{(l)}\|}.\end{cases}$$

若 $\lambda_0\bar{\in}\sigma(L'(0))$，则 $\lambda_0-L'(0)$ 有有界的逆算子，所以

$$\|W^{(l)}\|\leqslant\|(\lambda_0-L'(0))^{-1}\|\|g^{(l)}\|,$$

但当 $l\to\infty$ 时，$\|g^{(l)}\|\to 0$，故 $\|W^{(l)}\|\to 0$，这是矛盾的.

并非所有的 $L'(0)$ 的特征值都是对平凡解的分歧点. 本节详细讨论一种特殊情况，即假定:

H_1: L 是全连续算子，λ_0 是 $L'(0)$ 的实单重特征值，φ 是相应的特征元素，$\|\varphi\|=1$.

H_2: 存在正常数 c_0 和 η，使得在邻域 $B(0,\eta)=\{V/\|V\|\leqslant\eta\}$ 内，L 是二阶可微的，并且 $\|L''(V)\|\leqslant c_0$.

为了证明在上述条件下，λ_0 是分歧点，需要应用广义逆算子的概念. 用 $\mathscr{N}$ 和 $\mathscr{Y}$ 分别表示 $\lambda_0-L'(0)$ 的零空间和值域. 它们都是闭子空间，并且 $\mathfrak{B}=\mathscr{N}\oplus\mathscr{Y}$. 众所周知，当且仅当 $f\in\mathscr{Y}$

时，

$$(\lambda_0 - L'(0))W = f \tag{3.23}$$

才有唯一解．(3.23) 的任意两个解的差则都是 $\mathscr{N}$ 中的元素．在 $\mathscr{Y}$ 中，(3.23) 的解是唯一的．我们记

$$\mathscr{A}f = \begin{cases} W, 当\ f \in \mathscr{Y}, \\ 0, 当\ f \in \mathscr{N}. \end{cases}$$

对于任意的 $f \in \mathfrak{B}$，有 $f = f_1 + f_2$，其中 $f_1 \in \mathscr{N}$，$f_2 \in \mathscr{Y}$，而 $\mathscr{A}f = \mathscr{A}f_2$．这样就把 $\mathscr{A}$ 推广到整个空间，并被称为 $\lambda_0 - L'(0)$ 的广义逆算子．显然，$\mathscr{A}$ 把 $\mathscr{Y}$ 中的元素一一对应到自身中的元素．

下面记 $\sigma_0(L'(0)) = \sigma(L'(0))/\{\lambda_0\}$，则不难验证

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\lambda_0 - z}(z - L'(0))^{-1}dz, \tag{3.24}$$

其中 Γ 表示逐段可求长的闭曲线，$\sigma_0(L'(0))$ 在 Γ 的内部，而 λ_0 在 Γ 的外部． 若用 $\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{Q}$ 分别表示从 $\mathfrak{B}$ 到 $\mathscr{N}$ 和 $\mathscr{Y}$ 的投影算子，则有

$$\mathscr{A}(\lambda_0 - L'(0)) = (\lambda_0 - L'(0))\mathscr{A} = \mathscr{Q}. \tag{3.25}$$

定理 3.17 (Atkinson(1977)) 若条件 H_1, H_2 满足，则存在正数 ε，使得当 $|\alpha| \leqslant \varepsilon$ 时，存在非平凡的单变量连续函数 $V(\alpha)$ 和 $\delta(\alpha)$，满足

$$U(\alpha) = \alpha(\varphi + V(\alpha)),\ V(\alpha) \in \mathscr{Y},$$
$$L(U(\alpha)) = (\lambda_0 + \delta(\alpha))U(\alpha),$$
$$V(\alpha) = O(\alpha),\ \delta(\alpha) = O(\alpha).$$

证明 采用 Lyapunov-Schmitt 方法（见 Stakgold (1971)）来证明．令 $\lambda = \lambda_0 + \delta$，则

$$LU - \lambda U = L'(0)U + r(0,U) - (\lambda_0 + \delta)U,$$

因此

$$(\lambda_0 - L'(0))U = -\delta U + r(0,U). \tag{3.26}$$

由条件 H_1，当 $\|U\|$ 适当小时，

$$\|r(0,U)\| \leqslant \frac{c_0}{2}\|U\|^2. \tag{3.27}$$

令 $U=\alpha(\varphi+V)$, $\alpha\neq 0$, $V\in\mathscr{Y}$,则由 (3.25),(3.26) 得到,

$$V(\alpha)=-\delta\mathscr{A}V(\alpha)+\frac{1}{\alpha}\mathscr{A}r(0,\alpha(\varphi+V)),\quad(3.28)$$

$$\delta\varphi=\frac{1}{\alpha}\mathscr{P}r(0,\alpha(\varphi+U)).\quad(3.29)$$

把 (3.29) 改写成 $\delta\varphi=\mathscr{M}(\alpha,\delta)\varphi$,并假定

$$|\delta|\leqslant\delta_0\leqslant\frac{1}{\|\mathscr{A}\|},$$

则 (3.28) 等价于

$$V=\frac{1}{\alpha}(I+\delta\mathscr{A})^{-1}\mathscr{A}r(0,\alpha(\varphi+V))=\xi(V;\alpha,\delta).\quad(3.30)$$

下面用压缩映象原理来证明 (3.30) 的可解性. 首先,由 (3.27),存在正常数 c_1,使得对适当小的 $|\alpha|$, δ 和 $|V|$,$\|\xi(V;\alpha,\delta)\|\leqslant c_1|\alpha|$. 再对 $\|V\|\leqslant\eta\leqslant\eta_0$,选择 $c_1|\alpha|\leqslant\eta$. 于是 $\xi(V;\alpha,\delta)$ 把球 $B(0,\eta)$ 映射到自身内. 其次有

$$\|r(0,W^{(1)})-r(0,W^{(2)})\|\leqslant c_0[\|W^{(2)}\|+\frac{1}{2}\|W^{(1)}-W^{(2)}\|]\|W^{(1)}-W^{(2)}\|,$$

因此存在正常数 c_2,使得

$$\|\xi(V^{(1)};\alpha,\delta)-\xi(V^{(2)};\alpha,\delta)\|\leqslant c_2|\alpha|\|V^{(1)}-V^{(2)}\|,$$

所以当 $|\alpha|<\dfrac{1}{c_2}$ 时,ξ 是压缩算子,从而在 $B(0,\eta)$ 中存在唯一的解 $V(\alpha,\delta)$,使得 $V(\alpha)=\xi(V;c,\delta)$,并且当 δ 适当小时,一致地有

$$\|V(\alpha,\delta)\|\leqslant c_1|\alpha|.$$

下面来证明 (3.29) 的可解性. 首先可仿前证得

$$|\mathscr{M}(\alpha,\delta)|\leqslant c_3|\alpha|.$$

若 $|\delta|\leqslant\delta_1$,并选择 $c_3|\alpha|\leqslant\delta_1$,则 $\mathscr{M}(\alpha,\delta)$ 把区间 $[-\delta_1,\delta_1]$ 映射到自身内. 且有

$$|\mathscr{M}(\delta^{(1)},\alpha)-\mathscr{M}(\delta^{(2)},\alpha)|\leqslant\frac{\|\mathscr{P}\|}{|\alpha|}\|r(0,\alpha\varphi$$

$$+\alpha V(\alpha,\delta^{(1)}))-r(0,\alpha\varphi+\alpha V(\alpha,\delta^{(2)}))\|$$

$$\leqslant c_4|\alpha|\|V(\alpha,\delta^{(1)})-V(\alpha,\delta^{(2)})\|\leqslant c_5\alpha^2|\delta^{(1)}-\delta^{(2)}|,$$

所以存在正数 ε,使得当 $|\alpha|\leqslant\varepsilon$ 时,$c_5\alpha^2<1$,即 $\mathscr{M}(\delta,\alpha)$ 是一个压缩算子. 从而存在 $\delta(\alpha)$, 使得 $\delta(\alpha)=\mathscr{M}(\alpha,\ \delta(\alpha))$, 即(3.29)是可解的. 显然,还有 $\delta(\alpha)=O(\alpha)$.

另外两个著名的结果是:

定理 3.18 (Leray-Schauder) 若 L 是二次可微的全连续算子,λ_0 是 $L'(0)$ 的非零奇重特征值,则它是关于平凡解的分歧点.

定理 3.19 (Красносельский) 若 L 是全连续算子, 并且是一致可微泛函的梯度,L 在原点有二阶导数,λ_0 是 $L'(0)$ 的非零特征值,则它是关于平凡解的分歧点.

关于平凡解的分歧点的数值方法的最早工作是由 Weiss (1975) 和 Atkinson(1977) 进行的. 为方便计,设 $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_h$, L_h 是从 $\mathscr{D}\subset\mathfrak{B}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的算子,并考虑下列问题

$$L_hu_h=\lambda_hu_h. \tag{3.31}$$

我们假定下列条件成立:

H_3: 对一切 h, L_h 是全连续算子且 $L_h(0)=0$.

H_4: $\{L_h\}$ 是在 $\mathscr{D}$ 上集体紧致的算子族, 即对任一有界集 $E\subset\mathscr{D}$,集合 $\bigcup\limits_h L_h(E)$ 在 $\mathfrak{B}$ 中有紧致的闭包.

H_5: L_h 在 $\mathscr{D}$ 上是逐点收敛的,即对一切 $W\in\mathscr{D}$, 当 $h\to0$ 时,$\|L_hW-LW\|\to0$.

H_6: L_h 在 $B(0,\eta)$ 中二次可微,且对一切 h,

$$\|L''_h(W)\|\leqslant c_6.$$

H_7: 特征值问题

$$L'_h(0)V=\lambda_hV$$

可以化为等价的实矩阵的特征值问题.

今后记 $\sigma_h=\sigma(L'_h(0))/\{\lambda_h\}$, $\mathscr{N}_h$ 和 $\mathscr{Y}_h$ 分别表示 λ_h—

$L'_h(0)$ 的零空间和值域，则 $\mathfrak{B}=\mathscr{N}_h\oplus\mathscr{Y}_h$.

为了证明收敛性，先介绍 Moore(1966) 的两个引理.

引理 3.4 设 $\mathscr{F}$ 是 Banach 空间，$\{\mathscr{L}_h\}$ 是从 $\mathscr{F}$ 到 $\mathscr{F}$ 的算子族，并且满足下列条件：

(i) $\{\mathscr{L}_h\}$ 是集体紧致的；

(ii) 对任意的 $W\in E\subset\mathscr{F}$，$\{\mathscr{L}_h\}$ 是等度可微的，

那末，对一切 $W\in E$，$\{\mathscr{L}'_h(W)\}$ 是集体紧致的.

证明 设 $B^{(1)}$ 是 $\mathscr{F}$ 中的单位球，$W\in E$. 由条件 (ii)，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对一切 $V\in B^{(1)}$ 和 $\mathscr{L}_h$，都有

$$\|\delta^{-1}(\mathscr{L}_h(W+\delta V)-\mathscr{L}_h(W))-\mathscr{L}'_h(W)V\|_{\mathscr{F}}<\varepsilon\|V\|_{\mathscr{F}}<\varepsilon.$$

但是由条件 (i)，集合 $\bigcup\limits_h\delta^{-1}(\mathscr{L}_h(W+\delta V)-\mathscr{L}_h(W))$ 有紧致的闭包，或者说是全有界的. 而上述不等式又表示它是 $\bigcup\limits_h\mathscr{L}'_h(W)B^{(1)}$ 的 ε 网，从而 $\bigcup\limits_h\mathscr{L}'_h(W)$ 也在 $\mathscr{F}$ 中有紧致的闭包.

引理 3.5 设 E 是 $\mathscr{F}$ 中的开集，并且

(i) $\{\mathscr{L}_h\}$ 在 E 中等度可微；

(ii) 对一切 $W\in E$，$\{\mathscr{L}'_h(W)\}$ 是集体紧致的；

(iii) 对于在 E 中逐点收敛的拓扑而言，$\mathscr{L}$ 是在 $\{\mathscr{L}_h\}$ 的闭包之中；

那末，$\mathscr{L}$ 在 E 上可微，从而也是连续的. 又若对一切 $W\in E$，

$$\lim_{h\to0}\|\mathscr{L}_h(W)-\mathscr{L}(W)\|_{\mathscr{F}}=0,$$

则对一切 $W\in E$ 和 $V\in\mathscr{F}$，有

$$\lim_{h\to0}\|\mathscr{L}'_h(W)V-\mathscr{L}'(W)V\|_{\mathscr{F}}=0.$$

证明 对任意 $W\in E$ 和 $V\in B^{(1)}$，由条件 (ii)，$\{\mathscr{L}'_h(W)V\}$ 有聚点，记为 gV. 今选取子列，记为 $\{\mathscr{L}_{h'}(W)V\}$，它收敛到 gV. 对任意的 ρ 和 h'，则有

$$\|\mathscr{L}(W+\rho V)-\mathscr{L}(W)-\rho gV\|_{\mathscr{F}}$$

$$\leqslant \|\mathscr{L}(W+\rho V)-\mathscr{L}_{h'}(W+\rho V)\|_{\mathscr{Y}}$$
$$+\|\mathscr{L}_{h'}(W)-\mathscr{L}(W)\|_{\mathscr{Y}}+\rho\|\mathscr{L}'_{h}(W)V$$
$$-gV\|_{\mathscr{Y}}+\|\mathscr{L}_{h'}(W+\rho V)-\mathscr{L}_{h'}(W)$$
$$-\mathscr{L}'_{h'}(W)\rho V\|_{\mathscr{Y}}. \tag{3.32}$$

设有任意的 $\varepsilon>0$,由条件(i),存在 $\delta>0$,使得当 $0\leqslant\rho\leqslant\delta$ 时,上式最后一项必小于 $\varepsilon\rho$. 又令 $h'\to 0$,那末(3.32)右端的第一,二,三项都趋于零.因此得到

$$\|\mathscr{L}(W+\rho V)-\mathscr{L}(W)-\rho gV\|_{\mathscr{Y}}\leqslant\varepsilon\rho. \tag{3.33}$$

由于 ε 是任意的,因此只有一个聚点,所以可写成

$$\lim_{h\to 0}\mathscr{L}'_{h}(W)V=gV. \tag{3.34}$$

把 g 从 $B^{(1)}$ 扩充到整个 $\mathscr{F}$,且仍记为 g,于是由上式可知,g 是线性算子. 根据一致有界性定理和(3.34),g 是连续算子,而(3.33)表示 gV 是 $\mathscr{L}'(W)V$. 最后由(3.34),即得所证的第二个结论.

定理 3.20 如果条件 H_1—H_7 成立,那末

(1) 存在正常数 h_0 和 η,使得当 $h\leqslant h_0$ 时,$L'_h(0)$ 在 $[\lambda_0-\eta,\lambda_0+\eta]$ 中有唯一的特征值 λ_h,相应的特征元素记为 φ_h,$\|\varphi_h\|=1$;

(2) 存在正常数 ε,使得当 $|\alpha|\leqslant\varepsilon$ 时,存在单变量连续函数 $\delta_h(\alpha)$ 和 $v_h(\alpha)$,它们满足

$$u_h(\alpha)=\alpha(\varphi_h+v_h(\alpha)),v_h(\alpha)\in\mathscr{Y}_h,$$
$$L_h(u_h(\alpha))=(\lambda_h+\delta_h(\alpha))u_h(\alpha),$$
$$\delta_h(\alpha)=O(\alpha),\ v_h(\alpha)=O(\alpha);$$

(3) 当 $|\alpha|\leqslant\varepsilon$ 时,$\delta_h(\alpha)$ 和 $v_h(\alpha)$ 一致收敛到 $\delta(\alpha)$ 和 $V(\alpha)$;

(4) 当 $h\to 0$ 时,

$$\sup_{0<|\alpha|\leqslant\varepsilon}\frac{\|U(\alpha)-u_h(\alpha)\|}{\|U(\alpha)\|}\to 0;$$

(5) 在 $[\lambda_0-\eta,\lambda_0+\eta]$ 内,(3.31)没有其它的非平凡解.

证明 首先由引理 3.4 和 3.5,$\{L'_h(0)\}$ 是集体紧致和逐点收

敛的算子族．根据定理 2.7 一定理 2.9，存在正数 η，使得在 $[\lambda_0-\eta,\ \lambda_0+\eta]$ 内，$L'_h(0)$ 有唯一的实特征值 λ_h 和相应的特征元素 φ_h，$\|\varphi_h\|=1$，这就证明了第一个结论，并且当 $h\leqslant h_0$ 时，一致地有

$$\begin{cases}|\lambda_0-\lambda_h|=O(\|L'(0)\varphi-L'_h(0)\varphi\|),\\ \|\varphi-\varphi_h\|=O(\|L'(0)\varphi-L'_h(0)\varphi\|).\end{cases}\tag{3.35}$$

其次，对 $[\lambda_0-\eta,\lambda_0+\eta]$ 内的 λ_h，用 $\mathscr{P}_h$ 和 $\mathscr{Q}_h$ 分别表示从 $\mathfrak{B}$ 到 $\mathscr{N}_h$ 和 $\mathscr{Y}_h$ 的投影算子．由定理 2.8，

$$\mathscr{P}_hW\to\mathscr{P}W,\ \forall W\in\mathfrak{B}.\tag{3.36}$$

设 Γ 如同 (3.24) 中所示．根据定理 2.7，当 $h\leqslant h_0$ 时，σ_h 在 Γ 之内，而 λ_h 在 Γ 之外，从而对一切 $h\leqslant h_0$，$z\in\Gamma$，都存在 $(z-L'_h(0))^{-1}$，并且一致有界．进一步尚有

$$\begin{aligned}&\|(z-L'(0))^{-1}W-(z-L'_h(0))^{-1}W\|\\ &\leqslant c_7\|(L'(0)-L'_h(0))(z-L'(0))^{-1}W\|,\end{aligned}\tag{3.37}$$

其中 c_7 与 z,W 和 h 无关．由于集合 $\{(z-L'(0))^{-1}W/z\in\Gamma\}$ 是紧致的，$L'_h(0)W$ 在 $\mathfrak{B}$ 的紧致子集上一致收敛到 $L'(0)W$，所以 $(z-L'_h(0))^{-1}W$ 一致收敛到 $(z-L'(0))^{-1}W$．记

$$\mathscr{A}_h=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{1}{\lambda_h-z}(z-L'_h(0))^{-1}dz.\tag{3.38}$$

由 (3.35)，(3.37) 得到

$$\mathscr{A}_hW\to\mathscr{A}W,\ \forall W\in\mathfrak{B}.\tag{3.39}$$

根据 (3.35) 和 §2.4 中的方法可得到

$$\begin{aligned}\|\mathscr{A}_hW-\mathscr{A}W\|\leqslant c_8(&\|L'(0)\varphi-L'_h(0)\varphi\|\\ &+\max_{z\in\Gamma}\|(L'(0)-L'_h(0))(z-L'(0))^{-1}W\|),\end{aligned}$$

因此上述收敛性在 $\mathfrak{B}$ 的紧致子集上是一致的，从而由一致有界性定理得到

$$\sup_{h\leqslant h_0}\|\mathscr{A}_h\|<\infty.\tag{3.40}$$

下面设 u_h 是 (3.22) 的解，则

$$L_h(u_h)=L'_h(0)+r_h(0,u_h),$$

其中

$$\|r_h(0,u_h)\| \leqslant \frac{c_0}{2}\|u_h\|^2.$$

记 $\lambda = \lambda_h + \delta_h$，则

$$(\lambda_h - L_h'(0))u_h = -\delta_h u_h + r_h(0,u_h).$$

又令 $u_h = \alpha(\varphi_h + v_h)$，$v_h \in \mathscr{Y}_h$，$\alpha \neq 0$，并假定

$$|\delta_h| \leqslant \delta_0 < \frac{1}{\sup\limits_{h\leqslant h_0}\|\mathscr{A}_h\|},$$

则得到

$$\begin{cases} v_h = \dfrac{1}{\alpha}(I+\delta_h\mathscr{A}_h)^{-1}\mathscr{A}_h r_h(0,\alpha(\varphi_h+v_h)) = \xi_h(v_h;\alpha,\delta_h), \\ \delta_h\varphi_h = \dfrac{1}{\alpha}\mathscr{P}_h r_h(0,\alpha(\varphi_h+v_h)) \equiv \mathscr{M}_h(\alpha,\delta_h)\varphi_h. \end{cases}$$

到此，即可仿照定理 3.17 证明本定理的第二个结论.

第三，根据条件 H_1—H_6 和 (3.36)，(3.39)，(3.40) 以及集体紧致算子族的理论，若 $\mathscr{D}'$ 是充分接近原点的紧致集合，$W \in \mathscr{D}'$，α，δ 充分小，则当 $h \to 0$ 时，$\xi_h(W;\alpha,\delta) \to \xi(W;\alpha,\delta)$，$\mathscr{M}_h(\alpha,\delta) \to \mathscr{M}(\alpha,\delta)$，从而当 $|\alpha| \leqslant \eta$ 和 $h \to 0$ 时，一致地有 $\delta_h(\alpha) \to \delta(\alpha)$ 和 $v_h(\alpha) \to V(\alpha)$，这就证明了第三个结论.

第四，因为当 $|\alpha|$ 充分小时，

$$\|U(\alpha)\| \geqslant |\alpha|(\|\varphi\| - \|V\|) \geqslant \frac{|\alpha|}{2},$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{\|U(\alpha) - u_h(\alpha)\|}{\|U(\alpha)\|} &\leqslant \frac{2}{|\alpha|}\|U(\alpha) - u_h(\alpha)\| \\ &\leqslant 2(\|\varphi - \varphi_h\| + \|V - v_h\|), \end{aligned}$$

这就证明了第四个结论.

第五个结论是显然的.

如果 L_h' 还具有一些附加性质，则可得到更精细的结果. 也可以把上述方法推广到非单重特征值的情况. 但一般说来，第四个结论不成立(见 Atkinson(1977)).

关于 (3.21) 的对于非平凡解的分歧点理论，则要复杂得多，

一种最简单的情况是转向点（Turning point），亦即满足下列条件的 (λ_0, U_0)，

(i) $G(\lambda_0, U_0) = 0$；

(ii) $G'_U(\lambda_0, U_0)$ 和它的共轭算子 $(G'_U(\lambda_0, U_0))^*$ 的零空间都是一维的，其中 G'_U 表示 G 对 U 的 Fréchet 导数；

(iii) $G'_U(\lambda_0, U_0)$ 的值域是闭的，

(iv) $G'_\lambda(\lambda_0, U_0)\psi \neq 0$，其中 ψ 是 $(G'_U(\lambda_0, U_0))^*$ 的零空间的基.

Keller(1977) 证明，在上述条件下，(3.21) 有通过 (λ_0, U_0) 的唯一的解曲线 $(\lambda(\alpha), U(\alpha))$.

关于特殊方程的转向点的数值计算工作可见 Simpson(1972), Mooney, Voss, Werner (1979), Sprekels (1980), Spence, Moore (1980) 以及 Moore, Spence(1980b). 最近，Moore, Spence(1981) 建立了转向点计算的一般性理论. Moore(1980) 还研究了一般的对非平凡解的分歧点的计算.

此外，Mittelmann, Weber(1980) 介绍了分歧点计算的进展情况. 有关的材料还有 Simpson (1975), Keller (1977), Menzel, chwetlick(1978), Seydel(1979) 和 Moore, Spence(1980a).

§4 差分格式稳定性的常用判别法

在上节中研究了稳定性和收敛性，以及两者的联系. 为了具体判别一个差分格式的稳定性，还应选择合适的范数和判别法.

对于常系数方程适定的或不适定的初值问题，最常用的方法是 Fourier 分析，它把格式的稳定性问题归结为代数问题，从而得到稳定性的一些充要条件或充分条件. 能量方法也是经常使用的方法，它来自物理中的能量守恒律，并可应用于线性或非线性的各类定解问题，其缺点是不能给出稳定性的必要条件. 另外还有单调矩阵方法和离散 Green 函数方法等，对于某些问题，它们也是相当有效的. 在本节中，我们将逐一地介绍这些方法.

4.1 线性初值问题的 Fourier 方法

若 (2.1) 是常系数方程的初值问题，则可应用 Fourier 分析方法研究稳定性. 关于这方面的早期工作可见 Von Neumann, Goldstine (1947), Von Neumann, Richtmyer (1950) 和 O'Brien, Hyman, Kaplan(1951). Richtmyer, Morton(1967) 则对此作了完整的总结.

设 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^*$, $\mathscr{B}$ 是 Hilbert 空间，它的每个元素都是变量 x 的 p 维向量函数，记为 $U(x)$，那末 (2.1) 的解是向量函数 $U(x, t)$. 设 $d=(d_1, d_2, \cdots d_n)^*$, $Q_d=\{x/0 \leqslant x_m \leqslant d_m, 1 \leqslant m \leqslant n\}$. 如果 $U(x, t) \in L^2(Q_d)$，且在 x_m 方向有周期 d_m，则可展开为

$$U(x, t)=\left(\frac{1}{d_1 d_2 \cdots d_n}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\beta \in \mathfrak{M}} \hat{U}(\beta, t) e^{i \beta \cdot x}, \tag{4.1}$$

其中 $\beta=(\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n)$, $\mathfrak{M}$ 是网格点的集合，它使得 β_m 取遍所有值 $\frac{2\pi r_m}{d_m}$，其中 r_m 是整数，$\hat{U}(\beta, t)$ 是 Fourier 系数:

$$\hat{U}(\beta, t)=\left(\frac{1}{d_1 d_2 \cdots d_n}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^d U(x, t) e^{-i \beta \cdot x} d x,$$

并成立下列 Parseval 等式

$$\|U(t)\|_{L^2(Q_d)}^2=\int_0^d|U(x, t)|^2 d x=\sum_{\beta \in \mathfrak{M}}|\hat{U}(\beta, t)|^2 .$$

设 $q=(q_1, q_2, \cdots q_n)^*$, $P(q)$ 是 $p \times p$ 阶矩阵，其元素是 $q_1, q_2, \cdots q_n$ 的多项式. 今用 $\frac{\partial}{\partial x_m}$ 代替 q_m，即得到 $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$，它是常系数偏微分算子 L 的一般形式. 若 η 是一个常向量，那末

$$L(\eta e^{i \beta \cdot x})=P(i \beta) \eta e^{i \beta \cdot x} .$$

如果 (4.1) 是 (2.1) 的解，则

$$\frac{d}{d t} \hat{U}(\beta, t)=P(i \beta) \hat{U}(\beta, t),$$

并由此得到

$$\hat{U}(\beta, t) = e^{tP(i\beta)}\hat{U}(\beta, 0),$$

以及

$$U(x, t) = \left(\frac{1}{d_1 d_2 \cdots d_n}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\beta \in \mathfrak{M}} e^{tP(i\beta)} e^{i\beta \cdot x} \hat{U}(\beta, 0). \qquad (4.2)$$

上述方法同样适用于差分格式 (2.3)，此时 $A(\tau)$，$B(\tau)$ 和 $C(\tau)$ 都是 $p \times p$ 阶矩阵．用 $u^k(x)$ 表示 (2.3) 的解，T^σ 表示位移算子，即当 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$ 时，

$$T^\sigma u^k(x) = u^k(x_1 + \sigma_1 h_1, x_2 + \sigma_2 h_2, \cdots, x_n + \sigma_n h_n),$$

于是 (2.3) 可改写为

$$\sum_{\sigma \in N_A} A^\sigma(\tau) T^\sigma u^{k+1}(x) = \sum_{\sigma \in N_B} B^\sigma(\tau) T^\sigma u^k(x), \qquad (4.3)$$

其中 $A^\sigma(\tau)$ 和 $B^\sigma(\tau)$ 是 $p \times p$ 阶常系数矩阵，N_A 和 N_B 是某些 σ 的集合，而 $|\sigma_m|$ 小于某固定正数．

把 $u^k(x)$ 的 Fourier 展开式

$$u^k(x) = \left(\frac{1}{d_1 d_2 \cdots d_n}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\beta \in \mathfrak{M}} \hat{u}^k(\beta, \tau) e^{i\beta \cdot x}$$

代入 (4.3)，即得到

$$\sum_{\beta \in \mathfrak{M}} \left(\sum_{\sigma \in N_A} A^\sigma(\tau) W(\beta, \sigma, h)\right) \hat{u}^{k+1}(\beta, \tau) e^{i\beta \cdot x}$$

$$= \sum_{\beta \in \mathfrak{M}} \left(\sum_{\sigma \in N_B} B^\sigma(\tau) W(\beta, \sigma, h)\right) \hat{u}^k(\beta, \tau) e^{i\beta \cdot x},$$

其中

$$W(\beta, \sigma, h) = e^{i \sum_{m=1}^{n} \beta_m \sigma_m h_m}.$$

所以对每一个 β，都成立 $H_A(\beta, \tau)\hat{u}^{k+1}(\beta, \tau) = H_B(\beta, \tau)\hat{u}^k(\beta, \tau)$，其中

$$H_A(\beta, \tau) = \sum_{\sigma \in N_A} A^\sigma(\tau) W(\beta, \sigma, h),$$

$$H_B(\beta, \tau) = \sum_{\sigma \in N_B} B^\sigma(\tau) W(\beta, \sigma, h).$$

假定 $H_A(\beta,\tau)$ 可逆，则记 $G(\beta,\tau)=H_A^{-1}(\beta,\tau)H_B(\beta,\tau)$，它被称为增长矩阵，于是有

$$\hat{u}^{k+1}(\beta,\tau)=G(\beta,\tau)\hat{u}^k(\beta,\tau). \tag{4.4}$$

从而

$$\hat{u}^k(\beta,\tau)=(G(\beta,\tau))^k\hat{u}^0(\beta,\tau).$$

所以

$$\|u^k\|_{l^2}^2=\sum_{\beta\in\mathfrak{M}}|\hat{u}^k(\beta,\tau)|^2=\sum_{\beta\in\mathfrak{M}}|(G(\beta,\tau))^k\hat{u}^0(\beta,\tau)|^2,$$

$$\|u^0\|_{l^2}^2=\sum_{\beta\in\mathfrak{M}}|\hat{u}^0(\beta,\tau)|^2.$$

下面来揭示稳定性与 $(G(\beta,\tau))^k$ 的关系. 设 $\mathscr{L}$ 是一个线性算子，并且 $\mathscr{L}\eta(\beta)=M(\beta)\eta(\beta)$，其中 $M(\beta)$ 是 $p\times p$ 阶矩阵. 用 $\|M(\beta)\|$ 表示矩阵范数，即

$$\|M(\beta)\|=\max_{|\eta|\neq 0}\frac{|M(\beta)\eta|}{|\eta|},$$

则

$$\|\mathscr{L}\|=\max_{\beta\in\mathfrak{M}}\|M(\beta)\|. \tag{4.5}$$

由此即得到下列结果.

定理 4.1 差分格式 (4.3) 对初值按 l^2 范数稳定的充要条件是存在正数 τ_0 和 c_1，使得当 $\tau\leqslant\tau_0$ 时，对所有 β 和 $k\tau\leqslant T$，一致地有

$$\|(G(\beta,\tau))^k\|\leqslant c_1.$$

根据定理 4.1，差分格式的稳定性问题可以归结为矩阵幂的一致有界性问题，这是一个线性代数问题. 设 $G(\beta,\tau)$ 的特征值，特征向量和谱半径分别是 $\lambda^{(l)}(G(\beta,\tau))$，$\eta^{(l)}(G(\beta,\tau))$ 和 $\rho(G(\beta,\tau))$，通常简记为 $\lambda^{(l)}(G)$，$\eta^{(l)}(G)$ 和 $\rho(G)$. 若 $|\lambda^{(l_0)}|=\max\limits_{1\leqslant l\leqslant p}|\lambda^{(l)}(G)|$，则

$$\rho(G)=|\lambda^{(l_0)}(G)|=\frac{|G(\beta,\tau)\eta^{(l_0)}|}{|\eta^{(l_0)}|}\leqslant\|G(\beta,\tau)\|, \tag{4.6}$$

另一方面则有

$$\|(G(\beta,\tau))^2\| \leqslant \max_{|\zeta|\neq 0} \frac{|G(\beta,\tau)\zeta|}{|\zeta|}\frac{|G(\beta,\tau)\eta|}{|\eta|} \leqslant \|G(\beta,\tau)\|^2.$$

一般地有

$$(\rho(G))^k \leqslant \|(G(\beta,\tau))^k\| \leqslant \|G(\beta,\tau)\|^k. \tag{4.7}$$

定理 4.2 差分格式 (4.3) 按 l^2 范数对初值稳定的必要条件是当 $\tau \leqslant \tau_0$ 时,对一切 β 和 l 成立

$$|\lambda^{(l)}(G)| \leqslant 1 + O(\tau). \tag{4.8}$$

证明 若格式是稳定的,则当 $\tau \leqslant \tau_0$, $k\tau \leqslant T$ 时,

$$\|(G(\beta,\tau))^k\| \leqslant c_1.$$

由 (4.7) 得到

$$(\rho(G(\beta,\tau)))^k \leqslant c_1.$$

不失一般性,可设 $c_1 \geqslant 1$,于是对一切 $k \leqslant \frac{T}{\tau}$,

$$\rho(G(\beta,\tau)) \leqslant c_1^{\frac{1}{k}},$$

即对一切 l 都有

$$|\lambda^{(l)}(G(\beta,\tau))| \leqslant \rho(G(\beta,\tau)) \leqslant c_1^{\frac{\tau}{T}} = 1 + O(\tau).$$

条件 (4.8) 被称为 Von Neuman 条件. 今后为方便计,用"格式稳定"来代替"格式按 l^2 范数对初值稳定"这句话. 下面先给出四个稳定性的充分条件.

定理 4.3 若当 $\tau \leqslant \tau_0$ 时,对一切 β 都有 $\|G(\beta,\tau)\| \leqslant 1 + O(\tau)$,则 (4.3) 是稳定的.

证明 这是 (4.7) 的直接推论.

定理 4.4 如果对一切 β 和 τ, $G(\beta,\tau)$ 都是规范矩阵,那末 Von Neumann 条件是 (4.3) 稳定的充要条件.

证明 若 $G(\beta,\tau)$ 是规范矩阵,则存在完全正交的特征向量系 $\{\eta^{(l)}(G)\}$. 对任一向量 η,我们有

$$\eta = \sum_{l=1}^{p} c^{(l)}\eta^{(l)}, \quad c^{(l)} = (\eta^{(l)}, \eta^{(l)})_{l^2},$$

从而得到

$$\|G(\beta,\tau)\| = \max_{|c|\neq 0}\sqrt{\frac{\sum_{l=1}^{p}|c^{(l)}\lambda^{(l)}(G)|^2}{\sum_{l=1}^{p}|c^{(l)}|^2}} \leqslant \rho(G),$$

故由定理 4.1 和 4.3 得到本定理的结论.

特别当 $p=1$ 时, Von Neumann 条件是格式 (4.3) 稳定的充要条件.

定理 4.5 如果存在非奇异阵 $T(\beta,\tau)$,使得

$$T^{-1}(\beta,\tau)G(\beta,\tau)T(\beta,\tau) = \Lambda(\beta,\tau),$$

其中 $\Lambda(\beta,\tau)$ 是对角阵,并且存在与 β,τ 无关的正常数 c_2, 使得当 $\tau\leqslant\tau_0$ 时,

$$\|T(\beta,\tau)\| \leqslant c_2,\quad \|T^{-1}(\beta,\tau)\| \leqslant c_2,$$

那末 Von Neumann 条件是格式 (4.3) 稳定的充要条件.

证明 此时有

$$G(\beta,\tau) = T(\beta,\tau)\Lambda(\beta,\tau)T^{-1}(\beta,\tau).$$

若 Von Neumann 条件满足, 则 Λ 的对角线元素的绝对值不超过 $1+O(\tau)$. 由于

$$(G(\beta,\tau))^k = T(\beta,\tau)\Lambda^k(\beta,\tau)T^{-1}(\beta,\tau),$$

所以当 $\tau\leqslant\tau_0$, $k\tau\leqslant T$ 时,

$$\|(G(\beta,\tau))^k\| \leqslant c_2^2(1+O(\tau))^k \leqslant c_3.$$

定理 4.6 如果 $G(\beta,\tau)$ 有完全的特征向量系 $\{\eta^{(l)}(G)\}$, 而且存在与 β,τ 无关的正数 δ, 使得 $\{\eta^{(l)}(G)\}$ 的 Gram 行列式的绝对值大于 δ,那末,Von Neumann 条件是格式 (4.3) 稳定的充要条件.

证明 把 $\{\eta^{(l)}(G)\}$ 排列成矩阵 $T(\beta,\tau)$,其元素为 $T_{\mu j}(\beta,\tau)$, $1\leqslant\mu,\ j\leqslant p$,于是

$$T^{-1}(\beta,\tau)G(\beta,\tau)T(\beta,\tau) = \Lambda(\beta,\tau),$$

其中 $\Lambda(\beta,\tau)$ 是对角阵. 若 Von Neumann 条件满足,则其全部元素的绝对值不超过 $1+O(\tau)$.

假定 $\{\eta^{(l)}(G)\}$ 已规范化,则 $|T_{\mu j}(\beta,\tau)|\leqslant 1$. 又由 Schwartz

不等式，得

$$\left|\sum_{j=1}^{p} T_{\mu j}(\beta,\tau)\eta_j\right|^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{p} |\eta_j|^2\right)$$

$$\cdot\left(\sum_{j=1}^{p} |T_{\mu j}(\beta,\tau)|^2\right) \leqslant p|\eta|^2,$$

因此 $\|T(\beta,\tau)\| \leqslant p$.

另一方面，由 Gramer 法则，$T^{-1}(\beta,\tau)$ 的元素 $T^{-1}_{\mu j}(\beta,\tau)$ 等于代数余子式 $\tilde{T}_{j\mu}(\beta,\tau)$ 与行列式 $\mathrm{Det}(T(\beta,\tau))$ 的比．但由 Hadamard 不等式(见 Courant, Hilbert(1953))，一个矩阵的行列式的绝对值不超过相应矩阵各行(或各列)所对应的向量的长度的乘积．因此由于代数余子式所对应的矩阵的每一列的长度不超过 1，故得到

$$|T^{-1}_{\mu j}(\beta,\tau)| \leqslant \frac{1}{\delta},$$

从而

$$\|T^{-1}(\beta,\tau)\| \leqslant \frac{p}{\delta},$$

最后应用定理 4.5，则可得出结论．

例 4.1 考虑下列二阶双曲型方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty,\ 0 < t \leqslant T, \\ \dfrac{\partial U}{\partial t}(x,0) = U_1(x), & -\infty < x < \infty, \\ U(x,0) = U_0(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases} \tag{4.9}$$

其中 $U_0(x)$, $U_1(x)$ 满足同样的周期条件。令

$$V(x,t) = \int_{(0,0)}^{(x,t)} \frac{\partial U}{\partial x} dt + \frac{\partial U}{\partial t} dx,$$

并把 (4.9) 化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial V}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial V}{\partial t} = \dfrac{\partial U}{\partial x}. \end{cases} \tag{4.10}$$

今用下列格式来计算 (4.10).

$$
\begin{cases}
\dfrac{u^{k+1}(x)-u^k(x)}{\tau} \\
= \dfrac{v^k\left(x+\dfrac{h}{2}\right)-v^k\left(x-\dfrac{h}{2}\right)+v^{k+1}\left(x+\dfrac{h}{2}\right)-v^{k+1}\left(x-\dfrac{h}{2}\right)}{2h}, \\
\dfrac{v^{k+1}\left(x-\dfrac{h}{2}\right)-v^k\left(x-\dfrac{h}{2}\right)}{\tau} \\
= \dfrac{u^{k+1}(x)-u^{k+1}(x-h)+u^k(x)-u^k(x-h)}{2h}.
\end{cases}
\tag{4.11}
$$

可按 (4.4) 来计算 $G(\beta,\tau)$，但通常用分离变量法来计算 $G(\beta,\tau)$ 更方便些，也就是说，令

$$
\begin{cases}
u^k(x) = \sum\limits_{\beta\in\mathfrak{R}} \hat{u}^k(\beta,\tau)e^{i\beta x}, \\
v^k(x) = \sum\limits_{\beta\in\mathfrak{R}} \hat{v}^k(\beta,\tau)e^{i\beta x},
\end{cases}
$$

把它们代入 (4.11)，即得到

$$
\begin{cases}
\hat{u}^{k+1}(\beta,\tau) - ia\hat{v}^{k+1}(\beta,\tau) = \hat{u}^k(\beta,\tau) + ia\hat{v}^k(\beta,\tau), \\
-ia\hat{u}^{k+1}(\beta,\tau) + \hat{v}^{k+1}(\beta,\tau) = ia\hat{u}^k(\beta,\tau) + \hat{v}^k(\beta,\tau),
\end{cases}
$$

其中 $a=\dfrac{\tau}{h}\sin\dfrac{\beta h}{2}$，因此

$$
G(\beta,\tau) = \begin{pmatrix} 1 & -ia \\ -ia & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & ia \\ ia & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1-a^2 & 2ia \\ 2ia & 1-a^2 \end{pmatrix}.
$$

它的特征值满足

$$
[1-a^2-(1+a^2)\lambda(G)]^2+4a^2=0,
$$

所以

$$
\lambda^{(1)}(G) = \frac{1-a^2+2ia}{1+a^2}, \quad \lambda^{(2)}(G) = \frac{1-a^2-2ia}{1+a^2}.
$$

显然有 $|\lambda^{(1)}(G)| = |\lambda^{(2)}(G)| = 1$，即满足 Von Neumann 条件。又由于

$$
G^{-1}(\beta,\tau) = \begin{pmatrix} 1 & ia \\ ia & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -ia \\ -ia & 1 \end{pmatrix} = G^*(\beta,\tau),
$$

所以 $G(\beta,\tau)$ 是酉阵，从而一定是规范阵. 根据定理 4.4，格式 (4.11) 是稳定的.

研究差分格式稳定性的另一个重要途径是研究矩阵族 $\mathscr{F}$ 的稳定性. 所谓 $p\times p$ 阶矩阵族 $\mathscr{F}$ 的稳定性是指存在这样的正常数 c_4，使得对一切 $A\in\mathscr{F}$ 和正整数 ν，都有

$$\|A^\nu\|\leqslant c_4. \tag{4.12}$$

矩阵族 $\mathscr{F}$ 的稳定性与 $(G(\beta,\tau))^k$ 的一致有界性密切相关. 事实上，若当 $\tau\leqslant\tau_0$，$k\tau\leqslant T$ 时，$\|(G(\beta,\tau))^k\|\leqslant c_1$，那末可令 $\alpha=\dfrac{1}{T}\log c_1$，并考虑矩阵族 $\mathscr{F}=\{e^{-\alpha\tau}G(\beta,\tau)\}$. 由于对任意 ν，总有 $\nu=\dfrac{mT}{\tau}+k$，$0\leqslant k\tau\leqslant T$，从而得到

$$\begin{aligned}\|(e^{-\alpha\tau}G(\beta,\tau))^\nu\|&\leqslant\|(e^{-\alpha\tau}G(\beta,\tau))^{\frac{T}{\tau}}\|^m\|(e^{-\alpha\tau}G(\beta,\tau))^k\|\\&\leqslant c_1^{-m-\frac{k\tau}{T}}\|(G(\beta,\tau)^{\frac{T}{\tau}}\|^m\|(G(\beta,\tau))^k\|\leqslant c_1^{1-\frac{k\tau}{T}},\end{aligned}$$

即 $\mathscr{F}$ 是稳定的.

反之，若 $\mathscr{F}$ 是稳定的，那末对一切 $\tau\leqslant\tau_0$ 及 $k\tau\leqslant T$，都有

$$\|(G(\beta,\tau))^k\|\leqslant c_4e^{\alpha k\tau}\leqslant c_4e^{\alpha T},$$

因此 $\|(G(\beta,\tau))^k\|$ 是一致有界的.

由于 ν 是任意的正整数，为了使 $\{e^{-\alpha\tau}G(\beta,\tau)\}$ 稳定，它的全部特征值都必须满足 $|\lambda^{(i)}(e^{-\alpha\tau}G)|\leqslant1$，从而有 $|\lambda^{(i)}(G)|\leqslant e^{\alpha\tau}=1+O(\tau)$，这样就再次得到了 Von Neumann 条件.

Kreiss(1962) 证明了下列基本定理:

定理 4.7 下面四个性质是等价的，

(i) 矩阵族 $\mathscr{F}$ 是稳定的;

(ii) 存在正常数 c_R，使得对一切 $A\in\mathscr{F}$ 和 $|z|>1$，预解式 $(A-zI)^{-1}$ 存在，并且

$$\|(A-zI)^{-1}\|\leqslant\frac{c_R}{|z|-1}; \tag{4.13}$$

(iii) 存在正数 c_S 和 c_B，并且对每个 $A\in\mathscr{F}$，都存在非奇异阵 S，使得 $\|S\|\leqslant c_S$，$\|S^{-1}\|\leqslant c_S$，$B=SAS^{-1}$，其中 B 是上三角

阵，

$$B=\begin{pmatrix}\kappa_1 & B_{12}\cdots B_{1p}\\ 0 & \kappa_2\ \cdots B_{2p}\\ \cdots\cdots\cdots\\ 0\ 0 & \cdots\kappa_p\end{pmatrix},$$

$$|B_{lj}|\leqslant c_B\min(1-|\kappa_l|,1-|\kappa_j|); \tag{4.14}$$

(iv) 存在正常数 $c_H>0$，并且对每一个 $A\in\mathscr{F}$，都存在一个正定 Hermite 阵 H，使得

$$c_H^{-1}I\leqslant H\leqslant c_H I, \tag{4.15}$$

$$A^*HA\leqslant H. \tag{4.16}$$

证明 我们采用循环论证的方法．由于由 (ii) 推出 (iii) 的过程比较复杂，所以放在最后进行，并采用 Morton, Schechter (1965) 的方法．

先由 (i) 推出 (ii)．若 $\mathscr{F}$ 是稳定的，则 $|\lambda^{(l)}(A)|\leqslant 1$，所以当 $|z|>1$ 时，$(A-zI)^{-1}$ 存在，并且

$$\|(A-zI)^{-1}\|=\left\|\sum_{\nu=0}^{\infty}A^\nu z^{-\nu-1}\right\|$$

$$\leqslant c_4\sum_{\nu=0}^{\infty}|z|^{-\nu-1}\leqslant c_4(|z|-1)^{-1},$$

因此 (4.13) 成立，且 $c_R\leqslant c_4$．

再由 (iii) 推出 (iv)．引进对角矩阵

$$D=\begin{pmatrix}d & & 0\\ & d^2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & d^p\end{pmatrix},\quad d>1,$$

那末可选择适当大的 d，使得

$$D-B^*DB\geqslant 0, \tag{4.17}$$

亦即

$$M=I-(D^{-\frac{1}{2}}B^*D^{\frac{1}{2}})(D^{\frac{1}{2}}BD^{-\frac{1}{2}})\geqslant 0.$$

事实上，$D^{\frac{1}{2}}BD^{-\frac{1}{2}}$ 的第 (l,j) 位置上的元素是 $d^{\frac{1}{2}(l-j)}B_{lj}$，因此

$$M_{ll} = 1 - \sum_{k=1}^{l} |B_{kl}|^2 d^{k-l} = 1 - |\kappa_l|^2 + \varepsilon_l,$$

其中,由 (4.14) 得到

$$|\varepsilon_l| = \sum_{k=1}^{l-1} |B_{kl}|^2 d^{k-l} \leqslant \frac{c_B^2}{d-1}(1 - |\kappa_l|)^2,$$

而M中第 l 行非对角线元素的绝对值的和是

$$\delta_l = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant p\\ j\neq l}} |M_{lj}| = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant p\\ j\neq l}} \sum_{1\leqslant k\leqslant p} |B_{kl}||B_{kj}| d^{\frac{2k-l-j}{2}}.$$

由于B是上三角阵,所以当 $k>\min(l, j)$ 时,和式中对应的项是零,所以当 $l\neq j$ 时,仅对 $2k-l-j\leqslant -1$ 的项才有 $|B_{kl}||B_{kj}|\neq 0$。由于$|B_{kl}|\leqslant c_B(1-|\kappa_l|)$, $|B_{kj}|\leqslant c_B$,所以

$$\begin{aligned}
\delta_l &\leqslant \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant p\\ j\neq l}} \sum_{k=1}^{\frac{l+j-1}{2}} c_B^2(1-|\kappa_l|) d^{\frac{2k-l-j}{2}}\\
&\leqslant c_B^2(1-|\kappa_l|) \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant p\\ j\neq l}} \frac{d}{d-1}\left(d^{-\frac{1}{2}} - d^{-\frac{l+j}{2}}\right)\\
&\leqslant c_B^2(1-|\kappa_l|)\frac{2pd^{\frac{1}{2}}}{d-1},
\end{aligned}$$

因此当 d 充分大时,

$$\delta_l + |\varepsilon_l| \leqslant 1 - |\kappa_l|^2. \tag{4.18}$$

由 Gerschgorin 定理 (1931),矩阵M的特征值满足不等式

$$|\lambda(M) - M_{ll}| \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant p\\ j\neq l}} |M_{lj}|,$$

所以由 (4.18) 得到 $\lambda(M)\geqslant 0$. 由于M是 Hermite 阵,因而M是非负矩阵. 由(iii)的条件,$B = SAS^{-1}$,故 (4.17) 可改写为

$$(S^{-1})^* A^* S^* DSAS^{-1} - D \leqslant 0.$$

令 $H = S^*DS$,它是 Hermite 阵,并由上式得到

$$A^*HA - H \leqslant 0.$$

这样就满足了 (4.16). 取 $c_H = d^p c_s^2$,则 (4.15) 也成立,从而完成了由 (iii) 推出 (iv) 的证明.

下面由 (iv) 推出 (i). 我们记 $w_\nu = Aw_{\nu-1} = A^\nu w_0$, 于是由 (4.16) 得到

$$w_\nu^* H w_\nu = w_{\nu-1}^* A^* H A w_{\nu-1} \leqslant w_{\nu-1}^* H w_{\nu-1} \leqslant \cdots \leqslant w_0^* H w_0.$$

根据 (4.15),

$$|w_\nu|^2 \leqslant c_H^2 |w_0|^2,$$

从而 $\|A^\nu\| \leqslant c_H$,即 $\mathscr{F}$ 是稳定的.

最后由 (ii) 推出 (iii),我们分六步来证明它.

首先, 任何一个非奇异矩阵都可经过酉变换成为上三角阵. 由于酉矩阵及其逆的范数都为 1, 所以经过酉变换后的矩阵仍满足预解条件,因而可直接假定 A 已是上三角阵形式,即

$$A = \begin{pmatrix} \kappa_1 & A_{12} \cdots A_{1p} \\ 0 & \kappa_2 \cdots A_{2p} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 0 & \cdots\cdots \kappa_p \end{pmatrix}.$$

第二,设 M 是一个上三角阵

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix},$$

若对一切 v_1, v_2, 都有

$$\left|\begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right| \leqslant \alpha \left|\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right|,$$

则

$$|M_1^{-1} v_1| \leqslant \alpha |v_1|.$$

因此, 由 A 中相邻的行和列的元素所组成的主子式也同样满足 (4.13). 由于矩阵

$$\begin{pmatrix} \kappa_l - z & A_{l,l+1} \\ 0 & \kappa_{l+1} - z \end{pmatrix}^{-1}$$

的右上角元素是 $-A_{l,l+1}/(\kappa_l - z)(\kappa_{l+1} - z)$,故由上面的论证过程得到

$$|A_{l,l+1}| \leqslant c_R \frac{|z - \kappa_l||z - \kappa_{l+1}|}{|z| - 1}. \qquad (4.19)$$

第三,(4.19) 可改进为

$$|A_{l,l+1}| \leqslant 16c_R\max\{1-|\kappa_{l+1}|, |\kappa_l-\kappa_{l+1}|\}. \quad (4.20)$$

事实上,若 $|\kappa_{l+1}| \leqslant \frac{1}{2}$,则在 (4.19) 中令 $z=3$ 后得到 $|A_{l,l+1}| \leqslant 8c_R$. 由于 $1-|\kappa_{l+1}| \geqslant \frac{1}{2}$,因此 (4.20) 成立. 若 $|\kappa_{l+1}| \geqslant \frac{1}{2}$,则令 $z=\frac{t}{\kappa_{l+1}}$,从而由 (4.19) 得到

$$|A_{l,l+1}| \leqslant c_R \frac{(t-|\kappa_{l+1}|^2)|t-\kappa_l\bar{\kappa}_{l+1}|}{|\kappa_{l+1}|\,|t-|\kappa_{l+1}||}.$$

令 $t\to 1$,即得到

$$\begin{aligned}|A_{l,l+1}| &\leqslant \frac{c_R}{|\kappa_{l+1}|}(1+|\kappa_{l+1}|)|1-\kappa_l\bar{\kappa}_{l+1}| \\ &\leqslant 4c_R|1-\kappa_l\bar{\kappa}_{l+1}|. \end{aligned} \quad (4.21)$$

由于 $|\kappa_l| \leqslant 1$,所以

$$\begin{aligned}|1-\kappa_l\bar{\kappa}_{l+1}| &= |1-|\kappa_{l+1}|^2+\bar{\kappa}_{l+1}(\kappa_{l+1}-\kappa_l)| \\ &\leqslant 3\max(1-|\kappa_{l+1}|, |\kappa_l-\kappa_{l+1}|). \end{aligned} \quad (4.22)$$

把上式代入 (4.21),即知此时 (4.20) 也成立. 稍稍改变一下上面的推导过程,可把 (4.20) 中的 $1-|\kappa_{l+1}|$ 换为 $1-|\kappa_l|$,因此

$$|A_{l,l+1}| \leqslant 16c_R\max(\gamma_{l,l+1}, |\kappa_l-\kappa_{l+1}|), \quad (4.23)$$

其中

$$\gamma_{l,j}=\min(1-|\kappa_l|, 1-|\kappa_j|).$$

第四步证明可用非奇异阵 S,把 A 相似变换成 $B=SAS^{-1}$,并且

$$|B_{l,l+1}| \leqslant c_B\min(1-|\kappa_l|,\ 1-|\kappa_{l+1}|),\ c_B=16c_R. \quad (4.24)$$

事实上,若 $\gamma_{l,l+1} \geqslant |\kappa_l-\kappa_{l+1}|$,则 (4.23) 蕴含了 (4.24),所以可取 $S=I$. 否则,作矩阵 $T^{(l,j)}$,它的第 l 行第 j 列元素是$\frac{A_{lj}}{\kappa_l-\kappa_j}$,而其余元素全为零. 又记

$$S^{(l,j)}=I+T^{(l,j)},\ (S^{(l,j)})^{-1}=I-T^{(l,j)},$$

于是 $S^{(l,j)}A(S^{(l,j)})^{-1}$ 的第 (l, j) 位置上的元素为零 $(l<j)$. 由

(4.23)，对一切 $A\in\mathscr{F}$，

$$\|S^{(l,l+1)}\|\leqslant 1+\|T^{(l,l+1)}\|\leqslant 1+16c_R,$$

$$\|(S^{(l,l+1)})^{-1}\|\leqslant 1+16c_R.$$

现在依次对第一上对角线上这样的元素进行相似变换，就使得(4.24) 对一切 l 都成立，并且 $c_l\leqslant(1+16c_R)^{p-1}$.

第五步要证明下面的引理

引理 4.1 如果 $m\times m$ 阶上三角阵 A 满足预解条件

$$\|(A-zI)^{-1}\|\leqslant\frac{c_5}{|z|-1},\quad |z|>1,$$

并且除去 A_{1m} 外，全部非对角线元素都满足 $|A_{lj}|\leqslant c_6\gamma_{lj}$，那末，

$$|A_{1m}|\leqslant 16c_5(1+(m-2)c_6^2)^{\frac{1}{2}}\max(\gamma_{1m},|\kappa_1-\kappa_m|).$$

下面来证明引理. 若 $m=2$，由 (4.23) 即得所证. 下面设 $m>2$，并把 $(A-zI)$ 的第二行与第 m 行对调，再把第二列与第 m 列对调，这种变换是相似变换，所以预解条件不变. 但此时 $A-zI$ 被变为

$$E=\begin{pmatrix}E_1 & E_2\\ E_3 & E_4\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc|c}\xi_1 & A_{1m} & A_{13}\cdots A_{12}\\ 0 & \xi_m & 0\cdots 0\\ \hline 0 & A_{3m} & \\ \vdots & \vdots & E_4\\ 0 & A_{2m} & \end{array}\right),\quad \xi_l=\kappa_l-z.$$

由于 $E_3E_2=0$，$E_3E_1^{-1}E_2=0$，因此 $E=LU$，其中

$$L=\begin{pmatrix}I_2 & 0\\ E_3E_1^{-1} & I_{m-2}\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}E_1 & E_2\\ 0 & E_4\end{pmatrix}. \tag{4.25}$$

于是

$$|E^{-1}u|^2=(E^{-1}u)^*(E^{-1}u)=u^*(L^{-1})^*(U)^*U^{-1}L^{-1}u,$$

并由预解条件得到

$$|E^{-1}u|^2\leqslant\left(\frac{c_5}{|z|-1}\right)^2|u|^2. \tag{4.26}$$

令 $u=Lv$，$v=(v_2,0,\cdots,0)^*$，其中 v_2 是二维向量，于是由 (4.25)，(4.26) 得到

$$|E^{-1}u|^2 = |E_1^{-1}v_2|^2 \leqslant \left(\frac{c_5}{|z|-1}\right)^2 |Lv|^2. \tag{4.27}$$

由于

$$Lv = \begin{pmatrix} I_2 \\ E_3 E_1^{-1} \end{pmatrix} v_2,$$

$$E_3 E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & A_{3m} \\ 0 & A_{4m} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & A_{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\xi_1} & * \\ 0 & \frac{1}{\xi_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{A_{3m}}{\xi_m} \\ 0 & \frac{A_{4m}}{\xi_m} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{A_{2m}}{\xi_m} \end{pmatrix},$$

故由 $|A_{lj}| \leqslant c_6 \gamma_{lj}$ 得到

$$\begin{aligned} |Lv|^2 &\leqslant |v_2|^2 \left(1 + \sum_{l=3}^{m-1} A_{lm}^2/\xi_m^2\right) \\ &\leqslant (1 + (m-2)c_6^2)|v_2|^2, \end{aligned}$$

因此由 (4.27) 得到

$$|E_1^{-1}v_2|^2 \leqslant \left(\frac{c_5}{|z|-1}\right)^2 (1 + (m-2)c_6^2)|v_2|^2.$$

所以，若用 E_1 代换 (4.13) 中的 $A - zI$，则不等式成立，并且

$$c_R = c_5(1 + (m-2)c_6^2)^{\frac{1}{2}}.$$

这样就把一般的情况化为 2×2 阶矩阵 E_1 的情况. 由于 E_1 的上对角线元素是 A_{1m}，结合 (4.23)，从而就证明了本引理.

第六步，假设矩阵 B 右上角第 k 条对角线上的元素已经满足 (4.14). 由于第 $k+1$ 条对角线上的每个元素都是 $k+2$ 阶主子式的右上角元素，因此根据引理 4.1，或者把 (4.14) 直接推广到这个元素上，或者当需要时，应用相似变换 $S^{(l,l+k+1)}$ 消去不满足 (4.14) 的元素. 通过直接验算可以知道，这种相似变换只会改变右上角还未被考虑过的元素的值. 逐步递推下去就完成了定理的证明.

关于 Kreiss 定理及其证明方法的简化，还可见 Morton(1964a,

b)，Miller，Strang(1965) 和 Лаптив(1975) 等，但在实际应用中却很困难。Buchanan(1963b) 建立了一个较为实用的定理。

我们称 p 个复数 $\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_p$ 的序列是被嵌套的，如果存在正数 c_7，使得对一切 $\mu \leqslant r \leqslant s \leqslant m$，都有

$$|\kappa_r - \kappa_s| \leqslant c_7 |\kappa_\mu - \kappa_m|,$$

c_7 被称为嵌套常数。

任何 p 个复数都可适当地排列，使得它们是嵌套的，并且具有嵌套常数 2^p。事实上，可取任意一数为 κ_1，把与 κ_1 最接近的数取为 κ_2，再取与 κ_2 最接近的数为 κ_3，依此类推，我们得到

$$|\kappa_{l-1} - \kappa_l| \leqslant |\kappa_{l-1} - \kappa_j|, \quad \forall l \leqslant j.$$

假设 $r > 1$，$\mu \leqslant r \leqslant s \leqslant m$，则

$$\begin{aligned}|\kappa_r - \kappa_m| &\leqslant |\kappa_{r-1} - \kappa_r| + |\kappa_{r-1} - \kappa_m| \\ &\leqslant 2|\kappa_{r-1} - \kappa_m| \leqslant \cdots \leqslant 2^{r-\mu}|\kappa_\mu - \kappa_m|.\end{aligned}$$

类似地

$$|\kappa_s - \kappa_m| \leqslant 2^{s-\mu}|\kappa_\mu - \kappa_m|.$$

因此

$$\begin{aligned}|\kappa_r - \kappa_s| &\leqslant |\kappa_r - \kappa_m| + |\kappa_s - \kappa_m| \\ &\leqslant (2^{r-\mu} + 2^{s-\mu})|\kappa_\mu - \kappa_m| \leqslant 2^p|\kappa_\mu - \kappa_m|.\end{aligned}$$

定理 4.8 设 $\mathscr{F}$ 是 p 阶上三角阵 A 组成的集合，它的特征值被嵌套，嵌套常数是 c_7，那末 $\mathscr{F}$ 是稳定的充要条件是：

(i) 所有对角线元素 $|\chi_l| \leqslant 1, \ 1 \leqslant l \leqslant p$；

(ii) A 的非对角线元素满足

$$|A_{lj}| \leqslant c_8 \max(1 - |\chi_l|, 1 - |\chi_j|, |\chi_l - \chi_j|), \quad (4.28)$$

式中 c_8 是与 A 无关的正常数。

证明 首先证明这样的性质，如果 A 的特征值是被嵌套的，并且满足 (4.28)，那末在定理 4.7 证明过程中，虽然进行了相似变换 $S^{(l,j)}A(S^{(l,j)})^{-1}(j > l)$ 及逆变换 $(S^{(l,j)})^{-1}AS^{(l,j)}$，但是除了常数 c_8 外，(4.28) 仍然成立。事实上，$A' = S^{(l,j)}A(S^{(l,j)})^{-1}$ 的元素与 A 不同的仅是第 l 行上第 (l, j) 位置右边及第 j 行上第 (l, j) 位置上面的元素，而且

$$A'_{l\nu} = A_{l\nu} + t_{lj}A_{j\nu}, \text{ 若 } \nu > l,$$
$$A'_{\mu j} = A_{\mu j} - t_{lj}A_{\mu l}, \text{ 若 } \mu < j,$$
$$t_{lj} = \frac{A_{lj}}{\chi_l - \chi_j}.$$

由定理 4.7 的证明过程和 (4.28)，存在与 h 无关的正数 c_9，使得 $|t_{lj}| \leqslant c_9$.

若令

$$\Gamma_{lj} = \max(1 - |\chi_l|, 1 - |\chi_j|, |\chi_l - \chi_j|),$$

则由

$$1 - |\chi_l| \leqslant 1 - |\chi_j| + |\chi_l - \chi_j|,$$

得到

$$\Gamma_{lj} \leqslant 2\max(\gamma_{lj}, |\chi_l - \chi_j|) \leqslant 2\Gamma_{lj},$$

因此，当 $\mu \leqslant l \leqslant j \leqslant \nu$ 时，

$$|A_{j\nu}| \leqslant c_8\Gamma_{j\nu} \leqslant 2c_8\max(\gamma_{j\nu}, |\chi_j - \chi_\nu|),$$

由嵌套性质

$$|A_{j\nu}| \leqslant 2c_8\max(1 - |\chi_\nu|, c_7|\chi_l - \chi_\nu|)$$
$$\leqslant 2c_8(1 + c_7)\Gamma_{l\nu},$$

从而

$$|A'_{l\nu}| \leqslant c_8(1 + 2|t_{lj}|(1 + c_7))\Gamma_{l\nu}.$$

对 $A'_{\mu j}$ 可进行类似的估计. 因此，若用 $c_8(1 + 2c_9(1 + c_7))$ 代替 c_8，则对变换后的矩阵仍然成立(4.28). 逆变换 $(S^{(l,j)})^{-1}AS^{(l,j)}$ 与正变换的差异仅仅是 t_{lj} 前面的符号不同，所以成立同样的结论.

现在假设 $\mathscr{F}$ 是稳定的，则由定理 4.7 的证明过程，可用上述相似变换推出 (4.14)，从而变换后的矩阵满足 (4.28). 由前面的讨论可知，原来未进行变换的矩阵 A 也满足 (4.28)，因此证明了定理条件的必要性. 反之，若条件 (4.28) 成立，则

$$|A_{lj}| \leqslant 2c_8\max(\gamma_{lj}, |\chi_l - \chi_j|).$$

逐步应用上述的相似变换下 A 的非对角线元素，就可推得 (4.14) 成立，所以 $\mathscr{F}$ 是稳定的.

从定理 4.7 和 4.8 出发，可得到稳定性的许多充分条件，兹举两例.

定理 4.9 如果对一切 $\tau \leqslant \tau_0$ 和 β,矩阵 $G(\beta, \tau)$ 的元素一致有界，并且

$$|\lambda^{(1)}(G)| \leqslant 1 + O(\tau),$$
$$|\lambda^{(l)}(G)| < \gamma < 1, \ 2 \leqslant l \leqslant p,$$

则 Von Neumann 条件是 (4.3) 稳定的充要条件.

证明 选择适当的 α,并记 $A = e^{-\alpha\tau}G(\beta, \tau)$,则 $|\lambda^{(1)}(A)| \leqslant 1$, $|\lambda^{(l)}(A)| < \gamma < 1, 2 \leqslant l \leqslant p$. 假定 A 已是上三角阵，并已将特征值嵌套，不失一般性，可取 $\chi_1 = \lambda^{(1)}(A)$. 显然，$A$ 的一切元素的绝对值都有界于 M，并且满足 (4.28)，其中 $c_8 = \frac{M}{1-\gamma}$. 根据 Buchanan 定理，矩阵族 $\mathscr{F} = \{A\}$ 是稳定的，从而 (4.3) 是稳定的.

定理 4.10 如果对一切 $\tau \leqslant \tau_0$, β 和向量 η,都有

$$|\eta^* G(\beta, \tau)\eta| \leqslant (1 + O(\tau))|\eta|^2,$$

则格式 (4.3) 是稳定的.

证明 选择适当的 α, 并记 $A = e^{-\alpha\tau}G(\beta, \tau)$, 则 $|\eta^* A\eta| \leqslant |\eta|^2$,因此 $|\lambda^{(l)}(A)| \leqslant 1, 1 \leqslant l \leqslant p$. 若 $|z| > 1$,则 $(zI - A)^{-1}$ 是存在的.

设 w 是任意向量，$\eta = (zI - A)^{-1}w$,则

$$|\eta||w| \geqslant |\eta^* w| = |\eta^*(zI - A)\eta| \geqslant (|z| - 1)|\eta|^2,$$

所以条件 (4.13) 得到满足. 由定理 4.7，矩阵族 $\mathscr{F} = \{A\}$ 是稳定的，因此 (4.3) 是稳定的.

定理 4.10 的条件被称为 Lax-Wendroff (1964) 条件.

李荣华，周长林 (1963, 1964a, b) 也研究了矩阵族稳定性的条件，并得到与 Buchanan 条件相类似的某些结果. 马驷良 (1982)，马驷良，李荣华 (1983) 等还得到另一些结果. 此外，Kreiss (1962) 证明，若 $G(\beta, \tau)$ 一致有界，则 Von-Neumann 条件是弱稳定性的充要条件.

例 4.2 考虑下列方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}, & -\infty<x<\infty,\ 0<t\leqslant T,\\ U(x,0)=U_0(x), & -\infty<x<\infty,\end{cases}\tag{4.29}$$

其中 $U_0(x+1)=U_0(x)$. 今采用下列格式计算

$$\begin{cases}\dfrac{3}{2}\dfrac{u^{k+1}(x)-u^k(x)}{\tau}-\dfrac{1}{2}\dfrac{u^k(x)-v^k(x)}{\tau}\\ =\dfrac{u^{k+1}(x+h)-2u^{k+1}(x)+u^{k+1}(x-h)}{h^2},\\ v^{k+1}(x)=u^k(x),\end{cases}\tag{4.30}$$

应用分离变量法得到增长矩阵

$$G(\beta,\tau)=\begin{pmatrix}\dfrac{4}{3+a} & \dfrac{-1}{3+a}\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad a=\frac{8\tau}{h^2}\sin^2\frac{\beta h}{2},$$

它的特征值是

$$\lambda^{(1)}(G)=\frac{2+\sqrt{1-a}}{3+a},\quad \lambda^{(2)}(G)=\frac{2-\sqrt{1-a}}{3+a}.$$

若 $0\leqslant a\leqslant 1$,则 $\lambda^{(1)}(G)$ 和 $\lambda^{(2)}(G)$ 都是实数,且

$$|\lambda^{(1)}(G)|\leqslant 1,\quad |\lambda^{(2)}(G)|\leqslant\frac{2}{3},$$

若 $a>1$,则 $\lambda^{(1)}(G)$ 和 $\lambda^{(2)}(G)$ 都是复数,且

$$|\lambda^{(1)}(G)|=|\lambda^{(2)}(G)|=\frac{1}{\sqrt{3+a}}<\frac{1}{2}.$$

因此由定理 4.9,格式 (4.30) 是稳定的.

如果 (2.1) 是变系数方程, 那末 (2.3) 中相应的矩阵也与 x, t 有关,从而得到在点 (x,t) 上的局部增长矩阵 $G(\beta,\tau,x,t)$.如果对一切 $\tau\leqslant\tau_0$, β, $k\tau\leqslant T$ 和所有所讨论的 x, t,一致地有 $\|(G(\beta,\tau,x,t))^k\|\leqslant c_{10}$, 则称格式 (4.3) 是局部稳定的. 局部稳定性对原格式的稳定性既非必要亦非充分. Тихонов, Самарский (1961, 1963b) 和 Коновальцев (1965) 构造了一些局部稳定而不稳定的格式. 反之,Kreiss (1962) 和 Strang (1966) 则构造了

许多稳定而非局部稳定的格式．此外，Тихонов, Самарский (1963b)还构造了一个格式，它对连续系数是稳定的，而对间断系数却是不稳定的．

但是在一定条件下可以由上述两种稳定性之一推出另一种稳定性．例如考虑下列格式

$$u^{k+1}(x)=\sum_{\sigma} C^{\sigma}(x,\tau)T^{\sigma}u^{k}(x). \tag{4.31}$$

当 $x=x'$, $\tau=0$ 时，相应的常系数格式是

$$u^{k+1}(x)=\sum_{\sigma} C^{\sigma}(x',0)T^{\sigma}u^{k}(x). \tag{4.32}$$

定理 4.11 假设 $h_m=h$ 且(4.31)稳定，并当 $\tau\to 0$ 时，$C^{\sigma}(x,\tau)$ 收敛到有界函数 $C^{\sigma}(x,0)$，又记

$E=\{x\,|\,C^{\sigma}(x,\tau)$ 一致收敛到 $C^{\sigma}(x,0)$，且 $C^{\sigma}(x,0)$ 连续$\}$.

那末，当 $x'\in E$ 时，格式(4.32)是稳定的．

定理 4.12 (Friedrichs (1954)) 假设 $h_m=h=\tau$, $C^{\sigma}(x,\tau)=C^{\sigma}(x)$ 是非负的 Hermite 阵，并对 x 满足 Lipschitz 条件，那末格式(4.31)是稳定的．

定理 4.13 (Lax, Nirenberg (1966)) 假定 $h_m=h=\tau$，实对称阵 $C^{\sigma}(x)$对 x 的二阶导数有界，并且对一切 x 和 β,

$$\|G(\beta,\tau,x)\|=\left\|\sum_{\sigma} C^{\sigma}(x)e^{ih\sigma\cdot\beta}\right\|\leqslant 1,$$

则格式(4.32)对实向量 $u^{k}(x)$ 是稳定的．

定理 4.11—4.13 的证明可在 Richtmyer, Morton (1967) 中找到．

上述方法称为冻结系数法，它已被广泛应用于各种线性方程的初值问题，可参见 Яненко, Бояринцев (1961), Lax, Wendroff (1962a), Kreiss (1964), Widlund (1965), Бояринцев (1966), Strang (1966) 和 Коновальцев (1968) 等．

对于非线性方程可采用近似 Fourier 方法，也就是说，在误差方程中略去高阶小量．然后对近似的线性化的误差方程组推导出增长矩阵 $G(\beta,\tau,x,t,u)$．如果对所讨论的 x, t 和 u, $G(\beta,\tau,$

x, t, u) 满足稳定性条件，则就把非线性差分格式近似地看作为稳定的.

可以把本节方法推广到非周期解问题. 事实上，若 $u^k(x) \in L^2(\mathscr{R}^n)$，则

$$u^k(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}^k(\beta, \tau) e^{i\beta \cdot x} d\beta,$$

其中

$$\hat{u}^k(\beta, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} u^k(x) e^{-i\beta \cdot x} dx,$$

并成立下列 Pavseval 等式

$$\|u^k\|_{L^2(\mathscr{R}^n)}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}^k(\beta, \tau)|^2 d\beta.$$

若 $u^k(x)$ 是 (4.3) 的解，则对一切 β，

$$\hat{u}^k(\beta, \tau) = (G(\beta, \tau))^k \hat{u}^0(\beta, \tau),$$

其中 $G(\beta, \tau)$ 如 (4.4) 所示. 因此

$$\|u^k\|_{L^2(\mathscr{R}^n)}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |(G(\beta, \tau))^k \hat{u}(\beta, \tau)|^2 d\beta.$$

格式 (4.3) 按 L^2 范数对初值稳定的充要条件是：对一切 $\tau \leqslant \tau_0$，β 和 $k\tau \leqslant T$，都有

$$\|(G(\beta, \tau))^k\| \leqslant c_{10}.$$

4.2 不适定问题的 Fourier 方法

Fourier 方法同样适用于不适定问题. 假设所讨论的问题是 (2.28)，相应的差分格式是

$$u^{k+1}(x) = C(\tau) u^k(x). \tag{4.33}$$

$\mathscr{D}_0$ 的定义见 (2.33)，并记 $D = \dfrac{\partial}{\partial x}$，于是对一切 $U_0(x) \in \mathscr{D}_0$，

$$U(x, t) = E(t) U_0(x) = e^{tAD^q} U_0(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(tAD^q)^\mu}{\mu!} U_0(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(i\beta)^{q\mu} (tA)^\mu}{\mu!} \hat{U}_0(\beta) e^{i\beta} d\beta \in \mathscr{D}_0. \tag{4.34}$$

用 $G(\beta,\tau)$ 表示 (4.33) 的增长矩阵，则对一切 $V\in\mathscr{D}_0$，

$$C(\tau)V=C(\tau)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N_1}^{N_1}\hat{V}(\beta)e^{i\beta x}d\beta\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N_1}^{N_1}G(\beta,\tau)\hat{V}(\beta)e^{i\beta x}d\beta. \tag{4.35}$$

定理 4.14 格式 (4.33) 可易的充要条件是对一切 β 和 τ，$G(\beta,\tau)$ 与 A 可易.

证明 若 $G(\beta,\tau)$ 与 A 可易，那末由 (4.34) 和 (4.35) 可知，对一切 $U_0(x)\in\mathscr{D}_0$，都有

$$E(t)C(\tau)U_0=C(\tau)E(t)U_0,$$

因此 (4.33) 是可易的.

反之，若定理条件不满足，则存在 β_0，使得 $G(\beta_0,\tau)A\neq AG(\beta_0,\tau)$. 由于 $G(\beta,\tau)$ 连续依赖于 β，故可假定 $\beta_0\neq 0$，并存在正数 $\varepsilon>0$，使得 $\beta_0-\varepsilon>0$，

$$G(\beta,\tau)A\neq AG(\beta,\tau),\quad \beta_0-\varepsilon\leqslant\beta\leqslant\beta_0+\varepsilon.$$

构造一个支集为 $[\beta_0-\varepsilon,\beta_0+\varepsilon]$ 的函数 $\hat{W}(\beta)$，使得下式成立，其中 $\|\cdot\|$ 表示 $\|\cdot\|_{L^2(R)}$，

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\beta_0-\varepsilon}^{\beta_0+\varepsilon}(G(\beta,\tau)A-AG(\beta,\tau))\hat{W}(\beta)e^{i\beta x}d\beta\right\|>0.$$

今选取 $U_0(x)$，

$$U_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\beta_0-\varepsilon}^{\beta_0+\varepsilon}\hat{W}(\beta)e^{i\beta x}d\beta,$$

于是

$$C(\tau)E(t)U_0-E(t)C(\tau)U_0$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\beta_0-\varepsilon}^{\beta_0+\varepsilon}t(i\beta)^q(G(\beta,\tau)A-AG(\beta,\tau))$$

$$\cdot\hat{W}(\beta)e^{i\beta x}d\beta+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\beta_0-\varepsilon}^{\beta_0+\varepsilon}\sum_{\mu=2}^{\infty}$$

$$\cdot\frac{t^\mu(i\beta)^{q\mu}}{\mu!}(G(\beta,\tau)A^\mu-A^\mu G(\beta,\tau)\hat{W}(\beta)e^{i\beta x}d\beta.$$

上式右端的第一项是 $O(t)$，第二项是 $O(t^2)$，所以当 t 适当小时，

$$\|C(\tau)E(t)U_0 - E(t)C(\tau)U_0\| \neq 0,$$

即 (4.33) 是不可易的.

注记 4.1　若 $G(\beta, \tau)$ 与 A 有公共的完全特征向量系，则 $G(\beta, \tau)$ 与 A 可易.

定理 4.15　设 $G(\beta, \tau)$ 和 A 有公共的完全特征向量系 $\{\eta^{(l)}\}$，那末格式 (4.33) 稳定的充要条件是存在正常数 τ_0 和 c_1，使得当 $\tau \leqslant \tau_0$ 时，对一切 l，β 和 $k\tau$ 都有

$$|\lambda^{(l)}(\beta,\tau)|^k \leqslant c_1 \max(1, |e^{k\tau\mu_l(i\beta)^q}|). \tag{4.36}$$

其中 $\lambda^{(l)}(\beta, \tau)$，$\mu_l$，分别是 $G(\beta, \tau)$ 和 A 的特征值.

证明　先证明充分性. 设 Q 和 Λ 的意义如 (2.29) 所示，则

$$Q^{-1}G(\beta,\tau)Q = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)}(\beta, \tau) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda^{(p)}(\beta,\tau) \end{pmatrix}.$$

记 $V = Q^{-1}U$，$\hat{V}$ 是它的 Fourier 变换，其分量是 $\hat{V}_l(\beta, \tau)$，则

$$V(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(i\beta)^q \Lambda} \hat{V}^0(\beta) e^{i\beta x} d\beta,$$

其中 $\hat{V}^0$ 是 $Q^{-1}U_0$ 的 Fourier 变换. 由 (4.36) 得到

$$\begin{aligned} \|(C(\tau))^k E(t) Q^{-1} U_0\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^{p} |(\lambda^{(l)}(\beta,\tau))^k \\ &\cdot e^{t\mu_l(i\beta)^q} \hat{V}_l^0(\beta)|^2 d\beta \leqslant c_1^2(\|Q^{-1}U(t + k\tau)\|^2 \\ &+ \|Q^{-1}U(t)\|^2) \leqslant c_2(\|Q^{-1}U_0\|')^2, \end{aligned}$$

因此存在 $c_3 > 0$，使得

$$\begin{aligned} c_3\|(C(\tau))^k E(t) U_0\| &\leqslant \|(C(\tau))^k E(t) Q^{-1} U_0\| \\ &\leqslant c_1 \sqrt{1 + c_2^2}\, \|Q^{-1}U_0\|' \leqslant c_4\|U_0\|', \end{aligned}$$

即满足 (2.25) 所定义的稳定性.

再证明必要性. 若格式 (4.33) 是稳定的，则当 $\tau \leqslant \tau_0$ 时，

$$\|(C(\tau))^k U_0\| \leqslant c_5 \|U_0\|'. \tag{4.37}$$

设 $f_\varepsilon(\beta, \beta_0)$ 是支集为 $[\beta_0 - \varepsilon, \beta_0 + \varepsilon]$ 的光滑正值函数，并

且当 $\varepsilon \to 0$ 时，$f_\varepsilon(\beta,\beta_0)$ 趋向于 Dirac 函数 $\delta(\beta-\beta_0)$. 选取

$$U_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{f_\varepsilon(\beta,\beta_0)}\,\eta^{(l)}e^{i\beta x}d\beta, \tag{4.38}$$

则由 (4.37) 得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\lambda^{(l)}(\beta,\tau)|^{2k}f_\varepsilon(\beta,\beta_0)d\beta \leqslant c_5^2\max$$

$$\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty}|e^{T\mu_l(i\beta)^q}|^2 f_\varepsilon(\beta,\beta_0)d\beta,\int_{-\infty}^{\infty}f_\varepsilon(\beta,\beta_0)d\beta. \tag{4.39}\right.$$

记 $k'=\left[\frac{T}{\tau}\right]$，并让 $\varepsilon\to 0$，则由 (4.39) 得到

$$|\lambda^{(l)}(\beta_0,\tau)|^{k'}\leqslant c_6\max(1,|e^{T\mu_l(i\beta_0)^q}|). \tag{4.40}$$

由于上式中的 l 和 β_0 都是任意的，所以由此推得 (4.36).

例 4.3 (张关泉 (1965)) 考虑下列 Cauchy-Riemann 方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial t}=-\dfrac{\partial W}{\partial x}, & -\infty<x<\infty,\ 0<t\leqslant T,\\[2mm] \dfrac{\partial W}{\partial t}=\dfrac{\partial V}{\partial x}, & -\infty<x<\infty,\ 0<t\leqslant T,\\[2mm] V(x,0)=V_0(x), & -\infty<x<\infty,\\ W(x,0)=W_0(x), & -\infty<x<\infty,\end{cases} \tag{4.41}$$

其中 $V_0(x)$ 和 $W_0(x)$ 的 Fourier 变换有紧致支集. 记 $U=(V,W)^*$，则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}=A\dfrac{\partial U}{\partial x},\\[2mm] U(x,0)=U_0(x),\end{cases}\quad A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}.$$

A 的特征值是 $\mu_1=-i$, $\mu_2=i$. 记 $t=it_1$，则

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t_1^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

由 D'Alembert 公式

$$U(x,t+\tau)=\frac{1}{2}(U(x-i\tau,t)+U(x+i\tau,t)$$

$$+ i\int_{i\tau}^{-i\tau} \frac{\partial U}{\partial t}(x+\sigma,t)d\sigma),$$

它的分量形式是

$$\begin{cases} V(x,t+\tau) = \dfrac{1}{2}(V(x-i\tau,t)+V(x+i\tau,t) \\ \qquad + iW(x+i\tau,t) - iW(x-i\tau,t)), \\ W(x,t+\tau) = \dfrac{1}{2}(W(x-i\tau,t)+W(x+i\tau,t) \\ \qquad - iV(x+i\tau,t) + iV(x-i\tau,t)). \end{cases}$$

应用 $2M+1$ 阶 Stirling 公式(见 Березин, Шидков(1959))得到

$$\begin{cases} V(x,t+\tau) = \sum\limits_{m=0}^{M} a_m(\tau)\hat{\delta}_x^{2m}V(x,t) \\ \qquad - \sum\limits_{m=0}^{M} b_m(\tau)\hat{\bar{\delta}}_x^{2m+1}W(x,t) + R_1, \\ W(x,t+\tau) = \sum\limits_{m=0}^{M} a_m(\tau)\hat{\delta}_x^{2m}W(x,t) \\ \qquad + \sum\limits_{m=0}^{M} b_m(\tau)\hat{\bar{\delta}}_x^{2m+1}V(x,t) + R_2, \end{cases}$$

其中 $\hat{\delta}_x^{2m}$ 表示以 $x-mh,\cdots,x,\cdots,x+mh$ 为结点的 $2m$ 阶中心差分,

$$\hat{\bar{\delta}}_x^{2m+1} = \frac{1}{2}(\hat{\delta}_x^{2m}(x+h,t) - \hat{\delta}_x^{2m}(x-h,t)),$$

$$a_m(\tau) = \frac{(-1)^m}{(2m)!}\prod_{l=0}^{m-1}\left(\left(\frac{\tau}{h}\right)^2 + l^2\right),$$

$$b_m(\tau) = \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\prod_{l=0}^{m}\left(\left(\frac{\tau}{h}\right)^2 + l^2\right),$$

R_1 和 R_2 是余项. 特别当 V, W 是 x 的一次函数时, $R_1 = R_2 = 0$. 下面设 $\frac{\tau}{h}$ 有界.

在上式中略去余项即得到相应的差分格式

$$\begin{cases} v^{k+1}(x) = \sum_{m=0}^{M} a_m(\tau)\hat{\partial}_x^{2m} v^k(x) - \sum_{m=0}^{M} b^m(\tau)\hat{\bar{\partial}}_x^{2m+1} w^k(x), \\ w^{k+1}(x) = \sum_{m=1}^{M} a_m(\tau)\hat{\partial}_x^{2m} w^k(x) + \sum_{m=0}^{M} b_m(\tau)\hat{\bar{\partial}}_x^{2m+1} v^k(x), \end{cases}$$

或者写成

$$u^{k+1}(x) = C(\tau)u^k(x). \tag{4.42}$$

显然,它对 (4.41) 的逼近是相容的. 它的增长矩阵是

$$G(\beta, \tau, M) = \begin{pmatrix} g(\beta, \tau, M) & -if(\beta, \tau, M) \\ if(\beta, \tau, M) & g(\beta, \tau, M) \end{pmatrix},$$

其中

$$g(\beta, \tau, M) = \sum_{m=0}^{M} a_m(\tau)(-1)^m 2^{2m} \sin^{2m} \frac{\beta h}{2},$$

$$f(\beta, \tau, M) = \sin\beta h \sum_{m=0}^{M} b_m(\tau)(-1)^m 2^{2m} \sin^{2m} \frac{\beta h}{2}.$$

显然, $G(\beta, \tau, M)$ 与 A 是可易的,并且具有公共的完全特征向量系. $G(\beta, \tau, M)$ 的特征值是

$$\begin{cases} \lambda^{(1)}(\beta, \tau, M) = g(\beta, \tau, M) + f(\beta, \tau, M), \\ \lambda^{(2)}(\beta, \tau, M) = g(\beta, \tau, M) - f(\beta, \tau, M). \end{cases}$$

为了讨论稳定性,先证明当 $\beta h \in (-\pi, \pi)$ 时, $g(\beta, \tau, \infty) = \mathrm{ch}\beta\tau$, $f(\beta, \tau, \infty) = \mathrm{sh}\beta\tau$. 为此把 $\cos\beta(x+\sigma)$ 写成以 σ 为自变量,以 $x-(M+1)h, \cdots, x, \cdots, x+(M+1)h$ 为节点的 Stirling 插值公式的形式,

$$\cos\beta(x+\sigma) = \cos\beta x + \frac{\sigma}{h}\hat{\bar{\partial}}_x \cos\beta x + \frac{1}{2!}\left(\frac{\sigma}{h}\right)^2$$

$$\cdot \hat{\partial}_x^2 \cos\beta x + \cdots + \frac{1}{(2M+1)!}\frac{\sigma}{h}$$

$$\cdot \prod_{l=1}^{M}\left(\left(\frac{\sigma}{h}\right)^2 - l^2\right)\hat{\bar{\partial}}_x^{2M+1}\cos\beta x + \frac{\omega_{2M+1}^{(1)}(x+\sigma)}{4\pi i}$$

$$\cdot \oint_\Gamma \frac{\cos\beta z dz}{\omega_{2M+1}^{(1)}(z)(z-x+\sigma)} + \frac{\omega_{2M+1}^{(2)}(x+\sigma)}{4\pi i}$$

$$\cdot \oint_{\Gamma} \frac{\cos\beta z\, dz}{\omega_{2M+1}^{(s)}(z)(z-x+\sigma)}, \tag{4.43}$$

其中

$$\omega_{2M+1}^{(1)}(z)=\prod_{j=-M-1}^{M}(z-x-jh),$$

$$\omega_{2M+1}^{(2)}(z)=\prod_{j=-M}^{M+1}(z-x-jh).$$

令 $x=0$, $\sigma=i\tau$,则由上式得到

$$\mathrm{ch}\beta\tau=g(\beta,\tau,M)+R_3.$$

取 Γ 为以原点为中心,以 $2\tau+3Mh$ 为半径的圆周，则当 βh 适当小,且$M\to\infty$时,$|R_3|\to 0$. 显然,$\mathrm{ch}\beta\tau$ 是 βh 的解析函数. 又可证明,当 $\beta h\in(-\pi,\pi)$ 时,$g(\beta,\tau,\infty)$可以表达为一个解析函数的一致收敛的级数和. 由 Weierstrass 定理, $g(\beta,\tau,\infty)$ 是解析函数. 因此当 $\beta h\in(-\pi,\pi)$ 时,$g(\beta,\tau,\infty)\equiv\mathrm{ch}\beta h$. 类似地可证明,当 $\beta h\in(-\pi,\pi)$ 时,$f(\beta,\tau,\infty)\equiv\mathrm{sh}\beta h$. 从而

$$g(\beta,\tau,\infty)\pm f(\beta,\tau,\infty)=e^{\pm\beta\tau}.$$

因为 $(-1)^m a_m>0$, $(-1)^m b_m>0$,所以

$$|\lambda^{(i)}(\beta,\tau,M)|<g(|\beta|,\tau,\infty)+f(|\beta|,\tau,\infty)=e^{|\beta|\tau}.$$

从而当 $\beta\geqslant 0$ (或 $\beta\leqslant 0$) 时, $\lambda^{(1)}(\beta,\tau,M)$ (或 $\lambda^{(2)}(\beta,\tau,M)$) 满足(4.36). 但是可看到,当 $2\pi>\beta h>\pi$ (或$-2\pi<\beta h<-\pi$) 时, $\lambda^{(2)}(\beta,\tau,M)$ (或 $\lambda^{(1)}(\beta,\tau,M)$) 不满足 (4.36). 因此格式(4.42) 是不稳定的.

为了得到稳定的差分格式，可采用 Newman (1960) 的滤波方法. 例如采用下列格式

$$u^{k+1}=\Phi(\tau)C_0(\tau)u^k, \tag{4.44}$$

其中 $C_0(\tau)$ 表示 (4.42) 中$M=0$ 的相应差分算子,$\Phi(\tau)$ 为 Dirichlet 算子

$$\Phi(\tau)v(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(x+\sigma)\frac{\sin\frac{\pi\sigma}{h}}{\sigma}\,d\sigma.$$

Шилов(1961) 证明了下列性质:

(i) $(\Phi(\tau))^k = \Phi(\tau)$,

(ii) 若 $v(x)$ 的 Fourier 变换在区间 $\left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right]$ 内为零，则 $\Phi(\tau)v(x) \equiv 0$;

(iii) 若 $v(x)$ 的 Fourier 变换在区间 $\left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right]$ 外为零，则 $\Phi(\tau)v(x) \equiv v(x)$.

用 $G_\Phi(\beta,\tau)$ 表示 (4.44) 的增长矩阵，那末，当 $|\beta h| > \pi$ 时，$G_\Phi(\beta, \tau)$ 是零矩阵，它的特征值自然满足 (4.36). 当 $|\beta h| \leqslant \pi$ 时，$G_\Phi(\beta, \tau) = G(\beta, \tau, 0)$，所以当 $\beta \geqslant 0$ (或 $\beta \leqslant 0$) 时，$\lambda_\Phi^{(1)}(\beta, \tau)$ (或 $\lambda_\Phi^{(2)}(\beta, \tau)$) 满足 (4.36). 不难验证，当 $\frac{\tau}{h} \leqslant 2$ 时，

$$\begin{cases} |\lambda_\Phi^{(1)}(\beta, \tau)| \leqslant 1, \text{ 当 } -\pi \leqslant \beta h \leqslant 0 \text{ 时}, \\ |\lambda_\Phi^{(2)}(\beta, \tau)| \leqslant 1, \text{ 当 } 0 \leqslant \beta h \leqslant \pi \text{ 时}, \end{cases}$$

因此也满足 (4.36). 所以当 $\frac{\tau}{h} \leqslant 2$ 时，(4.44) 是稳定的

又由 $\Phi(\tau)$ 的性质 (i), (4.44) 可改写为

$$\begin{cases} u^{k+1}(x) = C_0(\tau)u^k(x), \\ u^0(x) = \Phi(\tau)U_0(x). \end{cases}$$

因此 (4.44) 与 (4.42) 不同之处仅仅在于对初值加以滤波处理. 格式 (4.44) 的可易性是显然的. 又因为当 $U_0(x) \in \mathscr{D}_0$ 时，其 Fourier 变换在 $[-N, N]$ 外为零，所以只要 $h < \frac{\pi}{N}$，则

$$(C_0(\tau))^k U_0(x) = \Phi(\tau)(C_0(\tau))^k U_0(x).$$

由于 (4.2) 对 (4.1) 的逼近是相容的，因此 (4.44) 对 (4.41) 的逼近也是相容的，所以格式 (4.44) 也是收敛的.

可以用 Fourier 方法讨论变系数问题的稳定性. Houde Han (1982) 还用有限元方法研究了变系数椭圆型方程的初、边值问题.

4.3 能量方法

能量方法直接来源于守恒律．例如考虑一根两端固定的均匀细弦在空气中作阻尼运动，阻力与速度成正比，阻尼系数是 $b(x) \geqslant 0$．用 $U(x, t)$表示弦对平衡位置的偏移，那末，它满足下列方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b(x)\dfrac{\partial U}{\partial t} = 0, & 0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant T, \\
U(0,t) = U(1,t) = 0, & 0 < t \leqslant T, \\
\dfrac{\partial U}{\partial t}(x,0) = U_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\
U(x,0) = U_0(x), & 0 \leqslant x \leqslant 1.
\end{cases}
\tag{4.45}
$$

在 t 时刻，弦的能量 $E(t)$ 等于动能 $E_1(t)$ 和势能 $E_2(t)$ 的和，其中

$$
E_1(t) = \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\mathscr{I})}, \quad E_2(t) = \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\mathscr{I})},
$$

由 (4.45) 得到

$$
E(t) = E(0) - \int_0^t \int_0^1 b(x)\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}(x, \xi)\right)^2 dx\, d\xi,
$$

它表示能量因抵抗空气阻力而衰减，这就是所谓能量不等式．可应用能量不等式研究偏微分方程定解问题的适定性，例如可见 Ильин, Калашников, Олейник (1962) 和 Lions (1969) 的著作．

差分格式的能量方法是对微分方程能量法的离散模拟，它最早是由 Courant, Friedrichs, Lewy(1928)提出的．几十年以来，这方法得到了广泛的应用．例如 Ладыженская (1953), Less(1960 a,b), Копачек (1964) 等把它应用于热传导方程和波动方程．Friedrichs (1954), Less (1961a), Lax (1961), Thomée (1962), Keller, Thomée (1962), Kreiss (1963), 郭本瑜 (1965a,b), Сивашинский(1971) 和朱幼兰 (1978)，朱幼兰，钟锡昌，陈炳木，张作民 (1980) 等把它应用于双曲型方程组．Less (1961b), Самарский (1962b, 1963a, b, 1964a, b, c), Дьяконов (1962b, 1965,

1967), Фрязинов (1964, 1966, 1968, 1969a,b) Коновалов, (1968, 1969) 和 Белухина (1968, 1969) 则把能量方法应用到多维问题。此外 Самарский (1961a, b, 1962a,b, 1963a,b) 把能量方法应用于拟线性抛物型方程。在郭本瑜 (1965a, 1976, 1978, 1979a, b, 1980a,c, 1981, 1982a,b,c), Kuo Pen-yu (1977, 1980) 和 Guo Ben-yu (1981) 等论文中则把它应用到多维拟线性双曲型及抛物型方程组等等。

为了具体应用能量方法，还需要建立一些关系式。Less 在上述论著中作了一些初步的工作。Самарский 和郭本瑜则在上述论著中建立了一整套公式，其中包括 Соблев 空间嵌入定理的离散模拟。这些公式是研究非线性方程能量方法的基本工具。

设 $\mathscr{R}^n$ 空间中的变量是 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, x_m 的步长都是 h，网格点 x 的坐标值是 $x_m=j_m h$，其中 j_m 是整数。$\mathscr{R}_h^n$ 表示全部网格点的集合。e_m 是单位向量

$$e_m=(\underbrace{0, \cdots, 0}_{(m-1)\text{个}}, 1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{(n-m)\text{个}})^T$$

把求解区域上的全部网格点的集合记为 $\bar{\Omega}_h$。若两点的距离是 h，则称它们互为邻点。如果 x 及其全部邻点都在 $\bar{\Omega}_h$ 内，则称它是内点，并记 $x\in\Omega_h$。Γ_h 表示网格区域的边界，$\bar{\Omega}_h=\Omega_h\cup\Gamma_h$。

为了今后应用方便计，还记

$$\Omega_{h,m}^{*,+}=\{x \mid x\in\Omega_h,\ x+he_m\in\Gamma_h\},$$
$$\Omega_{h,m}^{*,-}=\{x \mid x\in\Omega_h,\ x-he_m\in\Gamma_h\},$$
$$\Omega_{h,m}^{*}=\Omega_{h,m}^{*,+}\cup\Omega_{h,m}^{*,-},\quad \Omega_h^{*}=\bigcup_{m=1}^{n}\Omega_{h,m}^{*},$$
$$\Gamma_{h,m}^{+}=\{x \mid x\in\Gamma_h,\ x-he_m\in\Omega_h\},$$
$$\Gamma_{h,m}^{-}=\{x \mid x\in\Gamma_h,\ x+he_m\in\Omega_h\},$$
$$\Gamma_{h,m}=\Gamma_{h,m}^{+}\cup\Gamma_{h,m}^{-},\quad \Gamma_h=\bigcup_{m=1}^{n}\Gamma_{h,m}.$$

此外，$\Omega_h'=\Omega_h/\Omega_h^*$，而 Ω_h' 的内点集合为 Ω_h''。

又用 $\partial_{x_m}u(x)$ $\bar{\partial}_{x_m}u(x)$ 和 $\hat{\partial}_{x_m}u(x)$ 分别表示 $u(x)$ 对 x_m 的向

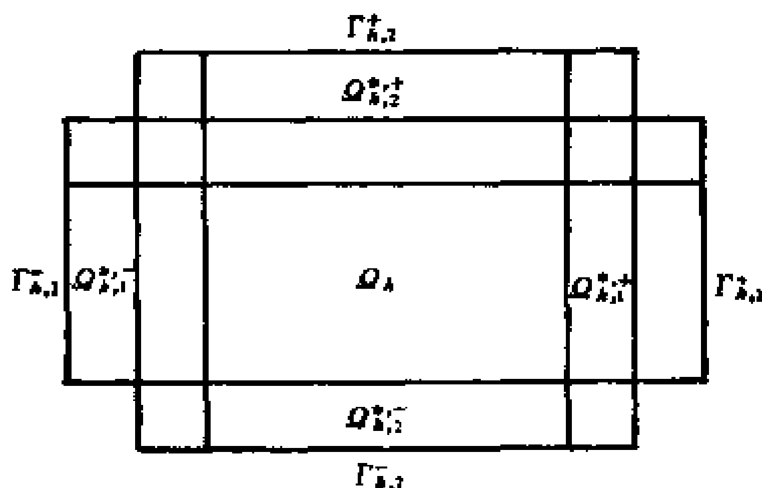


图 4.1

前，向后和中心差分．$u_{x_m}(x)$，$u_{\bar{x}_m}(x)$ 和 $u_{\hat{x}_m}(x)$ 分别表示 $u(x)$ 对 x_m 的向前，向后和中心差商．$u_n(x)$ 表示 Γ_h 上的外法向差商，即

$$u_n(x)=\begin{cases}u_{\bar{x}_m}(x), & \text{当 } x\in\Gamma_{h,m}^{+},\\ -u_{x_m}(x), & \text{当 } x\in\Gamma_{h,m}^{-}.\end{cases}$$

设 $\nu(x)$ 为非负函数，定义

$$\Delta_{h,m}^{(\nu)}u(x)=\frac{1}{2}\left(\nu(x)u_{x_m}(x)\right)_{\bar{x}_m}+\frac{1}{2}\left(\nu(x)u_{\bar{x}_m}(x)\right)_{x_m},$$

$$\Delta_h^{(\nu)}u(x)=\sum_{m=1}^{n}\Delta_{h,m}^{(\nu)}u(x).$$

特别当 $\nu(x)\equiv 1$ 时，把它们简记为 $\Delta_{h,m}u(x)$ 和 $\Delta_h u(x)$．

我们定义下列内积和范数

$$(u,v)=\sum_{x\in\Omega_h}h^n u(x)v(x),\ \|u\|^2=\|u\|_0^2=(u,u)$$

$$(|u|_1^{(\nu)})^2=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\left(\|\sqrt{\nu}\,u_{x_m}\|^2+\|\sqrt{\nu}\,u_{\bar{x}_m}\|^2\right),$$

当 $\nu(x)\equiv 1$ 时，则把 $|u|_1^{(\nu)}$ 简记为 $|u|_1$．

设 $\mathscr{D}_h\subseteq\Omega_h$，有时为了明确起见往往采用记号 $(u,v)_{\mathscr{D}_h}$，$\|u\|_{\mathscr{D}_h}$ 和 $|u|_{1,\mathscr{D}_h}^{(\nu)}$ 等等，又定义

$$|u|_2^2=|u|_{2,\Omega_h}^2=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\left(|u_{x_m}|_{1,\Omega_h'}^2+|u_{\bar{x}_m}|_{1,\Omega_h'}^2\right).$$

类似地可定义 $|u|_3$ 等等，并记

$$\|u\|_q = \|u\|_0 + \sum_{\mu=1}^{q} |u|_\mu.$$

我们还将应用下列记号

$$\|u\|_{lp}^p = \|u\|_{0,lp}^p = \sum_{x \in \Omega_h} h^n |u(x)|^p,$$

$$|u|_{1,lp}^p = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n} (\|u_{x_m}\|_{lp}^p + \|u_{\bar{x}_m}\|_{lp}^p).$$

类似地可定义 $|u|_{q,lp}$。而离散 Соболев 空间范数定义为

$$\|u\|^{w_h^{q,p}} = \|u\|_{lp} + \sum_{\mu=1}^{q} |u|_{\mu,lp}.$$

我们还定义在 Ω_h^* 和 Γ_h 上的各种范数，例如

$$\|u\|^2_{\Omega_h^*} = \sum_{x \in \Omega_h^*} h^{n-1} u^2(x),$$

$$\|u\|^2_{1,\Gamma_h} = \sum_{x \in \Gamma_h} h^{n-1} u^2(x),$$

$$|u|^2_{1,\Gamma_h} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{1 \leqslant l \leqslant n \\ l \neq m}} \sum_{x \in \Gamma_{h,m}^*} h^{n-1} (u_{xl}^2(x) + u_{\bar{x}l}^2(x)).$$

此外，我们还应用最大模，即

$$\|u\|_\infty = \|u\|_{0,\infty} = \max_{x \in \Omega_h} |u(x)|,$$

$$|u|_{1,\infty} = \max_{x \in \Omega_h} \max_{1 \leqslant m \leqslant n} (|u_{x_m}(x)|, |u_{\bar{x}_m}(x)|),$$

类似地可定义 $|u|_{q,\infty}$，以及

$$\|u\|_{q,\infty} = \|u\|_\infty + \sum_{\mu=1}^{q} |u|_{\mu,\infty}.$$

最后再引入下列四个和式

$$S_m^{(\nu)}(u, v) = \frac{h^{n-2}}{2} \sum_{x \in \Omega_{h,m}^{*,+}} \nu(x + he_m) u(x) v(x)$$

$$+ \frac{h^{n-2}}{2} \sum_{x \in \Omega_{h,m}^{*,-}} \nu(x - he_m) u(x) v(x),$$

$$S^{(\nu)}(u, v) = \sum_{m=1}^{n} S_m^{(\nu)}(u, v),$$

$$B_m^{(\nu)}(u, v) = \frac{h^{n-1}}{2} \sum_{x \in \Gamma_{h,m}^{+}} (\nu(x - he_m)u(x) + \nu(x)u(x - he_m))v_n(x) + \frac{h^{n-1}}{2} \sum_{x \in \Gamma_{h,m}^{-}} \cdot (\nu(x + he_m)u(x) + \nu(x)u(x + he_m))v_n(x),$$

$$B^{(\nu)}(u, v) = \sum_{m=1}^{n} B_m^{(\nu)}(u, v).$$

特别当 $\nu(x) \equiv 1$ 时，我们都略去上标 ν.

今列举郭本瑜（1979a，1980c，1984，1985）和 Kuo Pen-yu（1977）中的一些引理.

引理 4.2 对一切网格函数 u, v 和 $p \geqslant 1$,

$$\|uv\|_p^p \leqslant h^{-n}\|u\|_p^p\|v\|_p^p.$$

证明 由 Jensen 不等式（见 Hardy, Littlewood, Pòlya (1952)),

$$\sum_{x \in \Omega_h} |u(x)|^p|v(x)|^p \leqslant \sum_{x \in \Omega_h} |u(x)|^p \sum_{x \in \Omega_h} |v(x)|^p,$$

由此即得所证.

引理 4.3 若 $\nu_1 = \|\nu\|_\infty$，则

$$(|u|_1^{(\nu)})^2 \leqslant \frac{4n\nu_1}{h^2}\|u\|^2 + \frac{h\nu_1}{2}\|u_n\|_{\Gamma_h}^2,$$

$$(|u|_1^{(\nu)})^2 \leqslant \frac{4n\nu_1}{h^2}\|u\|^2 + \frac{\nu_1}{h}\|u\|_{\Gamma_h}^2.$$

如果 $\Omega_h = \{x/h \leqslant x_m \leqslant J_m h - h\}$, $u(x)$ 在 x_m 方向以 $J_m h - h$ 为周期，则称 $u(x)$ 是周期的. 此时有

$$(|u|_1^{(\nu)})^2 \leqslant \frac{4n\nu_1}{h^2}\|u\|^2.$$

引理 4.4 若 Ω_h 适当正规且有界，那末存在仅与区域直径有关的正常数 c_1，使得

(i) $\|u\|^2 \leqslant c_1(|u|_1^2 + \|u\|_{\Gamma_h}^2)$,

(ii) $\|u\|^2 \leqslant c_1(|u|_1^2 + |h^n \sum_{x\in\Omega_h} u(x)|^2)$.

证明 只证 (i)，我们有

$$u(x) = \sum_{1\leqslant i_m(y)\leqslant i_m(x)} hu_{\bar{x}_m}(y) + u(x'),\ x'\in\Gamma_{h,m}^-,$$

从而

$$u^2(x) \leqslant 2u^2(x') + 2J_m h^2 \sum_{1\leqslant i_m(y)\leqslant i_m(x)} u_{\bar{x}_m}^2(y).$$

同理有

$$u^2(x) \leqslant 2u^2(x'') + 2J_m h^2 \sum_{1\leqslant i_m(y)\leqslant i_m(x)} u_{x_m}^2(y),\quad x''\in\Gamma_{h,m}^+.$$

把以上两式相加，并对一切 m 和 $x\in\Omega_h$ 求和，即得所证.

显然，本引理是对 Poincaré 不等式(见 Соболев (1950) 的离散模拟. 如果在 Γ_h 的子集，例如 $\Gamma_{h,1}^-$ 上，$u(x)=0$，则

$$u(x) = \sum_{1\leqslant i_m(y)\leqslant i_m(x)} hu_{\bar{x}_m}(y),$$

从而

$$u^2(x) \leqslant 2J_m h^2 \sum_{1\leqslant i_m(y)\leqslant J_m-1} u_{\bar{x}_m}^2(y)\ \text{等等},$$

并由此得到

$$\|u\|^2 \leqslant c_2|u|_1^2.$$

引理 4.5 若 $n=1$，$\Omega_h=\{x/h\leqslant x\leqslant Jh-h\}$，$u(0)=$ 或 $u(Jh)=0$，则有

(i) $\|u\|_\infty \leqslant \sqrt{2Jh}\,|u|_1$，

(ii) $\|u\|_{l^p} \leqslant \sqrt{2}\,(Jh)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}|u|_1$.

证明 设 $u(0)=0$，则对一切 $1\leqslant j\leqslant J-1$，

$$(u(jh))^2 = \left(h\sum_{\sigma=1}^{j} u_{\bar{x}}(\sigma h)\right)^2 \leqslant \sum_{\sigma=1}^{j} h \sum_{\sigma=1}^{j} h|u_{\bar{x}}(\sigma h)|^2$$

$$\leqslant Jh\|u_{\bar{x}}\|^2 \leqslant 2Jh|u|_1^2,$$

由此即得 (i). 又因为

$$|u(jh)|^p \leqslant \|u\|_\infty^p \leqslant (\sqrt{2Jh}|u|_1)^p,$$

所以

$$\|u\|_{l^p}^p \leqslant (\sqrt{2Jh}|u|_1)^p \sum_{1\leqslant j\leqslant J} h \leqslant 2^{\frac{p}{2}}(Jh)^{1+\frac{p}{2}}|u|_1^p,$$

并由此得到 (ii).

注记 4.1 若 $u(0)=u(Jh)=0$,则有

$$\|u\|_\infty \leqslant \sqrt{Jh}|u|_1, \quad \|u\|_{l^p} \leqslant (Jh)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}|u|_1.$$

引理 4.6 若 $n=2$,在 $\Gamma_{h,1}$ 上 $u(x)=0$,在 $\Gamma_{h,2}$ 上 $v(x)=0$,则

$$\|uv\|^2 \leqslant 4\|u\|\|v\||u|_1|v|_1.$$

证明 我们有

$$\max_{j_2(x)} u^2(x) = \max_{j_1(x)} \sum_{j_1(y)\leqslant j_1(x)} h(u^2(y))_{\bar{y}_1}$$

$$\leqslant \sum_{j_1(y)} h(|u(y)|+|u(y-he_1)|)|u_{\bar{y}_1}(y)|,$$

其中 $\sum\limits_{j_1(y)}$ 是关于 Ω_h 上的全部 $j_1(y)$ 求和而保持 $j_2(y)$ 不变. 同理有

$$\max_{j_1(x)} u^2(x) \leqslant \sum_{j_1(y)} h(|u(y)|+|u(y+he_1)|)|u_{y_1}(y)|,$$

所以

$$h\sum_{j_2(x)}\max_{j_1(x)} u^2(x) \leqslant 2\|u\||u|_1. \tag{4.46}$$

同理有

$$h\sum_{j_1(x)}\max_{j_2(x)} v^2(x) \leqslant 2\|v\||v|_1.$$

因此

$$\|uv\|^2 \leqslant \sum_{j_2(x)} h\max_{j_1(x)} u^2(x)\cdot\sum_{j_1(x)} h\max_{j_2(x)} v^2(x) \leqslant 4\|u\|\|v\||u|_1|v|_1.$$

注记 4.2 在引理 4.6 的条件下

$$\|u\|_{l^3}^3 \leqslant \|u\|\|u\|_{l^4}^2 \leqslant 2\|u\|^2|u|_1.$$

如果 u, v 仅在 Γ_h 的子集上为零，例如在 $\Gamma_{h,1}^{+}$ 上，$u(x)=0$；在 $\Gamma_{h,2}^{-}$ 上，$v(x)=0$,则有

$$\|uv\|^2 \leqslant 8\|u\|\|v\|\,|u|_1|v|_1.$$

$$\|u\|_{l^4}^4 \leqslant 2\sqrt{2}\,\|u\|^2|u|_1.$$

引理 4.7 若 $n=3$，$u(x)$ 在 Γ_{h,m_1} 和 Γ_{h,m_2} 上为零，$v(x)$ 在 Γ_{h,m_1} 和 Γ_{h,m_3} 上为零，则当 $m_2 \neq m_3$ 时，

$$\|uv\|^2 \leqslant 8\|u\|^{\frac{1}{2}}\|v\|^{\frac{1}{2}}|u|_1^{3/2}|v|_1^{3/2}.$$

证明 不妨设 $m_1=1$，$m_2=2$，$m_3=3$,于是由引理 4.6 得到

$$\|uv\|^2 = \sum_{i_1(x)} h\left(\sum_{i_2(x)}\sum_{i_3(x)} h^2u^2(x)v^2(x)\right)$$

$$\leqslant 2h\sum_{i_1(x)}\left(\sqrt{\sum_{i_2(x)}\sum_{i_3(x)} h^2u^2(x)}\cdot\sqrt{\sum_{i_2(x)}\sum_{i_3(x)} h^2v^2(x)}\right.$$

$$\cdot\sqrt{\sum_{i_2(x)}\sum_{i_3(x)} h^2(u_{x_2}^2(x)+u_{\bar{x}_2}^2(x)+u_{x_3}^2(x)+u_{\bar{x}_3}^2(x))}$$

$$\left.\cdot\sqrt{\sum_{i_2(x)}\sum_{i_3(x)} h^2(v_{x_2}^2(x)+v_{\bar{x}_2}^2(x)+v_{x_3}^2(x)+v_{\bar{x}_3}^2(x))}\right)$$

$$\leqslant 4\max_{i_1(x)}\sqrt{\sum_{i_2(x)}\sum_{i_3(x)} h^2u^2(x)}\sqrt{\sum_{i_2(x)}\sum_{i_3(x)} h^2v^2(x)}\,|u|_1|v|_1$$

$$\leqslant 4\sqrt{\sum_{i_2(x)}\sum_{i_3(x)} h^2\max_{i_1(x)} u^2(x)}\sqrt{\sum_{i_2(x)}\sum_{i_3(x)} h^2\max_{i_1(x)} v^2(x)}\,|u|_1|v|_1$$

再次应用证明(4.46)的技巧,即得到所证的结论.

注记 4.3 在引理 4.7 的条件下,我们有

$$\|u\|_{l^4}^4 \leqslant 2\sqrt{2}\,\|u\|^{\frac{1}{2}}|v|_1^{3/2}.$$

若 u, v 仅在 $\Gamma_{h,m}$ 的部分子集上为零,有时仍可得到类似的不等式.

引理 4.8 若 $n=3$,并在 Γ_h 上 $u(x)=0$,则

$$\|u\|_{l^6} \leqslant \sqrt[3]{36}\,|u|_1.$$

证明 不妨设 $u \geqslant 0$,并记 $J(u)=\|u\|_{l^6}^6$,于是

$$J(u) \leqslant h\sum_{i_1(x)}\left[\max_{i_1(x)}\sum_{i_3(x)} hu^3(x)\cdot\sum_{i_2(x)} h\max_{i_3(x)} u^3(x)\right]. \quad (4.47)$$

不难验证

$$\max_{i_3(x)} u^3(x) = \max_{i_3(x)} \sum_{i_3(y) \le i_3(x)} h(u^3(y))_{\bar{y}_3},$$

$$(u^3(y))_{\bar{y}_3} = u^2(y) u_{\bar{y}_3}(y) + (u^2(y))_{\bar{y}_3} u(y - he_3)$$
$$= u^2(y) u_{\bar{y}_3}(y) + u(y) u(y - he_3) u_{\bar{y}_3}(y) + u^2(y - he_3) u_{\bar{y}_3}(y).$$

类似地可用向前差商来表达 $\max\limits_{i_3(x)} u^3(x)$，并得到

$$h \sum_{i_1(x)} \max_{i_3(x)} u^3(x) \le 3 \sqrt{\sum_{i_2(x)} \sum_{i_3(x)} h^2 u^4(x)}$$
$$\cdot \sqrt{\frac{h^2}{2} \sum_{i_1(x)} \sum_{i_3(x)} (u^2_{x_3}(x) + u^2_{\bar{x}_3}(x))}.$$

类似地可估计 $\max\limits_{i_2(x)} \sum\limits_{i_3(x)} hu^3(x)$. 把它们代入 (4.47) 后得到

$$J(u) \le 9h \sum_{i_1(x)} \Big[\sum_{i_2(x)} \sum_{i_3(x)} h^2 u^4(x) \cdot \Big(\frac{h^2}{2} \sum_{i_2(x)} \sum_{i_4(x)}$$
$$\cdot (u^2_{x_2}(x) + u^2_{\bar{x}_2}(x)) \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{h^2}{2} \sum_{i_2(x)} \sum_{i_3(x)} (u^2_{x_3}(x)$$
$$+ u^2_{\bar{x}_3}(x)) \Big)^{\frac{1}{2}} \Big] \le 9 \max_{i_1(x)} \Big(\sum_{i_2(x)} \sum_{i_3(x)} h^2 u^4(x) \Big)$$
$$\cdot \Big(\frac{1}{2} \|u_{x_2}\|^2 + \frac{1}{2} \|u_{\bar{x}_2}\|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{1}{2} \|u_{x_3}\|^2 + \frac{1}{2} \|u_{\bar{x}_3}\|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

因为

$$\max_{i_1(x)} u^4(x) \le \max_{i_1(x)} \sum_{i_1(y) \le i_1(x)} h[u^4(y)]_{\bar{y}_1},$$

所以对它进行适当估计后即有

$$J(u) \le 36 \sqrt{J(u)} \cdot \prod_{m=1}^{3} \Big(\frac{1}{2} \|u_{x_m}\|^2 + \frac{1}{2} \|u_{\bar{x}_m}\|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$\le 36 \sqrt{J(u)} \cdot \sum_{m=1}^{3} \Big(\frac{1}{2} \|u_{x_m}\|^2 + \frac{1}{2} \|u_{\bar{x}_m}\|^2 \Big)^{\frac{3}{2}}.$$

两边约去 $\sqrt{J(u)}$，即得所证的不等式.

引理 4.6—4.8 的优点是系数与区域的直径无关，它们是 Лалыженская (1961) 有关结果的离散模拟.

对于一般函数 $u(x)$，则存在仅与区域有关的正常数 c_3，使得对一切 $\mu \leqslant \mu_0$，$\frac{1}{\mu_0} = \frac{1}{p} - \frac{q}{n}$，都有

$$\|u\|_{l^\mu} \leqslant c_3 \|u\|_{w_h^{q,p}}. \tag{4.48}$$

这就是离散嵌入定理. 特别若 $u(x)$ 有紧致支集,则

$$\|u\|_{l^\mu} \leqslant c_4 |u|_{q,l^p}. \tag{4.49}$$

若 $\bar{\Omega}_h^{(1)} \subset \Omega_h$，则记 $\Omega_h^{(1)} \Subset \Omega_h$. 如果 $\bar{\Omega}_h^{(1)}$ 与 Γ_h 的距离是 h 的适当倍数,那末有

$$\|u\|_{\infty, \Omega_h^{(1)}} \leqslant c_5 \|u\|_{w_h^{\beta,p}}, \quad \beta = \left[\frac{n}{p}\right] + 1. \tag{4.50}$$

如果对区域附加某些正规性条件,则(见 Соболев (1940))

$$\|u\|_{\infty, \Omega_h} \leqslant c_6 \|u\|_{w_h^{\beta,p}}. \tag{4.51}$$

下面讨论对低维流形的嵌入问题.

引理 4.9 假设 $\mathscr{D}_h$ 是 Ω_h 中的适当正规的 $n-1$ 维流形，$\varepsilon > 0$，则存在正常数 c_7，使得当 h 适当小时，

$$h^{n-1} \sum_{x \in \mathscr{D}_h} u^2(x) \leqslant \varepsilon |u|_1^2 + \frac{c_7}{\varepsilon} \|u\|^2.$$

证明 不妨设 $n = 1$，$n \geqslant 2$ 时的证明是类似的. 我们有

$$\begin{aligned}
u^2(jh) &= u^2(lh) - h \sum_{\sigma=j+1}^{l} (u^2(\sigma h))_{\bar{x}} \\
&= u^2(lh) - h \sum_{\sigma=j+1}^{l} (u(\sigma h) + u(\sigma h - h)) u_{\bar{x}}(\sigma h) \\
&\leqslant u^2(lh) + \varepsilon_1 h \sum_{\sigma=j+1}^{l} u_{\bar{x}}^2(\sigma h) + \frac{h}{2\varepsilon_1} u^2(jh) \\
&\quad + \frac{h}{2\varepsilon_1} u^2(lh) + \frac{h}{\varepsilon_1} \sum_{\sigma=j+1}^{l} u^2(\sigma h),
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{h}{2\varepsilon_1}\right) u^2(jh) &\leqslant \left(1 + \frac{h}{2\varepsilon_1}\right) u^2(lh) \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon_1} \|u\|^2 + \varepsilon_1 \|u_{\bar{x}}\|^2,
\end{aligned}$$

类似地有

$$\left(1-\frac{h}{2\varepsilon_1}\right)u^2(jh)\leqslant\left(1+\frac{h}{2\varepsilon_1}\right)u^2(lh)$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_1}\|u\|^2+\varepsilon_1\|u_x\|^2.$$

把以上两式相加后对一切 l 求和，即得到

$$u^2(jh)\leqslant\varepsilon|u|_1^2+\frac{c_8}{\varepsilon}\|u\|^2.$$

由此即得到结论.

特别有

$$\|u\|_{\Gamma_h}^2\leqslant\varepsilon|u|_1^2+\frac{c_9}{\varepsilon}\|u\|^2,\tag{4.52}$$

$$\|u\|_{\partial\Omega_h}^2\leqslant\varepsilon|u|_1^2+\frac{c_9}{\varepsilon}\|u\|^2.\tag{4.53}$$

下面来建立一些与 $\Delta_h^{(\nu)}u(x)$ 有关的关系式.

引理 4.10 对一切网格函数 $u(x)$, $v(x)$ 和 $\nu(x)$，都有

(i) $2(u,\Delta_h^{(\nu)}v)+\sum\limits_{m=1}^{n}[(\nu u_{x_m},v_{x_m})+(\nu u_{\bar{x}_m},v_{\bar{x}_m})]$

$\quad=2B^{(\nu)}(u,v)$,

(ii) $(u,\Delta_h^{(\nu)}v)-(v,\Delta_h^{(\nu)}u)=B^{(\nu)}(u,v)-B^{(\nu)}(v,u)$.

证明 为方便计，不妨设 $\Omega_h=\{x/h\leqslant x_m\leqslant J_mh-h\}$，并把 $u(x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots x_n)$ 简记为 $u(\bar{x},x_m)$. 由 Abel 公式得

$$h\sum_{i_m(x)=1}^{J_m-1}((\nu(x)v_{x_m}(x))_{\bar{x}_m}u(x)+\nu(x)u_{x_m}(x)v_{x_m}(x))$$
$$=\nu(\bar{x},J_mh-h)u(\bar{x},J_mh)v_{x_m}(\bar{x},J_mh-h)$$
$$\quad-\nu(\bar{x},0)u(\bar{x},h)v_{x_m}(\bar{x},0).$$

同理有

$$h\sum_{i_m(x)=1}^{J_m-1}((\nu(x)v_{\bar{x}_m}(x))_{x_m}u(x)+\nu(x)u_{\bar{x}_m}(x)v_{\bar{x}_m}(x))$$
$$=\nu(\bar{x},J_mh)u(\bar{x},J_mh-h)v_{\bar{x}_m}(\bar{x},J_mh)$$

$$- \nu(\bar{x}, h)u(\bar{x}, 0)v_{\bar{x}_m}(\bar{x}, h).$$

把以上两式相加即得到

$$h \sum_{i_m(x)=1}^{J_m-1} (2u(x)\Delta_{h,m}^{(\nu)}v(x) + \nu(x)u_{x_m}(x)v_{x_m}(x)$$
$$+ \nu(x)u_{\bar{x}_m}(x)v_{\bar{x}_m}(x)) = (\nu(\bar{x}, J_m h - h)u(\bar{x}, J_m h)$$
$$+ \nu(\bar{x}, J_m h)u(\bar{x}, J_m h - h))v_n(\bar{x}, J_m h)$$
$$+ (\nu(\bar{x}, 0)u(\bar{x}, h) + \nu(\bar{x}, h)u(\bar{x}, 0))v_n(\bar{x}, 0).$$

用 h^{n-1} 乘上式，并对 $i_{m'}(x)$ 求和，$m' \neq m$，则得到

$$2(u, \Delta_{h,m}^{(\nu)}v) + (\nu u_{x_m}, v_{x_m}) + (\nu u_{\bar{x}_m}, v_{\bar{x}_m}) = 2B_m^{(\nu)}(u, v), \tag{4.54}$$

再把上式对 m 求和，即得结论 (i)。

在 (i) 中交换 u 和 v 的位置，然后与原式相减，即得结论 (ii)。

注记 4.4　若下面两个条件之一成立

(i) v_n 在 Γ_h 上为零，

(ii) u, v 和 ν 是周期的，

则　　$B_m^{(\nu)}(u, v) = 0$，从而由 (4.54) 得到

$$2(u, \Delta_h^{(\nu)}v) + \sum_{m=1}^{n} [(\nu u_{x_m}, v_{x_m}) + (\nu u_{\bar{x}_m}, v_{\bar{x}_m})] = 0, \tag{4.55}$$

$$(u, \Delta_h^{(\nu)}v) = (v, \Delta_h^{(\nu)}u). \tag{4.56}$$

特别有

$$(u, \Delta_h^{(\nu)}u) + (|u|_1^{(\nu)})^2 = 0. \tag{4.57}$$

注记 4.5　如果 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在 Γ_h 上为零，则

$$2B_m^{(\nu)}(u, v) = h^{n-1} \sum_{x \in \Gamma_{h,m}} \nu(x)u(x - he_m)v_n(x)$$

$$+ h^{n-1} \sum_{x \in \Gamma_{h,m}} \nu(x)u(x + he_m)v_n(x).$$

由于

$$hv_n(x) = \begin{cases} -v(x - he_m), & 当 \ x \in \Gamma_{h,m}^+, \\ -v(x + he_m), & 当 \ x \in \Gamma_{h,m}^-, \end{cases}$$

故代入 (4.54) 后得到

$$2(u,\Delta_{h,m}^{(\nu)}v)+(\nu u_{x_m},v_{x_m})+(\nu u_{\bar{x}_m},v_{\bar{x}_m})+2S_m^{(\nu)}(u,v)=0,$$

并由此推得

$$2(u,\Delta_h^{(\nu)}v)+\sum_{m=1}^{n}((\nu u_{x_m},v_{x_m})$$
$$+(\nu u_{\bar{x}_m},v_{\bar{x}_m}))+2S^{(\nu)}(u,v)=0. \tag{4.58}$$

$$(u,\Delta_h^{(\nu)}u)+(|u|_1^{(\nu)})^2+S^{(\nu)}(u,u)=0. \tag{4.59}$$

若 $\nu(x)\geqslant\nu_0>0$，则结合 (4.59) 和引理 4.4 得到

$$|u|_1^{(\nu)}\leqslant\sqrt{\frac{c_1}{\nu_0}}\|\Delta_h^{(\nu)}u\|. \tag{4.60}$$

引理 4.11 若 Ω_h 适当正规且有界，并在 Γ_h 上 $u(x)=v(x)=0$，则

$$4(\Delta_h u,\Delta_h v)=\sum_{l=1}^{n}\Big\{\sum_{\substack{1\leqslant m\leqslant n\\ m\neq l}}[(u_{x_lx_m},v_{x_lx_m})+2(u_{x_l\bar{x}_m},v_{x_l\bar{x}_m})$$
$$+(u_{\bar{x}_l\bar{x}_m},v_{\bar{x}_l\bar{x}_m})]+(u_{x_lx_l},v_{x_lx_l})_{\Omega_h/\Omega_{h,l}^{*,+}}$$
$$+2(u_{x_l\bar{x}_l},v_{x_l\bar{x}_l})+(u_{\bar{x}_l\bar{x}_l},v_{\bar{x}_l\bar{x}_l})_{\Omega_h/\Omega_{h,l}^{*,+}}\Big\}+h^n\sum_{l=1}^{n}$$
$$\sum_{x\in\Omega_{h,l}}\Delta_{h,l}u(x)\Delta_{h,l}v(x)+4\sum_{l=1}^{n}\sum_{\substack{1\leqslant m\leqslant n\\ m\neq l}}(S_m(u_{x_l},v_{x_l})$$
$$+S_m(u_{\bar{x}_l},v_{\bar{x}_l}))+h^{n-4}\sum_{l=1}^{n}\sum_{\substack{1\leqslant m\leqslant n\\ m\neq l}}\sum_{x\in\Omega_{h,l}^*\cap\Omega_{h,m}^*}u(x)v(x).$$

证明 为方便计，设 $\Omega_h=\{x/h\leqslant x_m\leqslant J_mh-h\}$. 由 (4.54) 得

$$4(\Delta_h u,\Delta_{h,l}v)=-2(\Delta_h u_{x_l},v_{x_l})-2(\Delta_h u_{\bar{x}_l},v_{\bar{x}_l})$$
$$+4B_l(\Delta_h u,v).$$

应用引理 4.10 得到

$$4(\Delta_h u,\Delta_{h,l}v)=F_0+G_0-2\sum_{m=1}^{n}(B_m(v_{x_l},u_{x_l})$$
$$+B_m(v_{\bar{x}_l},u_{\bar{x}_l}))+4B_l(\Delta_h u,v), \tag{4.61}$$

其中

$$F_0 = \sum_{\substack{1 \le m \le n \\ m \ne l}} (\{u_{x_l x_m}, v_{x_l x_m}) + (u_{x_l \bar{x}_m}, v_{x_l \bar{x}_m})$$
$$+ (u_{\bar{x}_l x_m}, v_{\bar{x}_l x_m}) + (u_{\bar{x}_l \bar{x}_m}, v_{\bar{x}_l \bar{x}_m})\}$$
$$+ (u_{x_l x_l}, v_{x_l x_l})_{\Omega_h / \Omega^{*,+}_{h,l}} + 2(u_{x_l \bar{x}_l}, v_{\bar{x}_l x_l})$$
$$+ (u_{\bar{x}_l \bar{x}_l}, v_{\bar{x}_l \bar{x}_l})_{\Omega_h / \Omega^{*,-}_{h,l}}.$$
$$G_0 = h^n \sum_{x \in \Gamma_{h,l}} \Delta_{h,l} u(x) \Delta_{h,l} v(x).$$
若 $l \ne m$，则在 $\Gamma_{h,m}$ 上有 $v_{x_l} = v_{\bar{x}_l} = u_{x_l} = u_{\bar{x}_l} = 0$，所以
$$-2B_m(v_{x_l}, u_{x_l}) - 2B_m(v_{\bar{x}_l}, u_{\bar{x}_l})$$
$$= 2S_m(v_{x_l}, u_{x_l}) + 2S_m(v_{\bar{x}_l}, u_{\bar{x}_l}). \tag{4.62}$$
当 $l = m$ 时，
$$\begin{cases} -2B_l(v_{x_l}, u_{x_l}) = F_1 + G_1, \\ -2B_l(v_{\bar{x}_l}, u_{\bar{x}_l}) = F_2 + G_2, \end{cases} \tag{4.63}$$
其中
$$F_1 = -h^{n-1} \sum_{x \in \Gamma^+_{h,l}} (v_{x_l}(x) + v_{\bar{x}_l}(x)) \Delta_{h,l} u(x),$$
$$G_1 = h^{n-1} \sum_{x \in \Omega^{*,-}_{h,l}} (v_{x_l}(x) + v_{\bar{x}_l}(x)) \Delta_{h,l} u(x),$$
$$F_2 = -h^{n-1} \sum_{x \in \Omega^{*,+}_{h,l}} (v_{x_l}(x) + v_{\bar{x}_l}(x)) \Delta_{h,l} u(x),$$
$$G_2 = h^{n-1} \sum_{x \in \Gamma^-_{h,l}} (v_{x_l}(x) + v_{\bar{x}_l}(x)) \Delta_{h,l} u(x).$$
又当 $m \ne l$ 时，
$$4B_l(\Delta_{h,m} u, v) = -2h^{n-2} \sum_{x \in \Omega^*_{h,l}} \Delta_{h,m} u(x) v(x)$$
$$= h^{n-2} \sum_{x \in \Omega^*_{h,l}} (u_{x_m} v_{x_m} + u_{\bar{x}_m} v_{\bar{x}_m})$$
$$+ h^{n-4} \sum_{x \in \Omega^*_{h,l} \cap \Omega^*_{h,m}} u(x) v(x). \tag{4.64}$$

当 $m=l$ 时，则有

$$4B_l(\Delta_{h,l}u,v)=F_3+G_3,\tag{4.65}$$

其中

$$F_3=-2h^{n-2}\sum_{x\in\Gamma_{h,l}^+}(\Delta_{h,l}u(x)+\Delta_{h,l}u(x-he_l))v(x-he_l),$$

$$G_3=-2h^{n-2}\sum_{x\in\Gamma_{h,l}^-}(\Delta_{h,l}u(x)+\Delta_{h,l}u(x+he_l))v(x+he_l).$$

利用边界条件得到

$$F_1+F_2+F_3=-h^n\sum_{x\in\Gamma_{h,l}^+}\Delta_{h,l}v(x)\Delta_{h,l}u(x)$$

$$+h^n\sum_{x\in\Omega_{h,l}^{*,+}}\Delta_{h,l}v(x)\Delta_{h,l}u(x),$$

$$G_1+G_2+G_3=-h^n\sum_{x\in\Gamma_{h,l}^-}\Delta_{h,l}v(x)\Delta_{h,l}u(x)$$

$$+h^n\sum_{x\in\Omega_{h,l}^{*,-}}\Delta_{h,l}v(x)\Delta_{h,l}u(x).$$

把 (4.62)—(4.65) 代入 (4.61)，即得到

$$4(\Delta_h u,\ \Delta_{h,l}v)=F_0+h^n\sum_{x\in\Omega_{h,l}^*}\Delta_{h,l}u(x)\Delta_{h,l}v(x)$$

$$+4\sum_{\substack{1\leqslant m\leqslant n\\ m\neq l}}(S_m(u_{x_l},v_{x_l})+S_m(u_{\bar{x}_l},v_{\bar{x}_l}))$$

$$+h^{n-4}\sum_{\substack{1\leqslant m\leqslant n\\ m\neq l}}\ \sum_{x\in\Omega_{h,l}^*\cap\Omega_{h,m}^*}u(x)v(x).$$

把上式对 l 求和，就得到所证的结论.

特别，若在 Γ_h 上 $u(x)=0$，则

$$|u|_2^2\leqslant\|\Delta_h u\|^2.$$

对于适当正规的非直角区域，则有

$$|u|_2^2\leqslant c_{10}\|\Delta_h u\|^2.$$

为了把能量法应用于初值问题，还需要一些与时间 t 有关的

关系式. 在本节中用 $u^k(x)$ 表示在 $t=k\tau$ 时刻 u 的函数值, $u_t^k(x)$, $u_{\bar t}^k(x)$ 和 $u_{\mathring t}^k(x)$ 分别表示对 t 的向前，向后和中心差商.

引理 4.12 对一切网格函数 $u^k(x)$,都有

(i) $2(u^k,u_t^k)=\|u^k\|_t^2-\tau\|u_t^k\|^2$,

(ii) $2(u^k,u_{\bar t}^k)=\|u^k\|_{\bar t}^2+\tau\|u_{\bar t}^k\|^2$,

(iii) $2(u^k,u_{\mathring t}^k)=\|u^k\|_{\mathring t}^2-\dfrac{\tau^2}{2}\|u_t^k\|_{\bar t}^2$,

(iv) $2(u_{\mathring t}^k,u_{t\bar t}^k)=\|u_t^k\|_{\bar t}^2$.

证明 可直接验证

$$2u^k(x)(u^{k+1}(x)-u^k(x))=(u^{k+1}(x))^2-(u^k(x))^2-(u^{k+1}(x)-u^k(x))^2,$$

把上式对一切 $x\in\Omega_h$ 求和即得 (i). 类似地可推得 (ii). 把 (i), (ii) 相加即得 (iii), 把 (i), (ii) 中的 $u^k(x)$ 分别用 $u_t^k(x)$ 和 $u_{\bar t}^k(x)$ 来代替,相加后即得 (iv).

引理 4.13 若 $v^k(x)\geqslant 0$,则

(i) $$2(u_t^k,\Delta_h^{(v)}u^k)+(|u^k|_1^{(v)})_t^2-\tau(|u_t^k|_1^{(v)})^2-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}(v_t^k,(u_{x_m}^{k+1})^2+(u_{\bar x_m}^{k+1})^2)=2B^{(v^k)}(u_t^k,u^k),$$

(ii) $$2(u^k,\Delta_h^{(v)}u_t^k)+(|u^k|_1^{(v)})_t^2-\tau(|u_t^k|_1^{(v)})^2-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}(v_t^k,(u_{x_m}^{k+1})^2+(u_{\bar x_m}^{k+1})^2)=2B^{(v^k)}(u^k,u_t^k).$$

证明 由引理 4.10 得到

$$2(u_t^k,\Delta_h^{(v)}u^k)+\sum_{m=1}^{n}[(v^ku_{tx_m}^k,u_{x_m}^k)+(v^ku_{t\bar x_m}^k,u_{\bar x_m}^k)]=2B^{(v^k)}(u_t^k,u^k). \tag{4.66}$$

由于对一切函数 v^k 和 w^k 都有

$$\begin{aligned}(v^k(w^k)^2)_t&=v^kw^kw_t^k+(v^kw^k)_tw^{k+1}\\&=v^kw^kw_t^k+v_t^k(w^{k+1})^2+v^kw_t^kw^{k+1}\\&=2v^kw^kw_t^k+v_t^k(w^{k+1})^2+\tau v^k(w_t^k)^2,\end{aligned} \tag{4.67}$$

因此

$$v^k(x)u_{tx_m}^k(x)u_{\bar{x}_m}^k(x)=\frac{1}{2}\left(v^k(x)(u_{\bar{x}_m}^k(x))^2\right)_t$$

$$-\frac{\tau}{2}v^k(x)(u_{t\bar{x}_m}^k(x))^2-\frac{1}{2}v_t^k(x)(u_{\bar{x}_m}^{k+1}(x))^2.$$

类似地可计算 $v^k(x)u_{t\bar{x}_m}^k(x)u_{\bar{x}_m}^k(x)$，把它们代入 (4.66) 即得第一个结论．结合引理 4.10 中的 (ii) 则得到第二个结论．

注记 4.6　若在 Γ_h 上 $u_n^k(x)=0$,或者 $u^k(x)$ 和 $v^k(x)$ 对 x 满足周期条件，那末

$$B^{(v^k)}(u_t^k,u^k)=B^{(v^k)}(u^k,u_t^k)=0,$$

因此

$$(u_t^k,\Delta_h^{(v)}u^k)=(u^k,\Delta_h^{(v)}u_t^k),$$

并且

$$2(u_t^k,\Delta_h^{(v)}u^k)+(|u^k|_1^{(v)})_t^2-\tau(|u_t^k|_1^{(v)})^2$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}(v_t^k,(u_{x_m}^{k+1})^2+(u_{\bar{x}_m}^{k+1})^2)=0.$$

注记 4.7　若在 Γ_h 上 $u^k(x)=0$,那末

$$2B_m^{(v^k)}(u_t^k,u^k)=-h^{n-2}\sum_{x\in\Gamma_{h,m}}v^k(x)u_t^k(x-he_m)$$

$$\cdot u^k(x-he_m)-h^{n-2}\sum_{x\in\Gamma_{h,m}}v^k(x)u_t^k$$

$$\cdot(x+he_m)u^k(x+he_m).$$

由 (4.67) 得到

$$v^k(x)u_t^k(x\pm he_m)u^k(x\pm he_m)=\frac{1}{2}\{v^k(x)(u^k(x\pm he_m))^2\}_t$$

$$-\frac{\tau}{2}v^k(x)(u_t^k(x\pm he_m))^2-\frac{1}{2}v_t^k(x)(u^{k+1}(x\pm he_m))^2,$$

因此

$$-2B^{(v^k)}(u_t^k,u^k)=S^{(v^k)}(u^k,u^k)_t$$

$$-\tau S^{(v^k)}(u_t^k,u_t^k)-S^{(v_t^k)}(u^{k+1},u^{k+1}),$$

所以　$(u_t^k,\Delta_h^{(v)}u^k)=(u^k,\Delta_h^{(v)}u_t^k)$，并且

$$2(u_t^k,\Delta_h^{(v)}u^k)+(|u^k|_1^{(v)})_t^2-\tau(|u_t^k|_1^{(v)})^2$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}(\nu_{\bar t}^{k},(u_{x_m}^{k+1})^2+(u_{\bar x_m}^{k+1})^2)+S^{(\nu^k)}(u^k,u^k)_t$$

$$-\tau S^{(\nu^k)}(u_{\bar t}^k,u_{\bar t}^k)-S^{(\nu_{\bar t}^k)}(u^{k+1},u^{k+1})=0.$$

引理 4.14 若 $\nu^k(x)\geqslant 0$,则有

$$2(u_{\bar t}^k,\Delta_h^{(\nu)}u^k)+(|u^k|_1^{(\nu)})_{\bar t}^2+\tau(|u_{\bar t}^k|_1^{(\nu)})^2$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}(\nu_{\bar t}^k,(u_{x_m}^{k-1})^2+(u_{\bar x_m}^{k-1})^2)=2B^{(\nu^k)}(u_{\bar t}^k,u^k).$$

注记 4.8 若在 Γ_h 上 $u_n^k(x)=0$,或者 $u^k(x)$ 和 $\nu^k(x)$ 对 x 满足周期条件,则上式右端为零. 若在 Γ_h 上 $u^k(x)=0$,则有

$$2(u_{\bar t}^k,\Delta_h^{(\nu)}u^k)+(|u^k|_1^{(\nu)})_{\bar t}^2+\tau(|u_{\bar t}^k|_1^{(\nu)})^2$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}(\nu_{\bar t}^k,(u_{x_m}^{k-1})^2+(u_{\bar x_m}^{k-1})^2)+S^{(\nu^k)}(u^k,u^k)_{\bar t}$$

$$+\tau S^{(\nu^k)}(u_{\bar t}^k,u_{\bar t}^k)-S^{(\nu_{\bar t}^k)}(u^{k-1},u^{k-1})=0.$$

引理 4.15 若 $\nu^k(x)\geqslant 0$, 则有

$$2(u_{\hat t}^k,\Delta_h^{(\nu)}u^k)+(|u^k|_1^{(\nu)})_{\hat t}^2-\frac{\tau}{2}(|u_t^k|_1^{(\nu)})^2+\frac{\tau}{2}(|u_{\bar t}^k|_1^{(\nu)})^2$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{n}(\nu_t^k,(u_{x_m}^{k+1})^2+(u_{\bar x_m}^{k+1})^2)-\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{n}(\nu_{\bar t}^k,(u_{x_m}^{k-1})^2$$

$$+(u_{\bar x_m}^{k-1})^2)=2B^{(\nu^k)}(u_{\hat t}^k,u^k).$$

注记 4.9 若在 Γ_h 上 $u_n^k(x)=0$,或者 $u^k(x)$ 和 $\nu^k(x)$ 对 x 满足周期条件,则上式右端为零. 若在 Γ_h 上 $u^k(x)=0$,则

$$2(u_{\hat t}^k,\Delta_h^{(\nu)}u^k)+(|u^k|_1^{(\nu)})_{\hat t}^2-\frac{\tau}{2}(|u_t^k|_1^{(\nu)})^2+\frac{\tau}{2}(|u_{\bar t}^k|_1^{(\nu)})^2$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{n}(\nu_t^k,(u_{x_m}^{k+1})^2+(u_{\bar x_m}^{k+1})^2)-\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{n}(\nu_{\bar t}^k,(u_{x_m}^{k-1})^2$$

$$+(u_{\bar x_m}^{k-1})^2)+S^{(\nu^k)}(u^k,u^k)_{\hat t}-\frac{\tau}{2}S^{(\nu^k)}(u_t^k,u_t^k)$$

$$+\frac{\tau}{2}S^{(\nu^k)}(u_{\bar t}^k,u_{\bar t}^k)-\frac{1}{2}S^{(\nu_t^k)}(u^{k+1},u^{k+1})$$

$$-\frac{1}{2}S^{(\nu_{\bar t}^k)}(u^{k-1},u^{k-1})=0.$$

今后还经常使用下列引理(郭本瑜(1977))。

引理 4.16 设 E^k 是非负网格函数，τ，d，g_0，T，M 都是正常数，$\omega(T)$ 是 T 的不减非负函数，并且满足下列条件：

(i) 若对一切 $\xi\leqslant k-1$，$E^\xi\leqslant d$，则

$$F_E(k-1)=F_E(E^0,E^1,\cdots,E^{k-1})\leqslant ME^{k-1},$$

$$G_E(k)=G_E(E^0,E^1,\cdots,E^k)\geqslant g_0E^k,$$

(ii) 对一切 $1\leqslant k\leqslant\left[\frac{T}{\tau}\right]$，

$$G_E(k)\leqslant\omega(T)+\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}F_E(\xi),$$

(iii) $g_0E^0\leqslant\omega(T)\leqslant dg_0e^{-\frac{MT}{g_0}}$，

那末，当 $k\leqslant\left[\frac{T}{\tau}\right]$ 时，

$$E^k\leqslant\frac{\omega(T)}{g_0}e^{MT/g_0}.$$

证明 作辅助函数 ϕ^k，

$$\begin{cases}g_0\phi^k=\omega(T)+M\tau\sum\limits_{\xi=0}^{k-1}\phi^\xi,\ \xi\geqslant 1,\\ \phi^0=\dfrac{\omega(T)}{g_0},\end{cases}$$

于是当 $k\leqslant\left[\frac{T}{\tau}\right]$ 时，

$$\phi^k\leqslant\frac{\omega(T)}{g_0}e^{\frac{MT}{g_0}}\leqslant d.$$

显然有 $E^0\leqslant\phi^0$. 假设当 $\xi\leqslant k-1$ 时 $E^\xi\leqslant\phi^\xi$，那末

$$g_0E^k\leqslant\omega(T)+M\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}E^\xi\leqslant\omega(T)$$

$$+M\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}\phi^\xi=g_0\phi^k,$$

从而 $E^k\leqslant\phi^k$.

注记 4.10 一种常用的情况是 $G_E(k)=E^k$，

$$F_E(k) = c_0(1+\sum_{l=1}^{N_1} (E^k)^{a_l}h^{-b_l})E^k + \sum_{l=1}^{N_2} H_l(E^0, \cdots E^k),$$

并且若对一切 $\xi \leqslant k$, $E^\xi \leqslant c_l h^{d_l}$, 则 $H_l(E^0, \cdots E^k) \geqslant 0$, 其中 a_l, c_l 是非负常数, b_l, d_l 是常数, N_1 和 N_2 是非负整数, 那末, 当

$$\omega(T)e^{c_0T(N_1+1)} \leqslant \min(\min_{1\leqslant l\leqslant N_1} h^{\frac{b_l}{a_l}}, \min_{1\leqslant l\leqslant N_2} c_l h^{d_l})$$

时, 对一切 $k\tau \leqslant T$, 都有

$$E^k \leqslant \omega(T)e^{c_0T(N_1+1)}. \qquad (4.68)$$

若 $b_l = d_l = 0$, 则当 $k\tau \leqslant T$, $\omega(T)e^{c_0T(N_1+1)} \leqslant \min(1, \min_{1\leqslant l\leqslant N_1} c_l)$ 时, (4.68) 成立.

如果 $N_1 = N_2 = 0$, 则对一切 $\omega(T)$ 和 k, (4.68) 成立.

上述引理适用于初, 边值问题的显式差分格式. 下面的引理, 则适用于隐式格式.

引理 4.17 设 E^k 是非负网格函数, τ, d, g_0, T, M 都是正常数, $d_0 \geqslant 0$, $g_1 \geqslant 0$, $0 < g_2 < g_0$, $\omega(T)$ 是 T 的不减非负函数, 并且满足下列条件:

(i) 若对一切 $\xi \leqslant k-1$, $E^\xi \leqslant d$, 则

$F_E(k-1) = F_E(E^0, E^1, \cdots E^{k-1}) \leqslant ME^{k-1}$,

$G_E(k) = G_E(E^0, E^1, \cdots E^k) \geqslant g_0E^k - g_1(E^k)^2$,

(ii) 对一切 $1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{T}{\tau}\right]$,

$$G_E(k) \leqslant \omega(T) + \tau\sum_{\xi=0}^{k-1} F_E(\xi),$$

(iii) $g_0E^0 \leqslant \omega(T) \leqslant \frac{1}{4g_1} e^{-2MT/g_2}\min(g_0^2, 2g_1g_2d)$,

(iv) $E^k \leqslant d_0$, $g_0 > g_1d_0 + \frac{g_1g_2d}{g_0}$,

那末, 当 $k \leqslant \left[\frac{T}{\tau}\right]$ 时,

$$E^k \leqslant \frac{2\omega(T)}{g_2} e^{2MT/g_2}.$$

证明 作辅助函数 ψ^k,

$$\begin{cases} g_2\psi^k = \omega(T) + 2M\tau \sum_{\xi=0}^{k-1} \psi^\xi, \ k \geqslant 0, \\ \psi^0 = \dfrac{\omega(T)}{g_2}. \end{cases}$$

则当 $k \leqslant \left[\dfrac{T}{\tau}\right]$ 时,

$$0 \leqslant \psi^k \leqslant \frac{\omega(T)}{g_2} e^{2MT/g_2}.$$

显然有 $E^0 \leqslant \psi^0$. 假设当 $\xi \leqslant k-1$ 时, $E^\xi \leqslant 2\psi^\xi$, 则 $E^\xi \leqslant d$, 并由此得到

$$\begin{aligned} g_0E^k - g_1(E^k)^2 &\leqslant \omega(T) + \tau \sum_{\xi=0}^{k-1} F_E(\xi) \\ &\leqslant \omega(T) + M\tau \sum_{\xi=0}^{k-1} E^\xi \leqslant \omega(T) \\ &\quad + 2M\tau \sum_{\xi=0}^{k-1} \psi^\xi - g_2\psi^k. \end{aligned}$$

因为 $0 \leqslant 4g_1g_2\psi^k \leqslant g_0^2$,所以或者

$$E^k \leqslant \frac{1}{2g_1}\left(g_0 - \sqrt{g_0^2 - 4g_1g_2\psi^k}\right) < \frac{g_0 - g_0\left(1 - \dfrac{4g_1g_2\psi^k}{g_0^2}\right)}{2g_1} = \frac{2g_2\psi^k}{g_0},$$

或者

$$\begin{aligned} E^k &\geqslant \frac{1}{2g_1}\left(g_0 + \sqrt{g_0^2 - 4g_1g_2\psi^k}\right) \\ &> \frac{g_0 + g_0\left(1 - \dfrac{4g_1g_2\psi^k}{g_0^2}\right)}{2g_1} = \frac{g_0}{g_1} - \frac{2g_2\psi^k}{g_0}. \end{aligned}$$

如果后一式成立,则由 $\psi^k \leqslant \dfrac{d}{2}$ 推得 $E^k > d_0$,这与条件 (iv) 相矛

盾．因此只能 $E^k < \dfrac{2g_2\phi^k}{g_0}$，并由此得到

$$E^k \leqslant 2\phi^k \leqslant \frac{2\omega(T)}{g_2} e^{2MT/g_1} \leqslant d.$$

可以采用不同的证明方法得到不同的估计．假设 $E^k \leqslant d_0$，并满足引理 4.17 中的条件 (i)，(ii)．因为

$$g_0E^k - g_1(E^k)^2 > (g_0 - g_1d_0)E^k,$$

所以，如果 $g_3 = g_0 - g_1d_0 > 0$，$g_3E^0 \leqslant \omega(T) \leqslant g_3e^{-\frac{MT}{g_3}}$，则对一切 $k \leqslant \left[\dfrac{T}{\tau}\right]$，

$$E^k \leqslant \frac{\omega(T)}{g_3} e^{\frac{MT}{g_3}}.$$

例 4.4 设 $\mathscr{I}_h = \{x/x = jh,\ 1 \leqslant j \leqslant J-1\}$，$Jh = 1$，并用下式计算 (4.45)，

$$\begin{cases} u_{\bar{t}t}^k(x) - u_{x\bar{x}}^k(x) + b(x)u_{\hat{t}}^k(x) = 0, & x \in \mathscr{I}_h,\ k \geqslant 2, \\ u^k(0) = u^k(1) = 0, & k \geqslant 0, \\ u_{\bar{t}}^1(x) = U_1(x), & x \in \mathscr{I}_h, \\ u^0(x) = U_0(x), & x \in \mathscr{I}_h. \end{cases} \tag{4.69}$$

把第一式与 $2u_{\hat{t}}^k(x)$ 求内积，由引理 4.12 和注记 4.8 得到

$$\|u_{\bar{t}}^k\|_{\bar{t}}^2 + \tau\|u_{\bar{t}t}^k\|^2 + (|u^k|_1^2)_{\bar{t}} + \tau|u_{\bar{t}}^k|_1^2 + S(u^k,u^k)_{\bar{t}}$$

$$+ \tau S(u_{\bar{t}}^k,u_{\bar{t}}^k) + 2h\sum_{x\in\mathscr{I}_h} b(x)(u_{\hat{t}}^k(x))^2 = 0,$$

记

$$E^k = \|u_{\bar{t}}^k\|^2 + |u^k|_1^2 + S(u^k,u^k) + \tau^2\sum_{\xi=2}^{k}$$

$$\cdot (\|u_{\bar{t}t}^\xi\|^2 + |u_{\bar{t}}^\xi|_1^2 + S(u_{\bar{t}}^\xi,u_{\bar{t}}^\xi)),$$

则

$$E^k \leqslant \|U_1\|^2 + |u^1|_1^2 + S(u^1,u^1).$$

由于

$$S(u^1, u^1) \leqslant \frac{1}{2h}[(u^1(h))^2 + (u^1(1-h))^2] \leqslant |u^1|_1^2,$$

并当 $r = \frac{\tau}{h} < \infty$ 时，

$$|u^1|_1^2 \leqslant |U_0 + \tau U_1|_1^2 \leqslant 2|U_0|_1^2 + 2\tau^2|U_1|_1^2$$
$$\leqslant 2|U_0|_1^2 + 8r^2\|U_1\|^2,$$

所以

$$E^k \leqslant 4|U_0|_1^2 + (1 + 16r^2)\|U_1\|^2.$$

由于格式 (4.69) 是线性的，上式也表示解对初值误差按 l^2 范数稳定，从而也对右端误差稳定. 若 $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ 连续，则格式 (4.69) 对 (4.45) 的逼近是相容的，因此也是收敛的.

例 4.5 考虑下列非线性抛物型方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + U^2 - U = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ U(x,0) = U_0(x), & 0 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{4.70}$$

其中 $U_0(x+1) = U_0(x)$.

设 $\mathscr{I}_h$ 如同例 4.4，$Jh = 1 + h$，并用下式计算 (4.70)

$$\begin{cases} u_t^k(x) - u_{x\bar{x}}^k(x) + (u^k(x))^2 - u^k(x) = f^k(x), & x \in \mathscr{I}_h,\ k \geqslant 0, \\ u^k(x+1) = u^k(x), & x \in \mathscr{I}_h,\ k \geqslant 0, \\ u^0(x) = u_0(x), & x \in \mathscr{I}_h. \end{cases} \tag{4.71}$$

假定 $u^k(x)$, $u_0(x)$ 和 $f^k(x)$ 有误差 $\tilde{u}^k(x)$, $\tilde{u}_0(x)$ 和 $\tilde{f}^k(x)$，则它们满足

$$\begin{cases} \tilde{u}_t^k(x) - \tilde{u}_{x\bar{x}}^k(x) + (\tilde{u}^k(x))^2 + 2u^k(x)\tilde{u}^k(x) - \tilde{u}^k(x) = \tilde{f}^k(x), \\ \qquad\qquad x \in \mathscr{I}_h,\ k \geqslant 0, \\ \tilde{u}^k(x+1) = \tilde{u}^k(x), \qquad x \in \mathscr{I}_h,\ k \geqslant 0, \\ \tilde{u}^0(x) = \tilde{u}_0(x), \qquad x \in \mathscr{I}_h. \end{cases} \tag{4.72}$$

把第一式与 $2\tilde{u}^k(x)$ 求内积，由引理 4.12 和 (4.57) 得到

$$\|\tilde{u}^k\|_t^2 - \tau\|\tilde{u}_t^k\|^2 + 2|\tilde{u}^k|_1^2 + 2(\tilde{u}^k, (\tilde{u}^k)^2$$
$$+ 2u^k\tilde{u}^k - \tilde{u}^k) = 2(\tilde{u}^k, \tilde{f}^k).$$

设 m 是适当的正数，把 (4.72) 第一式与 $m\tau\tilde{u}_t^k$ 求内积，由注记 4.6

得到

$$m\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2+\frac{m\tau}{2}(|\tilde{u}^k|_1^2)_t-\frac{m\tau^2}{2}|\tilde{u}_t^k|_1^2+m\tau(\tilde{u}_t^k,(\tilde{u}^k)^2$$
$$+2u^k\tilde{u}^k-\tilde{u}^k)=m\tau(\tilde{u}_t^k,\tilde{f}^k).$$

把以上两式相加，并考虑到由引理 4.2，

$$|(\tilde{u}^k,(\tilde{u}^k)^2)|\leqslant\|\tilde{u}^k\|\|\tilde{u}^k\|_{l^4}^2\leqslant h^{-0.5}\|\tilde{u}^k\|^3,$$
$$|m\tau(\tilde{u}_t^k,(\tilde{u}^k)^2)|\leqslant\varepsilon\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2+\frac{m^2\tau}{4\varepsilon}\|\tilde{u}^k\|_{l^4}^4$$
$$\leqslant\varepsilon\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2+\frac{m^2\tau}{4\varepsilon h}\|\tilde{u}^k\|^4,$$

因此

$$\|\tilde{u}^k\|_t^2+\tau(m-1-\varepsilon)\|\tilde{u}_t^k\|^2+2|\tilde{u}^k|_1^2+\frac{m\tau}{2}(|\tilde{u}^k|_1^2)_t$$
$$-\frac{m\tau^2}{2}|\tilde{u}_t^k|_1^2\leqslant M_1(\|\tilde{u}^k\|^2+\frac{1}{h}\|\tilde{u}^k\|^4+\|\tilde{f}^k\|^2).\qquad(4.73)$$

在本书中用 M_i 表示仅与差分格式解 $u^k(x)$ 有关的正常数．假设 $\lambda=\frac{\tau}{h^2}<\frac{1}{2}$．我们有

$$\frac{m\tau^2}{2}|\tilde{u}_t^k|_1^2\leqslant 2\lambda m\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2.$$

今取 $m=\frac{1+\varepsilon+p_0}{1-2\lambda}$，则由 (4.73) 得到

$$\|\tilde{u}^k\|_t^2+p_0\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2+2|\tilde{u}^k|_1^2+\frac{m\tau}{2}(|\tilde{u}^k|_1^2)_t$$
$$\leqslant M_1(\|\tilde{u}^k\|^2+\frac{1}{h}\|\tilde{u}^k\|^4+\|\tilde{f}^k\|^2).$$

把上式对 $t=0,\tau,\cdots,(k-1)\tau$ 求和后得到

$$\tilde{E}^k\leqslant\tilde{\rho}(k\tau)+M_1\tau\sum_{\zeta=0}^{k-1}\left(\|\tilde{u}^\zeta\|^2+\frac{1}{h}\|\tilde{u}^\zeta\|^4\right)$$
$$\leqslant\tilde{\rho}(k\tau)+M_1\tau\sum_{\zeta=0}^{k-1}\left(1+\frac{1}{h}\tilde{E}^\zeta\right)E^\zeta,$$

其中

$$\tilde{E}^k = \|\tilde{u}^k\|^2 + \frac{m\tau}{2}|\tilde{u}^k|_1^2 + 2\tau\sum_{\zeta=0}^{k-1}|\tilde{u}^\zeta|_1^2 + p_0\tau^2\sum_{\zeta=0}^{k-1}\|\tilde{u}_t^\zeta\|^2,$$

$$\tilde{\rho}(k\tau) = \|\tilde{u}^0\|^2 + \frac{m\tau}{2}|\tilde{u}^0|_1^2 + \tau\sum_{\zeta=0}^{k-1}\|\tilde{f}^\zeta\|^2.$$

最后在注记 4.10 中令 $E^k = \tilde{E}^k$, $\omega(k\tau) = \tilde{\rho}(k\tau)$, $N_1 = 1$, $N_2 = 0$, $a_1 = b_1 = 1$,从而存在正常数 M_2, M_3, M_4,使得当 $\tilde{\rho}(T)e^{M_2T} \leqslant M_3h$ 时,对一切 $k\tau \leqslant T$,都有

$$\tilde{E}^k \leqslant M_4\tilde{\rho}(k\tau)e^{M_2k\tau}. \tag{4.74}$$

事实上,在合适的范数选择下,上面结果表示差分格式具有广义稳定性指标 $s(L_h) \leqslant 0.5$.

如果用 $\tilde{u}^k(x)$ 表示 $u^k(x) - U^k(x)$, $\tilde{f}^k(x)$ 和 $\tilde{u}_0(x)$ 分别表示方程及初值的逼近误差,那末,(4.74) 仍然成立. 由于此时 M_l 仅与 $U^k(x)$ 有关,所以若解适当光滑,使得 M_l 有界,且逼近误差平均值不超过 $\sqrt{M_3h}$, 则格式收敛. 特别若 $\tilde{\rho}(T) = O(h^{2\mu})$, $\mu > 0.5$,则 $\tilde{E}^k = O(h^{2\mu})$.

4.4 非直角坐标问题的能量方法

假设考虑球坐标问题. 记 $\Omega_h^\rho = \{\rho/\rho = jh, j = 0, 1, \cdots\}$, 并定义下列内积和范数.

$$(u, v)_{\Omega_h^\rho} = 4\pi h\sum_{\rho\in\Omega_h^\rho}\left(\rho + \frac{h}{2}\right)^2 u(\rho)v(\rho),$$

$$\|u\|_{\Omega_h^\rho}^2 = (u, v)_{\Omega_h^\rho}, \quad \|u\|_{p,\Omega_h^\rho}^p = 4\pi h\sum_{\rho\in\Omega_h^\rho}\left(\rho + \frac{h}{2}\right)^2|u(\rho)|^p,$$

$$|u|_{1,\Omega_h^\rho}^2 = \|u_\rho\|_{\Omega_h^\rho}^2,$$

其中 u_ρ 表示 u 对 ρ 的向后差商. 又记

$$P_h(u(\rho)) = -u_{\rho\rho}(\rho) - \frac{8(\rho + h)}{(2\rho + h)^2}u_\rho(\rho).$$

我们有下列引理

引理 4.18 若 $u^k(\rho)$ 有紧致支集,则

$$|u|_{1,\Omega_h^\rho}^2 \leqslant \frac{18}{h^2}\|u\|_{\Omega_h^\rho}^2 + \pi h^3(u_\rho(0))^2.$$

证明

$$|u|_{1,\Omega_h^\rho}^2 = \pi h\sum_{j=1}^{\infty}(2j+1)^2(u(jh)-u(jh-h))^2$$

$$+\pi h^3(u_\rho(0))^2 \leqslant 2\pi h\sum_{j=1}^{\infty}(2j+1)^2[(u(jh))^2$$

$$+(u(jh-h))^2]+\pi h^3(u_\rho(0))^2 \leqslant 2\pi h\sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)^2$$

$$\cdot(u(jh))^2+2\pi h\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{2j+3}{2j+1}\right)^2(2j+1)^2$$

$$\cdot(u(jh))^2+16\pi h(u(0))^2+\pi h^3(u_\rho(0))^2.$$

因为当 $j \geqslant 1$ 时，$\left(\frac{2j+3}{2j+1}\right)^2 \leqslant 3$,所以

$$|u|_{1,\Omega_h^\rho}^2 \leqslant \frac{2}{h^2}\|u\|_{\Omega_h^\rho}^2 + 6\pi h\sum_{j=1}^{\infty}(2j+1)^2(u(jh))^2$$

$$+16\pi h(u(0))^2+\pi h^3(u_\rho(0))^2,$$

由此即可推得所证的结论.

引理 4.19 若 $u(\rho)$ 有紧致支集,$q \leqslant 6$,则存在仅与 q 和支集直径有关的正常数 c_1,使得

$$\|u\|_{l^q,\Omega_h^\rho} \leqslant c_1|\ln h|^\alpha|u|_{1,\Omega_h^\rho},$$

其中当 $q=6$ 时，$\alpha=\frac{2}{3}$; 否则 $\alpha=0$.

证明 对任意可微函数 $f(z)$,都有

$$f(z_2)-f(z_1)=(z_2-z_1)\int_0^1 f'((1-t)z_1+tz_2)dt,$$

因此

$$(u(jh))^{\frac{q}{2}+1} = -\sum_{\sigma=j+1}^{\infty}\{(u(\sigma h))^{\frac{q}{2}+1}-(u(\sigma h-h))^{\frac{q}{2}+1}\}$$

$$=-\frac{(q+2)h}{2}\cdot\sum_{\sigma=j+1}^{\infty}\left\{u_\rho(\sigma h)\int_0^1[(1-t)u(\sigma h-h)\right.$$

$$+ tu(\sigma h)|^{\frac{q}{2}}dt\Big\},$$

$$|u(jh)|^{\frac{q}{2}+1} \leqslant \frac{q+2}{2\pi}\Big\{\pi h^3 \sum_{\sigma=j+1}^{\infty}(2\sigma+1)^2(u_\rho(\sigma h))^2\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\Big\{\sum_{\sigma=j+1}^{\infty}\frac{\pi}{(2\sigma+1)^2 h}\Big[\int_0^1 |(1-t)u(\sigma h-h)+tu(\sigma h)|^{\frac{q}{2}}dt\Big]^2\Big\}^{\frac{1}{2}}.$$

由于

$$\Big[\int_0^1 |(1-t)u(\sigma h-h)+tu(\sigma h)|^{\frac{q}{2}}dt\Big]^2$$

$$\leqslant \int_0^1 |(1-t)u(\sigma h-h)+tu(\sigma h)|^q dt$$

$$\leqslant c_3[|u(\sigma h-h)|^q+|u(\sigma h)|^q],$$

所以

$$|u(jh)|^{\frac{q}{2}+1} \leqslant \frac{c_3}{h^2(2j+1)^2}\|u\|_{l^q,\Omega_h^\rho}^{\frac{q}{2}}|u|_{1,\Omega_h^\rho},$$

$$\|u\|_{l^q,\Omega_h^\rho}^q \leqslant c_4\|u\|_{l^q,\Omega_h^\rho}^{\frac{q}{q+2}}|u|_{1,\Omega_h^\rho}^{\frac{2q}{q+2}}\int_h^{c_5}\frac{d\rho}{\rho^{\frac{2q-4}{q+2}}},$$

其中 c_5 是 u 的支集直径. 若 $q<6$, 上式右端的积分是一个正常数,否则不超过 $|\ln h|$ 的常数倍,由此即得所证.

引理 4.20 若 $u(\rho)$ 有紧致支集,则

$$(P_h(u),u)_{\Omega_h^\rho} = |u|_{1,\Omega_h^\rho}^2 + \pi h^2(u(0)-hu_\rho(0))u_\rho(0).$$

证明 设 $\eta(\rho)$ 和 $\zeta(\rho)$ 有紧致支集. 由 Abel 公式得到

$$h\sum_{\rho\in\Omega_h^\rho}\eta(\rho)\zeta_\rho(\rho) = -h\sum_{\rho\in\Omega_h^\rho}\eta_{\bar\rho}(\rho)\zeta(\rho) - \eta(-h)\zeta(0).$$

令 $\eta(jh)=\left(\frac{2j+1}{2}\right)^2 v(jh)$, $\xi(jh)=u_\rho(jh)$, 则

$$h^3\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{2j+1}{2}\right)^2 u_{\rho\bar\rho}(jh)v(jh) = -h^3\sum_{j=0}^{\infty}u_\rho(jh)$$

$$\cdot\left[\left(\frac{2j+1}{2}\right)^2 v(jh)\right]_{\bar\rho} - \frac{h^2}{4}v(-h)u_\rho(0) = -h^3\sum_{j=0}^{\infty}$$

$$\cdot\left(\frac{2j+1}{2}\right)^2 u_{\bar\rho}(jh)v_{\bar\rho}(jh) - 2h^2\sum_{j=0}^{\infty}$$

$$\cdot(j+1)v(jh)u_\rho(jh) - \frac{h^2}{4}v(-h)u_\rho(0). \qquad (4.75)$$

在上式中令 $u(\rho)=v(\rho)$，即得所证。

引理 4.21 若 $u^k(\rho)$ 有紧致支集，则

(i) $2(u_{\hat t}^k, u^k)_{\Omega_h^\rho} = (\|u^k\|^2_{\Omega_h^\rho})_t - \frac{\tau^2}{2}(\|u_t^k\|^2_{\Omega_h^\rho})_{\bar t}$,

(ii) $2(u_{\hat t}^k, u_{t\bar t}^k) = (\|u_{\bar t}^k\|^2_{\Omega_h^\rho})_t$.

引理 4.22 若 $u^k(\rho)$ 有紧致支集，则

$$2(P_h(u^k), u_{\hat t}^k)_{\Omega_h^\rho} = (|u^k|^2_{1,\Omega_h^\rho})_t - \frac{\tau^2}{2}(|u_t^k|^2_{1,\Omega_h^\rho})_{\bar t}$$

$$+ 2\pi h^3(u_{\hat t}^k(0) - hu_{\rho\hat t}^k(0))u_{\hat\rho}^k(0).$$

证明 在(4.75)中分别用 $2v_{\hat t}^k(\rho)$ 和 $u^k(\rho)$ 代替 $v(\rho)$ 和 $u(\rho)$，再由引理 4.21 的结论(i)推得所证的结果。

例 4.6 考虑下列非线性波动方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial U}{\partial \rho} - U^\beta = f(\rho,t), 0<\rho<\infty, t>0,\\ \dfrac{\partial U}{\partial \rho}(0,t)=0, \qquad t\geqslant 0,\\ \dfrac{\partial U}{\partial t}(\rho,0) = U_1(\rho), \qquad 0<\rho<\infty,\\ U(\rho,0)=U_0(\rho), \qquad 0<\rho<\infty,\end{cases} \qquad (4.76)$$

其中 $U_0(\rho)$，$U_1(\rho)$ 和 $f(\rho,t)$ 有紧致支集，$\beta\leqslant 3$. 计算它的格式是

$$\begin{cases}u_{t\bar t}^k(\rho) + P_h(u^k(\rho)) - [u^k(\rho)]^\beta = f^k(\rho), \rho\in\Omega_h^\rho, k\geqslant 1,\\ u_{\bar\rho}^k(0) = g^k = 0, \qquad k\geqslant 0,\\ u_t^0(\rho) = u_1(\rho), \qquad \rho\in\Omega_h^\rho,\\ u^0(\rho) = u_0(\rho), \qquad \rho\in\Omega_h^\rho.\end{cases} \qquad (4.77)$$

记 $F_h(\tilde u^k(\rho)) = -[u^k(\rho)+\tilde u^k(\rho)]^\beta + [\tilde u^k(\rho)]^\beta$，那末误差满足

$$\begin{cases}\tilde{u}_{t\bar{t}}^k(\rho) + P_h(\tilde{u}^k(\rho)) + F_h(\tilde{u}^k(\rho)) = \tilde{f}^k(\rho), & \rho \in \Omega_h^\rho, k \geq 1, \\ \tilde{u}_{\hat{\rho}}^k(0) = \tilde{g}^k, & k \geq 0, \\ \tilde{u}_t^0(\rho) = \tilde{u}_1(\rho), & \rho \in \Omega_h^\rho, \\ \tilde{u}^0(\rho) = \tilde{u}_0(\rho), & \rho \in \Omega_h^\rho. \end{cases} \tag{4.78}$$

把上面第一式与 $2\tilde{u}_{\hat{t}}^k(\rho)$ 求内积，由引理 4.21 和 4.22 得到

$$(\|\tilde{u}_t^k\|_{\Omega_h^\rho}^2)_{\bar{t}} + (|\tilde{u}^k|_{1,\Omega_h^\rho}^2)_{\bar{t}} - \frac{\tau^2}{2}(|\tilde{u}_t^k|_{1,\Omega_h^\rho}^2)_{\bar{t}} + 2\pi h^2(\tilde{u}_{\hat{t}}^k(0)$$

$$- h\tilde{g}_{\hat{t}}^k)\tilde{g}^k + 2(\tilde{u}_{\hat{t}}^k, F_h(\tilde{u}^k))_{\Omega_h^\rho} = (2\tilde{u}_{\hat{t}}^k, \tilde{f}^k)_{\Omega_h^\rho}. \tag{4.79}$$

下面记 $r = \frac{\tau}{h} < \infty$，$\varepsilon$ 是适当小的正数，不难得到

$$|2\pi h^2(\tilde{u}_{\hat{t}}^k(0) - h\tilde{g}_{\hat{t}}^k)\tilde{g}^k| \leq \pi^2 h^4(\tilde{u}_{\hat{t}}^k(0) + 2|\tilde{g}^k|^2 + \pi^2 h^6(\tilde{g}_{\hat{t}}^k)^2)$$

$$\leq \varepsilon\|\tilde{u}_{\hat{t}}^k\|_{\Omega_h^\rho}^2 + \varepsilon\|\tilde{u}_t^k\|_{\Omega_h^\rho}^2 + M_1(|\tilde{g}^{k+1}|^2 + |\tilde{g}^k|^2 + |\tilde{g}^{k-1}|^2).$$

把上式代入 (4.79)，并对 $t = \tau, 2\tau, \cdots, (k-1)\tau$ 求和，则得

$$(1 - M_2\tau)\|\tilde{u}_t^{k-1}\|_{\Omega_h^\rho}^2 + \frac{1}{2}|\tilde{u}^k|_{1,\Omega_h^\rho}^2 + \frac{1}{2}|\tilde{u}^{k-1}|_{1,\Omega_h^\rho}^2$$

$$- \frac{\tau^2}{2}|\tilde{u}_t^{k-1}|_{1,\Omega_h^\rho}^2 + 2\tau\sum_{\zeta=1}^{k-1}(\tilde{u}_{\hat{t}}^\zeta, F_h(\tilde{u}^\zeta))_{\Omega_h^\rho}$$

$$\leq \|\tilde{u}_t^0\|_{\Omega_h^\rho}^2 + \frac{1}{2}|\tilde{u}^0|_{1,\Omega_h^\rho}^2 + \frac{1}{2}|\tilde{u}^1|_{1,\Omega_h^\rho}^2 + M_3\tau|\tilde{g}^k|^2$$

$$+ M_4\tau\sum_{\zeta=1}^{k-1}(\|\tilde{u}_{\hat{t}}^\zeta\|_{\Omega_h^\rho} + |\tilde{g}^\zeta|^2 + \|\tilde{f}^\zeta\|_{\Omega_h^\rho}^2),$$

其中

$$\frac{\tau^2}{2}|\tilde{u}_t^{k-1}|_{1,\Omega_h^\rho}^2 = \frac{\tau^2(1-a)}{4}|\tilde{u}_t^{k-1}|_{1,\Omega_h^\rho}^2 + \frac{\tau^2(1+a)}{4}|\tilde{u}_t^{k-1}|_{1,\Omega_h^\rho}^2$$

$$\leq \frac{1-a}{2}|\tilde{u}^{k-1}|_{1,\Omega_h^\rho}^2 + \frac{1-a}{2}|\tilde{u}^k|_{1,\Omega_h^\rho}^2$$

$$+ \frac{\tau^2(1+a)}{4}|\tilde{u}_t^{k-1}|_{1,\Omega_h^\rho}^2,$$

以及

$$\tau^2|\tilde{u}_t^{k-1}|_{1,\Omega_h^\rho}^2 \leq 18r^2\|\tilde{u}_t^{k-1}\|_{\Omega_h^\rho}^2 + \pi h^3\tau^2(\tilde{g}_t^{k-1})^2$$

$$\leq 18r^2\|\tilde{u}_t^{k-1}\|_{\Omega_h^\rho}^2 + \pi h^3((\tilde{g}^k)^2 + (\tilde{g}^{k-1})^2).$$

假定 $a>0$，$r_0<1$，$\tau<\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2r_0}{1+a}}$，则得到

$$(1-r_0-M_2\tau)\|\tilde{u}_t^{k-1}\|_{D_h^\rho}^2+\frac{a}{2}|\tilde{u}^k|_{1,D_h^\rho}^2$$

$$+2\tau\sum_{\zeta=1}^{k-1}(\tilde{u}_{\hat{t}}^\zeta,F_h(\tilde{u}^\zeta))_{D_h^\rho}\leqslant\|\tilde{u}_t^0\|_{D_h^\rho}^2$$

$$+\frac{1}{2}|\tilde{u}^0|_{1,D_h^\rho}^2+\frac{1}{2}|\tilde{u}^1|_{1,D_h^\rho}^2+M_5\tau|\tilde{g}^k|^2$$

$$+M_5\tau\sum_{\zeta=1}^{k-1}(\|\tilde{u}_t^\zeta\|_{D_h^\rho}^2+|\tilde{g}^\zeta|^2+\|\tilde{f}^\zeta\|_{D_h^\rho}^2).\qquad(4.80)$$

因为

$$|F_h(\tilde{u}^k(\rho))|\leqslant M_6(|\tilde{u}^k(\rho)|^{2\beta}+|\tilde{u}^k(\rho)|^{2\beta-2}$$
$$+\cdots+|\tilde{u}^k(\rho)|^2),$$

所以由引理 4.19 得到

$$|(\tilde{u}_{\hat{t}}^k,\ F_h(\tilde{u}^k))_{D_h^\rho}|\leqslant\varepsilon\|\tilde{u}_t^k\|_{D_h^\rho}^2+\varepsilon\|\tilde{u}_{\bar{t}}^k\|_{D_h^\rho}^2$$

$$+\frac{M_7}{\varepsilon}(\|\tilde{u}^k\|_{l^{2\beta},D_h^\rho}^{2\beta}+\|\tilde{u}^k\|_{l^{2\beta-2},D_h^\rho}^{2\beta-2}+\cdots+\|\tilde{u}^k\|_{D_h^\rho}^2)$$

$$\leqslant\varepsilon\|\tilde{u}_t^k\|_{D_h^\rho}^2+\varepsilon\|\tilde{u}_{\bar{t}}^k\|_{D_h^\rho}^2+\frac{M_8}{\varepsilon}(|\ln h|^{2\alpha\beta}|\tilde{u}^k|_{1,D_h^\rho}^{2\beta}$$

$$+\cdots+|\tilde{u}^k|_{1,D_h^\rho}^2),$$

其中当 $\beta=3$ 时，$\alpha=\frac{2}{3}$，否则 $\alpha=0$。把它代入 (4.80)，即得到

$\tilde{\alpha}>0$ 使得

最后由注记 4.10，存在正常数 M_{11}，M_{12} 和 M_{13}，使得当 $\tilde{\rho}(T)e^{M_{11}T} \leqslant \frac{M_{12}}{|\ln h|^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}}}$，$k\tau \leqslant T$ 时，$\tilde{E}^k \leqslant M_{13}\tilde{\rho}(k\tau)e^{M_{11}K\tau}$。

4.5 单调矩阵方法

研究差分格式稳定性的另一个重要方法是单调矩阵方法，它也与物理现象有关。例如无热源稳定温度场的内部温度既不会超过边界上的最高温度，也不会低于边界上的最低温度，因此 Laplace 方程的合理差分格式也应具有类似的性质，即满足极值原理。而这类格式则又与单调阵有关，Gerschgorin (1930)，Bers (1953) 等最早使用这类方法。

设 $\Omega \in \mathscr{R}^n$，L 是线性偏微分方程算子，$f(x)$ 是定解条件，并假定下列问题有唯一的解。

$$LU(x) = f(x). \tag{4.81}$$

把 $\bar{\Omega}_h$ 中的点排列为 $x^{(l)}$，$1 \leqslant l \leqslant N$。记 $u_l = u(x^{(l)})$，则线性差分格式的一般形式是

$$L_h u(x^{(l)}) = \sum_{j=1}^{N} A_{lj} u_j = f_l,\ 1 \leqslant l \leqslant N. \tag{4.82}$$

用 A 表示以 A_{lj} 为元素的矩阵，$f = (f_1, f_2, \cdots, f_N)^*$，$u = (u_1, u_2, \cdots, u_N)^*$，则可把上式写成下列矩阵形式

$$L_h u = Au = f.$$

若所有 $u_l \geqslant 0$，则记 $u \geqslant 0$。若 $Au \geqslant 0$ 蕴含了 $u \geqslant 0$，则称 A 是单调阵。Collatz (1960) 证明了下列基本结论：

定理 4.16 矩阵 A 为单调阵的充要条件是存在逆矩阵 $A^{-1} \geqslant 0$。

证明 若 $A^{-1} \geqslant 0$，则对一切满足 $Au \geqslant 0$ 的向量 u，都有 $u = A^{-1}(Au) \geqslant 0$，即 A 是单调阵。

反之，若 A 是单调阵，则当 $Au \leqslant 0$（或 $\geqslant 0$）时，$u \leqslant 0$（或 $u \geqslant 0$），所以方程组 $Au = 0$ 仅有零解，即 A^{-1} 存在。如果 A^{-1} 不是正矩阵，则至少有一个元素，例如说 $(A^{-1})_{lj} < 0$。考虑方程组

$$Au = f,$$

其中 f 仅仅第 i 个元素为 1，其余元素都是零．由于 A^{-1} 存在，所以上述方程组可解，且 $u = A^{-1}f$．显然，u 的第 l 个元素恰为 $(A^{-1})_{li} < 0$，即不满足 $u \geqslant 0$，这与单调阵的定义相矛盾．

定理 4.17 假设 A 是单调阵，并且对一切 l，$|(Au)_l| \leqslant (Av)_l$，则对一切 l，$|u_l| \leqslant v_l$．

证明 由条件得到

$$A(v-u) \geqslant 0, \quad A(v+u) \geqslant 0.$$

由于 A 是单调的，所以

$$v-u \geqslant 0, \quad v+u \geqslant 0,$$

即对一切 l，$|u_l| \leqslant v_l$．

如果 A 是单调阵，则称格式(4.82)是单调的．根据定理 4.16，对一切 f，(4.82) 都有唯一解．

定理 4.18 假设 (4.82) 是单调格式，并存在强函数 $v(x)$，使得对一切 l，

$$L_h v(x^{(l)}) \geqslant \max_{1 \leqslant l \leqslant N} |f_l|, \quad v_l \leqslant c_1 \max_{1 \leqslant l \leqslant N} |f_l|,$$

则对一切 l，

$$|u_l| \leqslant \max_{1 \leqslant l \leqslant N} |f_l|.$$

证明 由条件得到

$$|L_h u(x^{(l)})| = |f_l| \leqslant L_h v(x^{(l)}),$$

故由定理 4.17 得到

$$|u_l| \leqslant v_l \leqslant c_1 \max_{1 \leqslant l \leqslant N} |f_l|.$$

因为 L_h 是线性的，所以上述结果又等价于解按最大模对定解条件稳定．如果 (4.82) 对 (4.81) 的逼近是相容的，则 $u(x)$ 按最大模收敛到 $U(x)$．

所谓正型矩阵 A 是指满足下列条件的矩阵，

(i) 非负性，即对一切 l，$A_{ll} > 0$，而当 $l \neq j$ 时，$A_{lj} \leqslant 0$．

(ii) 对角线占优势，即对一切 l，

$$d^l = \frac{-\sum\limits_{\substack{1\leqslant j\leqslant N\\ j\neq l}} A_{lj}}{A_{ll}} \leqslant 1,$$

并且集合 $\mathfrak{N}(A)=\{l|d_l<1\}$ 是非空的.

(iii) 不可约性,即对任意 $l_1\bar{\in}\mathfrak{N}(A)$,一定存在 $l_2\in\mathfrak{N}(A)$, 使得

$$A_{l_1 j_1} A_{j_1 j_2} \cdots A_{j_q l_2} \neq 0.$$

特别,把 $\mathfrak{N}(A)=\{1, 2,\cdots,N\}$ 的正型矩阵称为 Minkowski 阵(见 Ostrowski (1937, 1955, 1961)).

定理 4.19 正型矩阵是单调阵.

证明 假设 A 不是单调阵,则存在 u,使得 $Au\geqslant 0$,而不满足 $u\geqslant 0$. 假定

$$u_{l_1}=\min_{1\leqslant l\leqslant N} u_l = M<0,$$

由于 $0\leqslant d_l\leqslant 1$, $\dfrac{-A_{l_1 j}}{A_{l_1 l_1}}\geqslant 0$, 所以

$$u_{l_1}=\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant N\\ j\neq l_1}}\left(\frac{-A_{l_1 j}u_j}{A_{l_1 l_1}}\right)+\frac{(Au)_{l_1}}{A_{l_1 l_1}}\geqslant d_{l_1}M+\frac{(Au)_{l_1}}{A_{l_1 l_1}}.$$

若 $l_1\in\mathfrak{N}(A)$,则由上式导致 $M>M$,这是矛盾的. 若 $l_1\bar{\in}\mathfrak{N}(A)$,则对一切 $A_{l_1 j}\neq 0$ 的 j,都有 $u_j=M$. 依次类推下去,或者中途发生矛盾,或者由于 A 的不可约性,最后导致 $u_{l_0}=M$, 其中 $l_0\in\mathfrak{N}(A)$. 但 $d_{l_0}<1$,这又导致 $M>M$ 的矛盾.

Bramble, Hubbard (1964b) 还证明了下列结果:

定理 4.20 A 是单调阵的充要条件是存在非负阵 P_1 和 P_2, 使得 P_1AP_2 是正型矩阵.

若 A 是正型矩阵,则称格式 (4.82) 是正型差分格式. 正型格式往往具有一些特殊的性质.

例 4.7 假设有下列差分格式

$$\begin{cases} L_h u(x^{(l)})=\sum\limits_{j=1}^{N} A_{lj}u_j=f_l, & 1\leqslant l\leqslant N_1,\\ L_h u(x^{(l)})=u_l=g_l, & N_1+1\leqslant l\leqslant N, \end{cases}$$

其中 A 是正型阵，$M_1=\max\limits_{N_1+1\leqslant l\leqslant N} g_l$，$m_1=\min\limits_{N_1+1\leqslant l\leqslant N} g_l$。

若 $M_1>0$，且对一切 l，$f_l\leqslant 0$，则令 $v_l\equiv M_1$，从而

$$\begin{cases}L_h v(x^{(l)})=\sum\limits_{j=1}^{N} A_{lj}M_1\geqslant 0,\ 1\leqslant l\leqslant N_1,\\ L_h v(x^{(l)})=M_1,\ N_1+1\leqslant l\leqslant N.\end{cases}$$

所以 $L_h(v-u)(x^{(l)})\geqslant 0$，并由此得到 $u_l\leqslant v_l\leqslant M_1$。

若 $m_1<0$，且对一切 l，$f_l\geqslant 0$，则令 $v_l\equiv m_1$，从而

$$\begin{cases}L_h v(x^{(l)})=\sum\limits_{j=1}^{N} A_{lj}m_1\leqslant 0,\ 1\leqslant l\leqslant N_1,\\ L_h v(x^{(l)})=m_1,\ N_1+1\leqslant l\leqslant N,\end{cases}$$

所以 $L_h(u-v)(x^{(l)})\geqslant 0$，从而 $u_l\geqslant v_l\geqslant m_1$。

根据上述结果即知，若 $f_l\equiv 0$，则 $m_1\leqslant u_l\leqslant M_1$。

如果 $\Omega_h=\{x^{(l)}\,|\,1\leqslant l\leqslant N_1\}$，$\Gamma_h=\{x^{(l)}\,|\,N_1+1\leqslant l\leqslant N\}$，则上式表示 $u(x^{(l)})$ 既不会大于边界上的正的最大值，也不会小于边界上的负的最小值。

例 4.8 考虑下列问题

$$\begin{cases}-\Delta U(x)=f(x),\ |x_1|<1,\ |x_2|<1,\\ U(x)=g(x),\ |x_1|=1\ \text{或}\ |x_2|=1.\end{cases}\tag{4.83}$$

计算它的格式是

$$\begin{cases}L_h u(x)=-\Delta_h u(x)=f(x),\ x\in\Omega_h,\\ L_h u(x)=u(x)=g(x),\ x\in\Gamma_h.\end{cases}\tag{4.84}$$

不难验证它是正型格式。作强函数

$$v(x)=\max_{x\in\Omega_h}|f(x)|\left(2-\frac{x_1^2}{4}-\frac{x_2^2}{4}\right)+\max_{x\in\Gamma_h}|g(x)|.$$

于是在 Ω_h 上，

$$L_h v(x)\geqslant\max_{x\in\Omega_h}|f(x)|\geqslant|L_h u(x)|;$$

在 Γ_h 上，

$$L_h v(x)\geqslant\max_{x\in\Gamma_h}|g(x)|\geqslant|L_h u(x)|.$$

故由定理 4.18 得到

$$\max_{x\in\bar{\Omega}_h}|u(x)| \leqslant \max_{x\in\Omega_h}|f(x)| + \max_{x\in\Gamma_h}|g(x)|.$$

因此格式 (4.84) 对右端及边值按最大模稳定. 特别, 若 $U(x)$ 的四阶导数连续,则 $\max_{x\in\bar{\Omega}_h}|U(x) - u(x)| = O(h^2)$.

正型矩阵很容易判别, 但高精度的差分格式往往不满足正型条件. 为了便于验证 A 的单调性,需要一些判别方法.

Ostrowski(1961) 把满足下列条件的单调阵称为 M 矩阵

$$A_{lj} \leqslant 0, \quad \forall l \neq j. \tag{4.85}$$

若 A 是单调阵,则对一切 l, $A_{ll} > 0$. 因若不然,则必存在 l_0, 使得 $A_{l_0l_0} \leqslant 0$. 但由定理 4.16, A^{-1} 是存在的,因此

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant N} A_{l_0j}(A^{-1})_{jl_0} = 1.$$

但当 $j \neq l_0$ 时, $A_{l_0j} \leqslant 0$. 而由定理 4.16, $A^{-1} \geqslant 0$,所以会导致矛盾.

Ostrowski 还证明了 M 矩阵的下列性质:

定理 4.21 若 A 满足条件 (4.85), 那末当且仅当 A 的所有主子式为正时, A 是 M 矩阵.

定理 4.22 若 A 满足条件 (4.85), 并存在 $u \geqslant 0$, 使得 $Au > 0$,那末 A 是 M 矩阵.

另一个重要性质(见 Bramble, Hubbard, 1964a) 是:

定理 4.23 A 是 M 矩阵的充要条件是满足条件 (4.85), 并且存在正对角阵 D,使得 $D^{-1}AD$ 是 Minkowski 矩阵.

Bramble, Hubbard (1964a) 证明了下列分解定理.

定理 4.24 假设矩阵 A 的对角线元素为 1, $\sum_{j=1}^{N} A_{lj} \geqslant 0$, $\mathfrak{N}(A)$ 非空, $A = I - H_1 - H_2$,并满足下列条件:

(i) $I - H_1$ 是正型矩阵, $(H_1)_{ll} = 0$,

(ii) $(I - H_1)^{-1}H_2 \geqslant 0$,

(iii) 对任意的 $l \in \mathfrak{N}(A)$, 一定存在正整数 r 和 $j \in \mathfrak{N}(A)$, 使得

$$(H_1)_{li_1}(H_1)_{i_1i_2}\cdots(H_1)_{i_rj} > 0,$$

那末 A 是单调阵.

证明 记 $B = I - (I - H_1)^{-1}H_2$，则

$$A = (I - H_1)B, \quad B = (I - H_1)^{-1}A. \tag{4.86}$$

由于 $I - H_1$ 是正型矩阵，所以若能证明 B 是正型矩阵，那末 A 就是两个正型矩阵的乘积，从而是单调阵. 事实上尚可证明 B 为 Minkowski 矩阵，下面就来证明这一点.

首先由条件 (ii)，B 的非对角线元素非正，所以只要证明对一切 l，都有 $\sum_{j=1}^{N} B_{lj} > 0$.

其次，$I - H_1$ 是正型阵，所以一定是 M 矩阵，根据定理 4.23，存在对角阵 $D > 0$，使得 $D^{-1}(I - H_1)D$ 为 Minkowski 阵，从而 $\rho(H_1) = \rho(D^{-1}H_1D) < 1$，并成立下列 Neumann 展开式

$$(I - H_1)^{-1} = I + H_1 + (H_1)^2 + \cdots.$$

由 (4.86)，

$$\sum_{j=1}^{N} B_{lj} = \sum_{j=1}^{N} A_{lj} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N} (H_1^k A)_{lj}. \tag{4.87}$$

若 $l \in \mathfrak{N}(A)$，则上式右端第一项为正. 又由条件 (i)，H_1 的一切元素非负，H_1^k 的一切元素也非负，所以

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} (H_1^k A)_{lj} &= \sum_{j=1}^{N} \sum_{\sigma=1}^{N} (H_1^k)_{l\sigma} A_{\sigma j} \\ &= \sum_{\sigma=1}^{N} (H_1^k)_{l\sigma} \left(\sum_{j=1}^{N} A_{\sigma j} \right) \geqslant 0,\end{aligned}$$

把它代入 (4.87)，即知 $\sum_{j=1}^{N} B_{lj} > 0$.

若 $l \notin \mathfrak{N}(A)$，则 (4.87) 的右端第一项非负. 又由条件 (iii)，存在 r 和 $k \in \mathfrak{N}(A)$，使得

$$d_{lk} = (H_1)_{lj_1}(H_1)_{j_1j_2}\cdots(H_1)_{j_rk} > 0.$$

但它又是表达 H_1^r 的元素 $(H_1^r)_{lk}$ 的和式中的一项，因此，

$$\sum_{j=1}^{N} (H_1^r A)_{lj} = \sum_{\sigma=1}^{N} (H_1^r)_{l\sigma} \left(\sum_{j=1}^{N} A_{\sigma j} \right)$$

$$\geqslant (H_1')_{lk}\left(\sum_{j=1}^{N} A_{kj}\right) \geqslant d_{lk} \sum_{j=1}^{N} A_{kj} > 0,$$

所以仍然有 $\sum\limits_{j=1}^{N} B_{lj} > 0$。

上述定理将在第四章中得到重要应用.

单调矩阵方法也广泛应用于半离散格式. 例如考虑下列问题

$$\begin{cases} -\rho \dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \dfrac{\partial U}{\partial \rho}\right) - \dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = f, \ 0 \leqslant \rho < 1, \ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \\ U(1,\theta) = g(\theta), \ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \end{cases} \tag{4.88}$$

用 h 表示 θ 的步长, $Jh = 2\pi$, $\Omega_h = \{\theta/\theta = jh, 0 \leqslant j \leqslant J-1\}$, $u_j(\rho) = u(\rho, jh)$. 计算 (4.88) 的半离散格式是

$$\begin{cases} L_h u_j(\rho) = -\rho \dfrac{d}{d\rho}\left(\rho \dfrac{du_j(\rho)}{d\rho}\right) - u_{\theta\bar{\theta},j}(\rho) = f_j(\rho), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leqslant \rho < 1, \ \theta \in \Omega_h, \\ L_h u_j(1) = g_j, \qquad\qquad\qquad\quad \theta \in \Omega_h. \end{cases} \tag{4.89}$$

引理 4.23 若对一切 j 和 $0 \leqslant \rho < 1$, $L_h u_j(\rho) < 0$ (或 >0), 则 $u_j(\rho)$ 不可能在内部达到正的最大值(或负的最小值).

证明 假设 $0 \leqslant \rho_0 < 1$, 并且 $u_{j_0}(\rho_0)$ 达到正的最大值, 那末

$$\frac{du_{j_0}(\rho_0)}{d\rho} = 0, \qquad \frac{d^2 u_{j_0}(\rho_0)}{d\rho^2} \leqslant 0,$$

所以

$$L_h u_{j_0}(\rho_0) \geqslant -u_{\theta\bar{\theta},j_0}(\rho_0) \geqslant 0,$$

而这是矛盾的. 类似地可证明第二个结论.

引理 4.24 如果对一切 j 和 $0 \leqslant \rho < 1$, 都有 $|L_h u_j(\rho)| \leqslant L_h v_j(\rho)$, 并且 $|u_j(1)| \leqslant v_j(1)$, 那末

$$\max_{\substack{0 \leqslant \rho \leqslant 1 \\ \theta \in \Omega_h}} |u_j(\rho)| \leqslant \max_{\substack{0 \leqslant \rho \leqslant 1 \\ \theta \in \Omega_h}} v_j(\rho).$$

现在来估计 (4.89) 的解. 作强函数 $v(\rho, \theta) = \dfrac{F}{R_0} w(\rho, \theta)$, 其中

$$w(\rho,\theta) = e^{M(2\pi+1)} - e^{M\theta},$$

$$F=\max(\max_{\substack{0\leqslant\rho\leqslant1\\ \theta\in\Omega_h}}|f|,\ \max_{\substack{0\leqslant\rho\leqslant1\\ \theta\in\Omega_h}}|g|),$$

$$M>\max(\sqrt{2R_0},\ R_0,\ 1),$$

R_0 是适当的正数，使得当 h 充分小时，

$$|L_h w(\rho,\theta)-L w(\rho,\theta)|\leqslant R_0.$$

于是在内点上有

$$L_h v_j(\rho)\geqslant\frac{F}{R_0}\{M^2-R_0\}>F,$$

在边界点上则有

$$L_h v_j(\rho)\geqslant\frac{FM}{R_0}\geqslant F,$$

根据引理 4.24，即知存在 $c_2>0$，使得

$$\max_{\substack{0\leqslant\rho\leqslant1\\ \theta\in\Omega_h}}|u_j(\rho)|\leqslant c_2F.$$

4.6 离散 Green 函数方法

离散 Green 函数方法也是 Courant, Friedrichs, Lewy (1928) 最早引入的．假定 $\Omega_h\in\mathscr{R}_h^n$，并且有界，$L_h$ 是线性差分算子，并考虑下列第一类边值问题

$$\begin{cases}L_h u(x)=f(x), & x\in\Omega_h,\\ u(x)=g(x), & x\in\Gamma_h.\end{cases}\tag{4.90}$$

若 $g(x)\equiv0$，则相应的离散 Green 函数 $G_h(x,y)$ 是指满足下列方程的函数

$$\begin{cases}L_h G_h(x,y)=h^{-n}\delta(x,y), & x\in\Omega_h,\ y\in\bar{\Omega}_h,\\ G_h(x,y)=0, & x\in\Gamma_h,\ y\in\bar{\Omega}_h.\end{cases}\tag{4.91}$$

如果 $G_h(x,y)$ 存在，那末 (4.90) 的齐次边值问题解是

$$u(x)=h^n\sum_{y\in\Omega_h}G_h(x,y)f(y).\tag{4.92}$$

可以用 Green 函数 $G_h(x,y)$ 研究差分格式的稳定性．

定理 4.25 若 (4.90), (4.91) 的解存在，那末 $u(x)$ 对 f 按最大模稳定的充要条件是存在正常数 h_0 和 c_1，使得当 $h\leqslant h_0$ 时，

$$\beta_h = \sup_{x\in\Omega_h} \sum_{y\in\Omega_h} h^n |G_h(x, y)| \leqslant c_1. \tag{4.93}$$

证明 若 (4.93) 成立，则由 (4.92) 直接得到

$$\|u\|_\infty \leqslant c_1 \|f\|_\infty,$$

所以格式是稳定的.

反之，若 (4.93) 不成立，则存在序列 $\{h_l\}$，使得当 $l \to \infty$时，$h_l \to 0$，而 $\beta_{h_l} = \sum_{y\in\Omega_{hl}} h_l^n |G_{h_l}(x^{(l)}, y)| \geqslant l$. 作函数 $f_l(y) = \text{sign}\, G_{h_l}(x^{(l)}, y)$，那末相应地有 $u_{h_l}(x^{(l)}) = \beta_{h_l} \geqslant l$. 但 $\|f_l\|_\infty = 1$，所以当 $l \to \infty$时，

$$\frac{\|u_{h_l}\|_\infty}{\|f_l\|_\infty} \geqslant l \to \infty,$$

即格式是不稳定的.

若 $g(x) \neq 0$，则 (4.90) 是非齐次问题，此时 $G_h(x, y)$ 是满足下列方程的函数

$$\begin{cases} L_h G_h(x,y) = h^{-n}\delta(x,y), & x \in \Omega_h, \quad y \in \bar{\Omega}_h, \\ G_h(x,y) = \delta(x,y), & x \in \Gamma_h, \quad y \in \bar{\Omega}_h, \end{cases}$$

而相应的非齐次问题 (4.90) 的解是

$$u(x) = h^n \sum_{x\in\Omega_h} G_h(x,y) f(y) + \sum_{y\in\Gamma_h} G_h(x, y) g(y). \tag{4.94}$$

定理 4.26 若非齐次问题 (4.90) 的解及相应的 $G_h(x,y)$ 存在，那末 $u(x)$ 按最大模对 f, g 稳定的充要条件是存在正常数 h_0 和 c_2，使得当 $h \leqslant h_0$ 时，

$$\beta_h = \sup_{x\in\bar{\Omega}_h} \sum_{y\in\Omega_h} h^n |G_h(x,y)| + \sup_{x\in\bar{\Omega}_h} \sum_{y\in\Gamma_h} |G_h(x,y)| \leqslant c_2.$$

对于简单的差分算子和区域，通常可得到 $G_h(x, y)$ 的具体表达式.

例 4.9 设 $\Omega_h = \{x \mid x_m = i_m h, -J+1 \leqslant i_m \leqslant J-1, m = 1, 2\}$，$Jh = 1$，差分格式是

$$\begin{cases} -\Delta_h u(x) = f(x), & x \in \Omega_h, \\ u(x) = 0, & x \in \Gamma_h. \end{cases}$$

相应的 $G_h(x, y)$ 满足

$$\begin{cases}-\Delta_h G_h(x, y) = h^{-2}\delta(x, y), & x \in \Omega_h, \ y \in \bar{\Omega}_h, \\ G_h(x,y) = 0, & x \in \Gamma_h, \ y \in \bar{\Omega}_h,\end{cases} \quad (4.95)$$

$\delta(0, y)$ 是偶函数,所以

$$\delta(0, y) = \sum_{l_2=1}^{J-1} \sum_{l_1=1}^{J-1} b_{l_1 l_2} \omega_{l_1 l_2}(y),$$

$$\omega_{l_1 l_2}(y) = \cos \frac{(2l_1 - 1)\pi y_1}{2} \cos \frac{(2l_2 - 1)\pi y_2}{2},$$

其中 $b_{l_1 l_2}$ 可由三角级数的正交性得到. 令

$$G_h(0, y) = \sum_{l_2=1}^{J-1} \sum_{l_1=1}^{J-1} a_{l_1 l_2} \omega_{l_1 l_2}(y),$$

把它代入(4.95)并比较两边的系数, 即可得到 $a_{l_1 l_2}$ 的具体表达式. 类似地可计算 $G_h(x, y)$.

Mccrea, Whipple (1940), Wasow (1957), Laasonen (1957) 和 Saltzer(1958) 还研究了更详细的性质,例如 $G_h(x,y)$ 与相应的连续问题 Green 函数的差别.

如果 Ω_h 是不规则的,一般很难得到具体表达式,但仍可研究 $G_h(x, y)$ 的各种性质. 例如 $\Omega \in \mathscr{R}^2$ 且有界, Γ 充分光滑. 以 h 为步长作正方形网格区域, $\Omega_h = \{x | x \in \mathscr{R}_h^2 \cap \Omega\}$, Γ_h 表示网格线与 Γ 的交点的全体, $\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h$. Ω_h^* 表示那些 $x \in \Omega_h$ 的全体集合,它们至少有一个邻点在 Γ_h 上, $\Omega_h' = \Omega_h / \Omega_h^*$.

$\bar{\Delta}_h$ 表示 Shortley-Weller (1938) 算子, 即当 $x \in \Omega_h'$ 时, $\bar{\Delta}_h u(x) = \Delta_h u(x)$; 当 $x \in \Omega_h^*$, 例如说 $x - a_m h e_m \in \Gamma_h$, $x + h e_m \in \Omega_h$, $0 \leqslant a_m \leqslant 1$, $m = 1, 2$,那末

$$\bar{\Delta}_h u(x) = 2h^{-2} \Big(\frac{1}{a_1 + 1} u(x + he_1) + \frac{1}{a_1(a_1 + 1)} u(x - a_1 h e_1) + \frac{1}{a_2 + 1} u \cdot (x + he_2) + \frac{1}{a_2(a_2 + 1)} u(x - a_2 h e_2) - \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) u(x) \Big).$$

若 $U \in C^4(\bar{\Omega})$，则当 $x \in \Omega_h'$ 时，

$$|\bar{\Delta}_h U(x) - \Delta U(x)| \leqslant \frac{N_4 h^2}{6};$$

若 $U \in C^3(\bar{\Omega})$，则当 $x \in \Omega_h^*$ 时，

$$|\bar{\Delta}_h U(x) - \Delta U(x)| \leqslant \frac{2N_3 h}{3},$$

其中 N_q 表示U的q次偏导数的最大绝对值.

与 $-\bar{\Delta}_h$ 相对应的非齐次问题的 $G_h(x, y)$ 满足

$$\begin{cases} -\bar{\Delta}_h G(x,y) = h^{-2}\delta(x,y), & x \in \Omega_h, \ y \in \bar{\Omega}_h, \\ G_h(x, y) = \delta(x, y). & x \in \Gamma_h, \ y \in \bar{\Omega}_h. \end{cases} \tag{4.96}$$

显然，$-\bar{\Delta}_h$ 是正型算子，从而是单调的. 因为 $\delta(x,y) \geqslant 0$，所以 $G_h(x, y) \geqslant 0$. 下面列举另一些性质.

引理 4.25 对一切网格函数 $v(x)$ 和 $x \in \bar{\Omega}_h$，

$$v(x) = -h^2 \sum_{y \in \Omega_h} G_h(x, y)\bar{\Delta}_h v(y) + \sum_{y \in \Gamma_h} G_h(x,y)v(y). \tag{4.97}$$

证明 把 (4.97) 的右端记为 $w(x)$，由 (4.96) 得到

$$\begin{cases} -\bar{\Delta}_h w(x) = -\bar{\Delta}_h v(x), & x \in \Omega_h, \\ w(x) = v(x), & x \in \Gamma_h. \end{cases}$$

由于 $-\bar{\Delta}_h$ 是正型差分算子，所以 $v(x) = w(x)$.

引理 4.26 对一切 $x \in \bar{\Omega}_h$，

$$\sum_{y \in \Gamma_h} G_h(x, y) = 1.$$

证明 在 (4.97) 中令 $v(x) \equiv 1$，即得所证.

引理 4.27 对一切 $x \in \bar{\Omega}_h$，

$$\sum_{y \in \Omega_h^*} G_h(x, y) \leqslant 1.$$

证明 设

$$\begin{cases} v(x) = 1, & x \in \Omega_h, \\ v(x) = 0, & x \in \Gamma_h. \end{cases}$$

经计算，当 $x \in \Omega_h'$ 时，$-\bar{\Delta}_h v(x) = 0$；而当 $x \in \Omega_h^*$ 时，$-\bar{\Delta}_h v(x) \geqslant h^{-2}$，把它代入 (4.97) 即得所证.

引理 4.28 对一切 $x\in\bar{\Omega}_h$,

$$h^2\sum_{y\in\Omega_h}G_h(x,y)\leqslant c_3.$$

证明 用 $\rho(x)$ 表示 x 到某个固定点的距离,那末 $\bar{\Delta}_h\rho^2(x)=4$. 在(4.97)中用 $v(x)=-\rho^2(x)$ 代入,即得所证.

由上面四个引理直接得到

$$\|v\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}\leqslant c_3\|\bar{\Delta}_h v\|_{\infty,\Omega_h'}+h^2\|\bar{\Delta}_h v\|_{\infty,\Omega_h^*}+\|v\|_{\infty,\Gamma_h}. \tag{4.98}$$

引理 4.29 对一切 $x\in\Omega_h^*$,

$$h^2\sum_{y\in\Omega_h}G_h(x,y)\leqslant c_4 h.$$

证明 作辅助函数 $w(x)$

$$\begin{cases}-\Delta w(x)=1, & x\in\Omega,\\ w(x)=0, & x\in\Gamma.\end{cases}$$

又记 $\phi(x)=h^2\sum\limits_{y\in\Omega_h}G_h(x,y)$,于是

$$\begin{cases}-\bar{\Delta}_h\phi(x)=1, & x\in\Omega_h,\\ \phi(x)=0, & x\in\Gamma_h.\end{cases}$$

令 $v(x)=w(x)-\phi(x)$,则由(4.98)得到

$$\|w-\phi\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}\leqslant c_3\|1-\bar{\Delta}_h w\|_{\infty,\Omega_h'}+h^2\|1-\bar{\Delta}_h w\|_{\infty,\Omega_h^*}\leqslant c_4 h.$$

因为在边界上 $w(x)=0$,所以当 $x\in\Omega_h^*$ 时,$|w(x)|\leqslant c_5 h$,从而 $|\phi(x)|\leqslant c_4 h$.

引理 4.30 (Bramble, Hubbard (1963a)) 对一切 $x\in\bar{\Omega}_h$

$$h^2\sum_{y\in\Omega_h}G_h^2(x,y)\leqslant c_6.$$

例 4.10 $\Omega\subset\mathscr{R}^2$ 且有界,并考虑下列问题

$$\begin{cases}-\Delta U(x)=f(x), & x\in\Omega,\\ U(x)=g(x), & x\in\Gamma.\end{cases} \tag{4.99}$$

计算它的格式是

$$\begin{cases}-\bar{\Delta}_h u(x)=f(x), & x\in\Omega_h,\\ u(x)=g(x), & x\in\Gamma_h.\end{cases}$$

由 (4.97) 得到

$$u(x) = h^2 \sum_{y \in \Omega_h} G_h(x,y)f(y) + \sum_{y \in \Gamma_h} G_h(x, y)g(y).$$

由 (4.98) 得到

$$\|u\|_{\infty,\bar{\Omega}_h} \leqslant c_7(\|f\|_{\infty,\Omega'_h} + h^2\|f\|_{\infty,\Omega^*_h} + \|g\|_{\infty,\Gamma_h}).$$

因此 $u(x)$ 按最大模对右端和边值稳定.

又若 $U \in C^4(\bar{\Omega})$, $\tilde{u}(x) = u(x) - U(x)$,则

$$\begin{cases} -\Delta_h\tilde{u}(x) = R_h(x), & x \in \Omega_h, \\ \tilde{u}(x) = 0, & x \in \Gamma_h, \end{cases}$$

其中当 $x \in \Omega'_h$ 时, $|R_h(x)| \leqslant c_8h^2$; 当 $x \in \Omega^*_h$ 时, $|R_h(x)| \leqslant c_9 h$,从而

$$\|\tilde{u}\|_{\infty,\bar{\Omega}_h} \leqslant c_{10}h^2.$$

关于离散 Green 函数及其对椭圆型差分方程第一类边值问题的应用可见 Bramble, Hubbard (1962, 1963a, 1964a), Bramble (1966a), Bramble, Hubbard, Thomée(1969) 和 Kuttler(1970) 等,其中包括对特征值问题的应用. 关于第二类边值问题的 $G_h(x, y)$ 及其应用可见 Batschelet (1952), Giese (1958), 黄鸿慈 (1964) 和郭本瑜,茅德康 (1976). 此外, John(1952), Friedman (1964) 和 Widlund (1966, 1970) 等还研究了初、边值问题的基本解及其应用.

关于稳定性的常用判别法还有 Годунов-Рябенький 的谱准则(见 Годунов、Рябенький (1963a),Рябенький (1964) 和 Richtmyer, Morton (1967) 等)和其它方法.

§5 偏微分方程定解问题解的存在性

在以前几节中都是假定偏微分方程的解存在, 然后讨论差分格式的稳定性和收敛性. 但是,也可以用差分格式来研究微分方程解的存在性. 在简单的情况,可以从差分格式解的明显表达式出发,然后证明它的极限恰为微分方程的解,例如 Courant, Fried-

richs, Lewy(1928). 但在多数情况下，则是先证明它的解及其有关差商按某种范数一致有界，然后应用紧致性原理选取解的子序列，并证明它的极限是微分方程的解.

5.1 线性问题的古典解

本节用下列最简单的问题来说明怎样用差分方法来证明线性问题古典解的存在性，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} - \dfrac{\partial U}{\partial x} = 0, \ x \in \mathscr{R}, \ t > 0, \\ U(x, 0) = U_0(x), \ x \in \mathscr{R}, \end{cases} \tag{5.1}$$

其中 $U_0(x) \in C^2(\mathscr{R})$, $U_0(x+1) = U_0(x)$，从而 $U(x+1, t) = U(x, t)$.

设 $\mathscr{I}_h = \{x/x = jh, \ 1 \leqslant j \leqslant J-1\}$, $Jh = 1 + h$, 并采用下列格式

$$\begin{cases} u_t^k(x) - u_{\hat{x}}^k(x) - \dfrac{\tau}{2} u_{x\bar{x}}^k(x) = 0, \ x \in \mathscr{I}_h, k \geqslant 0, \\ u^0(x) = U_0(x), \qquad\qquad x \in \mathscr{I}_h. \end{cases} \tag{5.2}$$

假定步长比 $r = \dfrac{\tau}{h} \leqslant 1$，则可把上式写成

$$\begin{aligned} u^{k+1}(x) &= u^k(x) + \frac{r}{2}(u^k(x+h) - u^k(x-h)) \\ &\quad + \frac{r^2}{2}(u^k(x+h) - 2u^k(x) + u^k(x-h)) \\ &= \frac{r(r-1)}{2} u^k(x-h) + (1-r^2)u^k(x) \\ &\quad + \frac{r(r+1)}{2} u^k(x+h), \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} (u^{k+1}(x))^2 \leqslant & \left[\frac{r(r-1)}{2} u^k(x-h) + (1-r^2)u^k(x)\right. \\ & \left. + \frac{r(r+1)}{2} u^k(x+h)\right]^2 + \frac{r^2(1-r^2)}{4}(u^k(x-h) \end{aligned}$$

$$- 2u^k(x) + u^k(x+h))^2 = \frac{r^2(1-r)}{2}(u^k(x-h))^2$$

$$+ (1-r^2)(u^k(x))^2 + \frac{r^2(1+r)}{2}(u^k(x+h))^2$$

$$-r(1-r^2)u^k(x-h)u^k(x)+r(1-r^2)u^k(x)u^k(x+h).$$

把上式对一切 $x \in \mathscr{I}_h$ 求和，由周期性得到

$$\sum_{x\in\mathscr{I}_h}(u^{k+1}(x))^2 \leqslant \left[\frac{r^2(1-r)}{2} + (1-r^2) + \frac{r^2(1+r)}{2}\right]\sum_{x\in\mathscr{I}_h}(u^k(x))^2 + r(1-r^2) \cdot u^k(1+h)u^k(1) - r(1-r^2)u^k(0)u^k(h) = \sum_{x\in\mathscr{I}_h}(u^k(x))^2,$$

即

$$\|u^{k+1}\|^2 = \|u^k\|^2.$$

记 $|||u|||^2 = \max\limits_{0\leqslant k\tau\leqslant T}\|u^k\|^2$，则 $|||u||| \leqslant \|u^0\|^2$. 由于 $U_0(x) \in C^2(\mathscr{R})$，$\|u^0\|^2$ 又是 $U_0(x)$ 平方积分的部分和，因此当 h 适当小时，

$$|||u|||^2 \leqslant 2\int_0^1 |U_0(x)|^2 dx = c_1. \tag{5.3}$$

把 (5.2) 对 t 求差商得到

$$u_{\hat{t}t}^k(x) - u_{\hat{t}\hat{x}}^k(x) - \frac{\tau}{2}u_{\hat{t}x\bar{x}}^k(x) = 0.$$

由于它与 (5.2) 形式相同，因此 $|||u_t||| \leqslant \|u_t^0\|^2$. 又由 (5.2) 得到

$$u_t^0(x) = u_{\hat{x}}^0(x) + \frac{\tau}{2}(U_{0x}(x) - U_{0\bar{x}}(x)),$$

所以当 h 适当小时，

$$|||u_t||| \leqslant \|u_t^0\|^2 \leqslant 4(1+r^2)\int_0^1\left|\frac{\partial U_0(x)}{\partial x}\right|^2 dx = c_2. \tag{5.4}$$

类似地又有

$$|||u_x||| \leqslant c_3, \quad |||u_{xx}||| \leqslant c_4, \quad |||u_{xt}||| \leqslant c_5. \tag{5.5}$$

事实上 $u^k(x)$ 与 h 有关，所以记为 $u_h^k(x)$，而 $\{u_h^k(x)\}$ 就是以 h 为参数的函数族.

网格函数族 $\{w_h^k(x)\}$ 被称为是等度连续的，如果对任意 $\varepsilon>0$，都可找到与 h,τ,x 和 k 无关的正数 δ，使得当 $|k_0\tau|<\delta$，$|j_0h|<\delta$ 时，一致地有

$$|w^{k+k_0}(x+j_0h)-w^k(x)|<\varepsilon.$$

引理 5.1 如果对一切 h 和 τ，都有

$$|||w_h|||\leqslant c_6,\quad |||w_{h,x}|||\leqslant c_7,\quad |||w_{h,t}|||\leqslant c_8,$$

则 $\{w_h^k(x)\}$ 是等度连续且按范数 $|||\cdot|||_\infty$ 一致有界的.

证明 先证明对任意 $\varepsilon>0$，可找到 δ_1，使得当 $|j_0h|<\delta_1$ 时，

$$|w_h^k(x+j_0h)-w_h^k(x)|<\varepsilon. \tag{5.6}$$

事实上，我们有

$$|w_h^k(x+j_0h)-w_h^k(x)|\leqslant h\sum_{\sigma=0}^{j_0-1}|w_{h,x}^k(x+\sigma h)|$$

$$\leqslant\sqrt{\sum_{\sigma=0}^{j_0-1}h}\sqrt{h\sum_{\sigma=0}^{j_0-1}|w_{h,x}^k(x+\sigma h)|^2}\leqslant\sqrt{j_0hc_7},$$

所以当 $|j_0h|<\dfrac{\varepsilon^2}{c_7}$ 时，(5.6) 成立.

其次证明对任意的 $\varepsilon>0$，可找到 δ_2，使得当 $|k_0\tau|<\delta_2$ 时，

$$|w_h^{k+k_0}(x)-w_h^k(x)|<\varepsilon. \tag{5.7}$$

事实上，若记 $M=\left\{\sigma/\sigma\leqslant\dfrac{k_0\tau}{h}\right\}$，则有

$$\sum_{\sigma\in M}|w_h^{k+k_0}(x+\sigma h)-w_h^k(x+\sigma h)|$$

$$\leqslant\tau\sum_{\zeta=0}^{k_0-1}\sum_{\sigma\in M}|w_{h,t}^{k+\zeta}(x+\sigma h)|$$

$$\leqslant\tau\sum_{\zeta=0}^{k_0-1}\sqrt{\sum_{\sigma\in M}1}\sqrt{\sum_{\sigma\in M}(w_{h,t}^{k+\zeta}(x+\sigma h))^2}$$

$$\leqslant\tau\sum_{\zeta=0}^{k_0-1}\sqrt{\frac{k_0\tau}{h}}\sqrt{\frac{c_8}{h}}=\frac{\tau k_0}{h}\sqrt{k_0\tau c_8}.$$

因为 $\sum_{\sigma\in M}$ 中只有 $\left[\frac{k_0\tau}{h}\right]+1$项，因此一定存在 $\sigma_0\in M$，使得

$$|w_h^{k+k_0}(x+\sigma_0h)-w_h^k(x+\sigma_0h)|$$

$$=\min_{\sigma\in M}|w_h^{k+k_0}(x+\sigma h)-w_h^k(x+\sigma h)|\leqslant\sqrt{k_0\tau c_8},$$

所以

$$\begin{aligned}|w_h^{k+k_0}(x)-w_h^k(x)|&\leqslant|w_h^{k+k_0}(x+\sigma_0h)-w_h^{k+k_0}(x)|\\&+|w_h^{k+k_0}(x+\sigma_0h)-w_h^k(x+\sigma_0h)|+|w_h^k(x+\sigma_0h)\\&-w_h^k(x)|\leqslant2\sqrt{\sigma_0hc_7}+\sqrt{k_0\tau c_8}\leqslant\sqrt{k_0\tau}\\&\cdot(2\sqrt{c_7}+\sqrt{c_8}),\end{aligned}$$

因此当 $k_0\tau<\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{c_7}+\sqrt{c_8}}\right)^2$时，(5.7) 成立.

综合 (5.6) 和 (5.7) 即证明了等度连续性.

下面来证明一致有界性。由等度连续性，总可找到与 h, τ 无关的正常数 c_9，使得

$$\max_{x,k,h}|w_h^k(x)|-\min_{x,k,h}|w_h^k(x)|<c_9,$$

所以对一切 x, k 和 h,

$$|w_h^k(x)|\geqslant\max_{x,k,h}|w_h^k(x)|-c_9,$$

从而对一切 h,

$$c_6\geqslant|||w_h|||\geqslant h\sum_{x\in\mathscr{J}_h}(\max_{x,k,h}|w_h^k(x)|-c_9)^2,$$

即

$$\max_{x,k,h}|w_h^k(x)|\leqslant\sqrt{c_6}+c_9.$$

注记 5.1　此引理对向量网格函数族也成立.

定理 5.1　若 $U_0(x)\in C^2(\mathscr{R})$，则 (5.1) 有唯一的古典解.

证明　由引理 5.1 和 (5.3)—(5.5) 知，$\{u_h\}$、$\{u_{h,x}\}$ 和 $\{u_{h,t}\}$ 都是等度连续且一致有界的。现在在每个由三个相邻网格点组成的三角形小区域内，把它们线性插值为连续函数族，分别记为 $\{U_h\}$, $\{V_h\}$ 和 $\{W_h\}$，于是它们也都是等度连续且一致有界的.

记 $h_l=\frac{1}{2^l}$，由 Arzela 引理，可从 $\{h_l\}$ 中抽出子列，不妨仍记为 $\{h_l\}$，使得当 $l\to\infty$ 时，$\{U_{h_l}\}$，$\{V_{h_l}\}$ 和 $\{W_{h_l}\}$ 分别一致收敛到连续函数 U，V 和 W. 可以证明

$$\begin{cases}V(x,t)=\dfrac{\partial U(x,t)}{\partial x},\\ W(x,t)=\dfrac{\partial U(x,t)}{\partial t}.\end{cases}\tag{5.8}$$

事实上，若用 k_l' 和 j_l' 表示最接近 $\frac{t}{\tau_l}$ 和 $\frac{x}{h_l}$ 的整数，则得到

$$\int_0^x V(\sigma,t)d\sigma=\lim_{h_l\to 0}h_l\sum_{j=0}^{j_l'}v_h^{k_l'}(jh_l)$$
$$=\lim_{h_l\to 0}(u_{h_l}^{k_l'}(j_l'h_l)-u_{h_l}^{k_l'}(0))=U(x,t)-U(0,t).$$

因为 $V(x,t)$ 是连续的，所以把上式求导后即得 (5.8) 的第一式. 类似地可证第二式成立.

最后，把 (5.2) 改写成

$$u_{h_l,t}^k(x)-\frac{1}{2}u_{h_l,x}^k(x)-\frac{1}{2}u_{h_l,\bar{x}}^k(x)$$
$$-\frac{r}{2}(u_{h_l,x}^k(x)-u_{h_l,\bar{x}}^k(x))=0,\tag{5.9}$$

令 $l\to\infty$，即得到

$$\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial U}{\partial x}=0.$$

又因为

$$U(x,0)=\lim_{l\to\infty}u_{h_l}^0(j_l'h_l)=\lim_{l\to\infty}U_0(j_l'h_l)=U_0(x),$$

所以初始条件也是满足的.

如果 (5.1) 有两个解，它们的差为 $\widetilde{U}(x,t)$，那末 $\widetilde{U}(x,t)$ 也满足 (5.1)，并且 $\widetilde{U}(x,0)=0$. 把误差方程与 $\widetilde{U}(x,t)$ 求内积，并从 0 到 t 积分，即得到

$$\|\widetilde{U}(t)\|_{L^2(R)}^2=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\tag{5.10}$$

所以 $\widetilde{U}(x,t)\equiv 0$，因此 (5.1) 的古典解是唯一的.

已有许多论文用差分方法证明线性问题古典解的存在性，其中较早的有 Петровский (1941, 1953) 和 John (1952) 等人的工作.

5.2 线性问题的弱解

还可用差分方法来证明线性问题的广义解或弱解的存在性，可参见 Bramble (1969) 的文章.

假设有界开域 $\Omega\subset\mathscr{R}^n$，$f\in L^1(\Omega)$，并考虑下列问题

$$\begin{cases}-\Delta U(x)=f(x), & x\in\Omega,\\ U(x)=0, & x\in\Gamma.\end{cases}\tag{5.11}$$

记

$$\mathscr{D}(\Omega)=\{v/v\in C^\infty(\Omega),\ \text{且有紧致支集}\},$$
$$V=\{v/v\in H_0^1(\Omega),\ \Delta v\in\mathscr{D}(\Omega)\}.$$

所谓 (5.11) 的弱解是指 $U(x)\in L^p(\Omega)$，$1\leqslant p<\frac{n}{n-2}$，使得

$$-\int_\Omega U\Delta v dx=\int_\Omega fv dx,\quad \forall v\in V.$$

设步长为 h，$\bar{\Omega}_h=\{x/x\in\mathscr{R}_h^n\cap\bar{\Omega}\}$，$B(x,a)=\{y/|x-y|\leqslant a\}$，$\Omega_h=\bar{\Omega}_h\cap\{x/B(x,\sqrt{n}h)\subset\Omega\}$，$\Gamma_h=\bar{\Omega}_h/\Omega_h$，并记

$$C_h(x)=\left\{y/x_m-\frac{h}{2}\leqslant y_m\leqslant y_m+\frac{h}{2},\ 1\leqslant m\leqslant n\right\},$$

$$f_h(x)=h^{-n}\int_{C_h(x)}f(y)dy,\quad x\in\Omega_h.$$

现在用下列格式计算 (5.11)

$$\begin{cases}-\Delta_h u(x)=f_h(x), & x\in\Omega_h,\\ u(x)=0, & x\in\Gamma_h.\end{cases}\tag{5.12}$$

为了证明弱解的存在性，需要应用下列离散 Green 函数 $G_h(x,y)$，

$$\begin{cases}-\Delta_h G_h(x,y)=h^{-n}\delta(x,y), & x\in\Omega_h,\\ G_h(x,y)=0, & x\in\Gamma_h,\end{cases}$$

Bramble, Hubbard, Zlámal (1968) 证明了下列结果

$$0 \leqslant G_h(x,y) \leqslant \omega(x-y),$$

其中

$$\omega(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\gamma_2}\ln\left[\dfrac{c_0^2+c_1h^2}{|x|^2+c_1h^2}\right], & n=2,\\[2mm] \dfrac{1}{(n-2)\gamma_n}\left[|x|^2+c_1h^2\right]^{\frac{2-n}{2}}, & n\geqslant 3,\end{cases}$$

c_0, c_1 和 γ_n 是与 h 无关的正常数,由此即得到:

引理 5.2 存在仅与 p 和 Ω 的直径有关的正常数 c_2,使得

$$\|G_h\|_{l^p}=\left(h^n\sum_{y\in\Omega_h}|G_h(x,y)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant c_2.$$

对于任一 $v\in V_1$,按下式定义 $v_h(x)$

$$\begin{cases}-\Delta_h v_h(x)=-(\Delta v)_h(x), & x\in\Omega_h,\\ v_h(x)=0, & x\in\Gamma_h,\end{cases}\tag{5.13}$$

其中

$$(\Delta v)_h(x)=\frac{1}{h^n}\int_{C_h(x)}\Delta v(y)dy,\quad x\in\Omega_h,$$

于是

$$v_h(x)=-h^{-n}\sum_{y\in\Omega_h}G_h(x,y)(\Delta v)_h(y).$$

再定义

$$\Phi_h(x)=v_h(y),\quad x\in C_h(y),$$

则由引理 5.2 和 Hölder 不等式得到:

引理 5.3 若 $q>\dfrac{n}{2}$, 则

$$\|\Phi_h\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant c_2\|(\Delta v)_h\|_{L^q(\Omega)},$$

$$\|\Phi_h\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant c_3\|\Delta v\|_{L^q(\Omega)},$$

其中正常数与 h, v 无关.

定理 5.2 若 Ω 适当正规, $f\in L^1(\Omega)$, 则 (5.11) 有唯一的弱解.

证明 因为

$$u(x) = h^n \sum_{y \in \Omega_h} G(x, y) f_h(y),$$

所以

$$|u(x)|^p \leqslant h^n \sum_{y \in \Omega_h} G(x, y) |u(x)|^{p-1} |f_h(y)|,$$

$$h^n \sum_{x \in \Omega_h} |u(x)|^p \leqslant h^{2n} \sum_{x \in \Omega_h} \sum_{y \in \Omega_h} G(x, y) |u(x)|^{p-1} |f_h(y)|.$$

由 Hölder 不等式和引理 5.2 得到

$$\|u\|_{l^p, \Omega_h} \leqslant c_4 h^n \sum_{y \in \Omega_h} |f_h(y)|.$$

把 $u(x)$ 记为 $u_h(x)$，并把它线性插值为 $U_h(x)$，

$$U_h(x) = u(y), \quad x \in C_h(y),$$

则

$$\|U_h\|_{L^p(\Omega)} \leqslant c_5 \|f\|_{L^1(\Omega)}, \tag{5.14}$$

因此可选取一个子序列 $\{U_{h_l}\}$，使得它在 $L^p(\Omega)$ 中弱收敛到 $U(x)$，其中 $1 \leqslant p < \frac{n}{n-2}$. 我们又有

$$-\int_\Omega U_{h_l}(x) \Delta v(x) dx = -h_l^n \sum_{x \in \Omega_h} u_{h_l}(x) (\Delta v)_{h_l}(x)$$

$$= -h_l^n \sum_{x \in \Omega_h} f_{h_l}(x) v_{h_l}(x) = -\int_\Omega f \Phi_{h_l} dx. \tag{5.15}$$

让 $l \to \infty$，上式左端趋向于

$$-\int U \Delta v dx. \tag{5.16}$$

又因为 $f \in L^1(\Omega)$，故可找到 $f^{(\mu)} \in \mathscr{D}(\Omega)$，使得 $f^{(\mu)}(x)$ 在 $L^1(\Omega)$ 中强收敛到 $f(x)$. 因为

$$\left|\int_\Omega (\Phi_{h_l}(x) - v) f dx\right| \leqslant \left|\int_\Omega (\Phi_{h_l} - v) f^{(\mu)} dx\right|$$

$$+ \left|\int_\Omega (\Phi_{h_l} - v)(f - f^{(\mu)}) dx\right|,$$

因此对于任意的 $\varepsilon > 0$，可选取适当大的 μ_1，使得当 $\mu \geqslant \mu_1$ 时，上式右端第二项小于 $\frac{\varepsilon}{2}$. 再选取适当大的 l_1，使得当 $l \geqslant l_1$

时，右端的第一项也小于 $\frac{\varepsilon}{2}$. 因此当 $l\to\infty$ 时，

$$\int_{\Omega}\Phi_{h_l}f\,dx\to\int_{\Omega}vf\,dx,\tag{5.17}$$

从而 $U(x)$ 确实是 (5.11) 的弱解.

下面来证明唯一性. 假设 (5.11) 有两个弱解，它们的差是 $\widetilde{U}(x)$，则

$$\int_{\Omega}\widetilde{U}\Delta v\,dx=0,\ \forall v\in V.\tag{5.18}$$

可以证明对一切 $\phi\in\mathscr{D}(\Omega)$，都可找到 $v\in V$，使得 $\Delta v=\phi$. 事实上，若考虑下列方程

$$\int_{\Omega}\nabla\bar{v}\cdot\nabla w\,dx=\int_{\Omega}\phi w\,dx,\ \forall w\in H_0^1(\Omega),$$

则它有唯一解. 根据 Weyl 引理，存在 v，使得 $\Delta v=\phi$，且几乎处处等于 $\bar{v}$，所以 $v\in V$，因此由 (5.18) 推得

$$\int_{\Omega}\widetilde{U}\phi\,dx=0,\ \forall\phi\in\mathscr{D}(\Omega).$$

因为 $\widetilde{U}\in L^p(\Omega)$, $p\geqslant 1$，故由上式得到 $\widetilde{U}\equiv 0$.

注记 5.2　事实上，一切子序列 $\{U_{h_l}\}$ 都弱收敛到 U.

定理 5.3　在定理 5.2 的条件下，$U_h(x)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中强收敛到 $U(x)$.

证明　设 $f^{(\mu)}\in\mathscr{D}(\Omega)$，并在 $L^p(\Omega)$ 中强收敛到 f. 用 $U^{(\mu)}$ 表示 (5.11) 的对应于 $f^{(\mu)}$ 的弱解，相应的差分方程解是 $U_h^{(\mu)}$，于是

$$\|U-U_h\|_{L^p(\Omega)}\leqslant\|U-U^{(\mu)}\|_{L^p(\Omega)}+\|U^{(\mu)}-U_h^{(\mu)}\|_{L^p(\Omega)}+\|U_h^{(\mu)}-U_h\|_{L^p(\Omega)}.$$

由 (5.14)，

$$\|U_h-U_h^{(\mu)}\|_{L^p(\Omega)}\leqslant c_5\|f-f^{(\mu)}\|_{L^1(\Omega)}.$$

又由定理 5.2，$U-U^{(\mu)}$ 是 $U_h-U_h^{(\mu)}$ 的弱极限，因此

$$\|U-U^{(\mu)}\|_{L^p(\Omega)}\leqslant c_6\|f-f^{(\mu)}\|_{L^1(\Omega)},$$

从而对任意的 ε，可选取适当大的 μ_1，使得当 $\mu\geqslant\mu_1$ 时，

$$\|U-U_h\|_{L^p(\Omega)}\leqslant\|U_h^{(\mu)}-U^{(\mu)}\|_{L^p}+\frac{\varepsilon}{2}.\tag{5.19}$$

由于 $f^{(\mu)}\in L^2(\Omega)$,故由 Céa(1964) 的结果得到

$$\lim_{h\to 0}\|U_h^{(\mu)}-U^{(\mu)}\|_{L^2(\Omega)}=0. \tag{5.20}$$

因为 $U^{(\mu)}\in V$,所以由引理 5.3, $U_h^{(\mu)}-U^{(\mu)}$ 是有界的, 故当 h 充分小时,由 (5.20) 得到

$$\|U_h^{(\mu)}-U^{(\mu)}\|_{L^p(\Omega)}<\frac{\varepsilon}{2},\ p\geqslant 1.$$

注记 5.3 若 $\Gamma\in C^2$,且 $f\in(L^\infty(\Omega))'$,则仍可证明 $U_h(x)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中弱收敛到 (5.11) 的弱解.

关于本节所讨论的问题的更详细结果,可见 Bramble (1969).

5.3 非线性问题

可以用差分方法证明非线性问题古典解的存在性,例如 Sauer (1952), John(1952) 关于拟线性双曲型和抛物型方程解的证明. 也可以讨论它的广义解,例如 Téman (1970) 对非线性椭圆型方程解的研究,或者用差分方法证明弱解的存在性, 例如 Олейник (1957), Годунов (1959), Lax, Wendroff(1960), Glimm(1965), Diperna (1973) 和 Harten, Hyman, Lax, Keyfitz (1976) 等人对非线性双曲型方程的研究. 在本节中以 Téman (1970) 的例子来介绍一些基本思想.

设有界开集 $\Omega\subset\mathscr{R}^n$, Γ 是逐片光滑的曲面, λ 是正常数, $f\in L^4(\Omega)$,并考虑下列问题

$$\begin{cases}-\Delta U(x)+\lambda U(x)+U^3(x)=f(x), & x\in\Omega,\\ U(x)=0, & x\in\Gamma.\end{cases} \tag{5.21}$$

记 $V=H_0^1(\Omega)\cap L^4(\Omega)$,并取下列范数

$$\|v\|_V=\|v\|_{H_0^1(\Omega)}+\|v\|_{L^4(\Omega)}.$$

则 V 是 Banach 空间. 又记

$$a(v,w)=\int_\Omega\nabla v\cdot\nabla w dx+\lambda\int_\Omega vw dx,$$

$$b(v,w)=a(v,w)+\int_\Omega v^3 w dx.$$

则 $a(v,w)$ 是 $V\times V$ 上的双线性连续泛函. 又若 $v,w\in L^4(\Omega)$,

则 $v^3\in L^{\frac{4}{3}}(\Omega), v^3w\in L^1(\Omega)$，因此 $b(v, w)$ 在 $V\times V$ 上有定义.

所谓 (5.21) 的广义解是指 $U(x)\in V$，它满足

$$b(U, w)=(f, w)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall w\in V. \tag{5.22}$$

为了用差分格式计算 (5.22)，需要把通常的网格略加修改。用 $\sigma_h(x)$ 表示以 x 为中心，以 h 为边长的 n 维立方体. $\mathscr{R}_h^n$ 的意义同前.

$$\sigma_h(x, 1)=\bigcup_{m=1}^{n}\left(\sigma_h\left(x+\frac{h}{2}e_m\right)\cup\sigma_h(x)\cup\sigma_h\left(x-\frac{h}{2}e_m\right)\right),$$

$$\Omega_h=\{x\in\mathscr{R}_h^n/\sigma_h(x,1)\subset\Omega\}.$$

现在用有限维空间 V_h 来逼近 V，其元素是下列阶梯函数

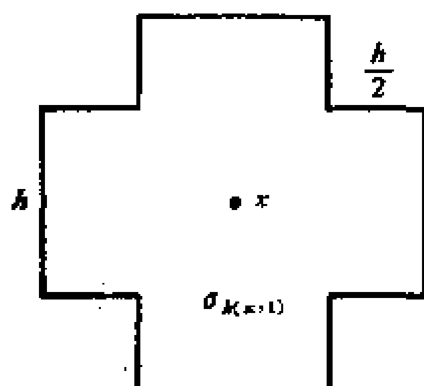


图 5.1　$n=2$

$$v_h(x)=\sum_{y\in\Omega_h}v_h(y)\bar{w}_h(x, y),$$

其中 $\bar{w}_h(x,y)$ 是 $\sigma_h(y)$ 的特征函数，V_h 的范数定义为

$$\|v_h\|_{V_h}=\left(\sum_{m=1}^{n}\int_{\Omega}(\delta_m v_h(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\left(\int_{\Omega}(v_h(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_{\Omega}(v_h(x))^4dx\right)^{\frac{1}{4}},$$

其中

$$\delta_m v(x)=\frac{v\left(x+\frac{h}{2}e_m\right)-v\left(x-\frac{h}{2}e_m\right)}{h}.$$

用 γ_h 表示从 V 到 V_h 的限制算子，当 $v\in\mathscr{D}(\Omega)$ 时，

$$\gamma_h v(x)=v(x), \quad \forall x\in\Omega_h;$$

当 $v \in V/\mathscr{D}(\Omega)$ 时，则用极限的方法来定义 $v(x)$. 显然，r_h 是线性连续算子. 又设 $\tilde{V} = L^2(\Omega) \times [L^2(\Omega)]^{n+1}$, ω 是从 V 到 $\tilde{V}$ 的一个同构. 用 $\frac{\partial v}{\partial x_m}$ 表示广义导数，则

$$\omega V = \left(v, v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial v}{\partial x_n}\right).$$

又定义从 V_h 到 $\tilde{V}$ 的延拓算子 p_h,

$$p_h v_h = (v_h, v_h, \delta_1 v_h, \cdots, \delta_n v_h), \quad \forall v_h \in V_h.$$

可以证明(见 Téman (1970))

$$\|p_h\| \leqslant c_1, \tag{5.23}$$

$$\lim_{h\to 0} \|p_h r_h U - \omega U\|_{\tilde{V}} = 0, \ \forall U \in V. \tag{5.24}$$

又若 $p_h v_h$ 弱收敛到 $\varphi \in \tilde{V}$，则

$$\varphi \in \omega V. \tag{5.25}$$

定义

$$a_h(v_h, w_h) = \sum_{m=1}^{n} \int_\Omega \delta_m v_h(x) \delta_m w_h(x) dx$$

$$+ \lambda \int_\Omega v_h(x) w_h(x) dx,$$

$$b_h(v_h, w_h) = a_h(v_h, w_h) + \int_\Omega (v_h(x))^3 w_h(x) dx.$$

不难证明

$$b_h(v_h, v_h - w_h) - b_h(w_h, v_h - w_h)$$
$$\geqslant a_h(v_h - w_h, v_h - w_h) \geqslant 0. \tag{5.26}$$

计算 (5.22) 的广义差分格式是寻求 $u_h \in V_h$，使得

$$b_h(u_h, w_h) = (r_h f, w_h)_{L^2(\Omega)}, \ \forall w_h \in V_h, \tag{5.27}$$

下面来讨论它的可解性.

引理 5.4 设 $\mathscr{H}$ 是有限维实 Hilbert 空间，$\mathscr{P}$ 是从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}$ 的连续算子，并且当 $\|g\|_{\mathscr{H}} = M > 0$ 时，$(\mathscr{P}(g), g)_{\mathscr{H}} > 0$，则存在元素 $g_0 \in \mathscr{H}$，使得 $\mathscr{P}(g_0) = 0$，且 $\|g_0\|_{\mathscr{H}} \leqslant M$.

证明 在球 $B(0, M) = \{g / \|g\|_{\mathscr{H}} \leqslant M\}$ 内定义算子

$$\mathscr{A}(g)=\frac{-M\mathscr{P}(g)}{\|\mathscr{P}(g)\|_{\mathscr{H}}}.$$

若 $\mathscr{P}(g)$ 没有零点，则 $\mathscr{A}(g)$ 是连续算子，且 $\|\mathscr{A}(g)\|_{\mathscr{H}}=M$. 由 Brouwer 定理，存在元素 g_1，使得

$$\frac{-M\mathscr{P}(g_1)}{\|\mathscr{P}(g_1)\|_{\mathscr{H}}}=g_1.$$

把上式对 $\mathscr{P}(g_1)$ 求内积，即得到

$$(\mathscr{P}(g_1),g_1)_{\mathscr{H}}=-M\|\mathscr{P}(g_1)\|_{\mathscr{H}}<0,$$

而这是与引理条件相矛盾的.

定理 5.4 格式 (5.27) 有唯一解.

证明 设 $v_h,\ w_h\in V_h$，令

$$(v_h,\ w_h)_{\mathscr{H}}=(v_h,\ w_h)_{L^2(\Omega)},$$

$$\mathscr{P}(v_h)(x)=\sum_{y\in\Omega_h}(b_h(v_h,\bar{w}_h)-(\gamma_hf,\bar{w}_h)_{L^2(\Omega)})\bar{w}_h(x,y).$$

可以证明 $\mathscr{P}(v_h)$ 是关于 v_h 连续的.

另一方面，由 $\bar{w}_h(x,y)$ 的正交性得到

$$(\mathscr{P}(v_h),\ v_h)_{L^2(\Omega)}=h^n\sum_{y\in\Omega_h}(b_h(v_h,\ \bar{w}_h)$$
$$-(\gamma_hf,\bar{w}_h)_{L^2(\Omega)})v_h(y)\geqslant h^n(\lambda\|v_h\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$-\|\gamma_hf\|_{L^2(\Omega)}\|v_h\|_{L^2(\Omega)}).$$

若M适当大且 $\|v_h\|_{L^2(\Omega)}=M$，则上式为正，因此由引理 5.4 得到 (5.27) 的可解性.

假设 $u_h^{(l)}$ 是 (5.27) 的两个解，$l=1,2$，$\tilde{u}_h=u_h^{(1)}-u_h^{(2)}$，于是，

$$b_h(u_h^{(1)},\ w_h)-b_h(u_h^{(2)},w_h)=0,\ \forall w_h\in V_h.$$

取 $w_h=\tilde{u}_h$，则

$$b_h(u_h^{(1)},\ \tilde{u}_h)-b_h(u_h^{(2)},\ \tilde{u}_h)=0.$$

从而由 (5.26) 得到 $a_h(\tilde{u}_h,\tilde{u}_h)\leqslant 0$，即 $\tilde{u}_h$ 为常数. 又由边值条件，推得 $\tilde{u}_h(x)\equiv 0$.

定理 5.5 问题 (5.22) 有唯一解. 若用 $u_h(x)$ 表示 (5.27) 的解，则当 $h\to 0$ 时，p_hu_h 弱收敛到 ωU，而且

$$\|U - u_h\|_{L^2(\Omega)} \to 0, \tag{5.28}$$

$$\left\|\frac{\partial U}{\partial x_m} - \delta_m U\right\|_{L^2(\Omega)} \to 0. \tag{5.29}$$

证明 取 $w_h = u_h$，则由 (5.27) 得到

$$b_h(u_h, u_h) \leqslant |(\gamma_h f, u_h)_{L^2(\Omega)}| \leqslant \|\gamma_h f\|_{L^2(\Omega)}\|u_h\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\leqslant c_2\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u_h\|_{L^2(\Omega)},$$

即

$$\sum_{m=1}^{n} \|\delta_m u_h\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda\|u_h\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_h\|^4_{L^4(\Omega)}$$
$$\leqslant c_2\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u_h\|_{L^2(\Omega)},$$

所以 $\|u_h\|_{L^4(\Omega)}$, $\|u_h\|_{L^2(\Omega)}$ 和 $\|\delta_m u_h\|_{L^2(\Omega)}$ 都一致有界。因此可选取子序列 $\{u_{h_l}\}$, $\{u_{h_l}\}$ 和 $\{\delta_m u_{h_l}\}$，使得它们分别弱收敛到 U, U_1 和 V_m, $1 \leqslant m \leqslant n$. 也就是说，$p_{h_l}u_{h_l}$ 弱收敛到 $\varphi = (U, U_1, V_1, V_2, \cdots, V_n) \in \widetilde{V}$. 由 (5.25)，$\varphi = \omega U$，所以 $U_1 = U$, $V_m = \dfrac{\partial U}{\partial x_m}$.

下面来证明 U 满足 (5.22). 设 $w \in V$，则

$$b_h(u_h, \gamma_h w - u_h) = (\gamma_h f, \gamma_h w - u_h)_{L^2(\Omega)}. \tag{5.30}$$

由于

$$b_h(\gamma_h w, \gamma_h w - u_h) = b_h(u_h, \gamma_h w - u_h)$$
$$+ [b_h(\gamma_h w, \gamma_h w - u_h) - b_h(u_h, \gamma_h w - u_h)],$$

所以由 (5.26) 和 (5.30) 得到

$$b_h(\gamma_h w, \gamma_h w - u_h) \geqslant (\gamma_h f, \gamma_h w - u_h)_{L^2(\Omega)}. \tag{5.31}$$

由 (5.24)，$\gamma_h w$ 在 $L^2(\Omega)$ 和 $L^4(\Omega)$ 中强收敛到 w，所以

$$\lim_{l\to\infty} a_{h_l}(\gamma_{h_l} w, \gamma_{h_l} w - u_{h_l}) = a(w, w - U),$$

$$\lim_{l\to\infty}\int_\Omega (\gamma_{h_l} w)^3(\gamma_{h_l} w - u_{h_l})\, dx = \int_\Omega w^3(w - U)dx,$$

$$\lim_{l\to\infty}(\gamma_{h_l} f, \gamma_{h_l} w - u_{h_l})_{L^2(\Omega)} = (f, w - U)_{L^2(\Omega)}.$$

因此，由 (5.31) 得到

$$b(w, w - U) \geqslant (f, w - U)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall w \in V.$$

设 μ 是常数，$w = U + \mu\chi$，则

$$\mu b(U+\mu\chi,\chi)\geqslant\mu(f,\chi)_{L^2(\Omega)}.$$

若 $\mu>0$,则

$$b(U+\mu\chi,\chi)\geqslant(f,\chi)_{L^2(\Omega)},$$

令 $\mu\to0$,就得到

$$b(U,\chi)\geqslant(f,\chi)_{L^2(\Omega)}.$$

若 $\mu<0$,则得到相反的不等式. 从而 U 满足 (5.22).

由于

$$b(U^{(1)},U^{(1)}-U^{(2)})-b(U^{(2)},U^{(1)}-U^{(2)})\geqslant a(U^{(1)}-U^{(2)},\\ U^{(1)}-U^{(2)})\geqslant0,$$

所以,不难证明 (5.22) 的广义解是唯一的.

由于对每个序列 $\{u_{h_l}\}$ 都可选出子列 $\{u_{h_l'}\}$,使得 $p_{h_l'}u_{h_l'}$ 弱收敛到 ωU,因此从整体来讲,p_hu_h 也弱收敛到 ωU.

最后来证明 (5.28) 和 (5.29). 记

$$B_h=b_h(u_h,u_h-\gamma_hU)-b_h(\gamma_hU,u_h-\gamma_hU).$$

由 (5.27) 得到

$$B_h=(f_h,u_h-\gamma_hU)_{L^2(\Omega)}-b_h(\gamma_hU,u_h-\gamma_hU).$$

可以证明

$$\lim_{h\to0}(f_h,u_h-\gamma_hU)_{L^2(\Omega)}=0,$$

$$\lim_{h\to0}b_h(\gamma_hU,u_h-\gamma_hU)=0,$$

因此

$$\lim_{h\to0}B_h=0.$$

从而由 (5.26) 得到

$$\lim_{h\to0}a_h(u_h-\gamma_hU,u_h-\gamma_hU)=0,$$

亦即

$$\lim_{h\to0}\|u_h-\gamma_hU\|_{L^2(\Omega)}=0,\tag{5.32}$$

$$\lim_{h\to0}\|\delta_mu_h-\delta_m\gamma_hU\|_{L^2(\Omega)}=0.\tag{5.33}$$

又由 (5.24),

$$\lim_{h\to0}\|U-\gamma_hU\|_{L^2(\Omega)}=0,$$

$$\lim_{h\to0}\left\|\frac{\partial U}{\partial x_m}-\delta_m\gamma_hU\right\|_{L^2(\Omega)}=0,$$

所以由 (5.32) 与 (5.33) 推得 (5.28) 和 (5.29).

第二章 双曲型方程

§6 一阶双曲型方程组的初值问题

本节讨论解一阶双曲型方程组初值问题的古典差分方法。首先，由于这类问题具有实的特征，因此可以构造一些特殊的差分格式，例如特征线方法和特征型差分格式。其次，根据解的守恒性，则可构造守恒型格式。在本节的末尾，还介绍了一阶线性对称双曲型方程组的 Kreiss（1964）耗散型格式，并用冻结系数法证明了它的稳定性。

6.1 特征线方法，解的存在性

假设 $x\in\mathscr{R}$，$t\geqslant 0$，$U(x,t)$ 是 n 维向量函数，其分量是 $U_j(x,t)$，$1\leqslant j\leqslant n$；$A(x,t,U)$ 是 $n\times n$ 阶非奇异矩阵，它的元素是 $a_{lj}(x,t,U)$。Λ 是对角阵，对角线元素是实值，记为 $\lambda_l(x,t,U)$。$d(x,t,U)$ 是 n 维已知向量函数，其元素是 $d_l(x,t,U)$。于是，一阶双曲型方程组的正规形式是

$$A\frac{\partial U}{\partial t}+\Lambda A\frac{\partial U}{\partial x}=d,\tag{6.1}$$

或者写成分量形式

$$\sum_{j=1}^{n}a_{lj}\left(\frac{\partial U_j}{\partial t}+\lambda_l\frac{\partial U_j}{\partial x}\right)=d_l,\quad 1\leqslant l\leqslant n.\tag{6.2}$$

引入向量场

$$\frac{dx}{dt}=\lambda_l,\tag{6.3}$$

它决定了 n 条特征线。沿着第 l 条特征线，我们有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{lj}\frac{dU_j}{dt} = d_l, \quad 1 \leqslant l \leqslant n. \tag{6.4}$$

如果特征线是已知的，例如线性方程的情况，则只要在特征线上离散 (6.4)，就可以建立关于 $U(x, t)$的近似解 $u(x, t)$ 的差分格式。但在拟线性的情况，λ_l 与 U 有关，所以必须把 (6.3) 和 (6.4) 联合起来求解。Massau (1899)，Prandtl, Buseman (1929) 的特征线方法就是基于这个想法。为方便计，设 $n=2$，并且只讨论狭义双曲型的情况。

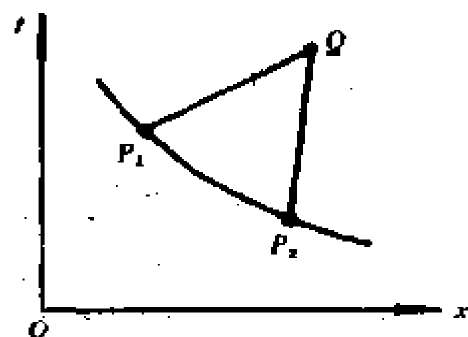


图 6.1

假设 P_1, P_2 是 (x, t) 平面上的两点(见图 6.1)。如果 $U(P_1)$和 $U(P_2)$ 是已知的，则可算出

$$\begin{cases}\lambda_1(P_1) = \lambda_1(x(P_1),\ t(P_1),\ u(P_1)),\\ \lambda_2(P_2) = \lambda_2(x(P_2),\ t(P_2),\ u(P_2)),\end{cases}$$

其中 $x(P_m)$ 和 $t(P_m)$ 分别表示点 P_m 的两个座标值．过 P_1 点作斜率为 $\lambda_1^{-1}(P_1)$ 的直线，它近似地代替过 P_1 点的第一条特征线．又过 P_2 点作斜率为 $\lambda_2^{-1}(P_2)$ 的直线，它近似地代替过 P_2 点的第二条特征线．不妨假定这两条直线交于 Q 点。若不然，则可以过 P_1 点作斜率为 $\lambda_2^{-1}(P_1)$的直线，过 P_2 点作斜率为 $\lambda_1^{-1}(P_2)$ 的直线，它们必交于另一点。为确定计，今后总假定第一种情况成立，于是由 (6.3) 得到

$$\begin{cases}x(Q) - x(P_1) = \lambda_1(P_1)(t(Q) - t(P_1)),\\ x(Q) - x(P_2) = \lambda_2(P_2)(t(Q) - t(P_2)),\end{cases} \tag{6.5}$$

然后在这两条直线上建立 (6.4) 的差分格式

$$\begin{cases}a_{11}(P_1)[u_1(Q) - u_1(P_1)] + a_{12}(P_1)[u_2(Q) - u_2(P_1)]\\ \qquad = d_1(P_1)[t(Q) - t(P_1)],\\ a_{21}(P_2)[u_1(Q) - u_1(P_2)] + a_{22}(P_2)[u_2(Q) - u_2(P_2)]\\ \qquad = d_2(P_2)[t(Q) - t(P_2)].\end{cases} \tag{6.6}$$

在具体计算时，先由(6.5)计算 $x(Q)$ 和 $t(Q)$，然后由(6.6)

计算 $u(Q)$. 上述格式还可以用下面的方法进行改进，也就是说，把由 (6.5)，(6.6) 算出的值作为零次近似值 $x(Q^{(0)})$，$t(Q^{(0)})$ 和 $u(Q^{(0)})$，然后按下式修正它们

$$
\begin{cases}
d_l^{(m)} = d_l(Q^{(m)}, u(Q^{(m)})), \quad \lambda_l^{(m)} = \lambda_l(Q^{(m)}, u(Q^{(m)})), \\
a_{lj}^{(m)} = a_{lj}(Q^{(m)}, u(Q^{(m)})), \\
x(Q^{(m+1)}) - x(P_l) = \dfrac{1}{2}(\lambda_l(P_l) + \lambda_l^{(m)}) \\
\qquad \times (t(Q^{(m+1)}) - t(P_l)), \\
(a_{l1}(P_l) + a_{l1}^{(m)})(u_1(Q^{(m+1)}) - u_1(P_l)) + (a_{l2}(P_l) \\
\qquad + a_{l2}^{(m)})(u_2(Q^{(m+1)}) - u_2(P_l)) \\
\quad = (d_l(P_l) + d_l(Q^{(m)}))(t(Q^{(m+1)}) - t(P_l)), \\
\qquad 1 \leqslant l, \ j \leqslant 2, \ m = 0, 1, 2, \cdots.
\end{cases}
$$

对于具体的初值问题，在一条处处不与特征方向相切的光滑曲线 $\mathscr{L}$ 上给定初值 $u_0(x)$. 在 $\mathscr{L}$ 上作点列 $\{O_l\}$ (见图 6.2)，由 $U(O_l)$ 的值可得到 $u(D_l)$ 的值，依此类推下去.

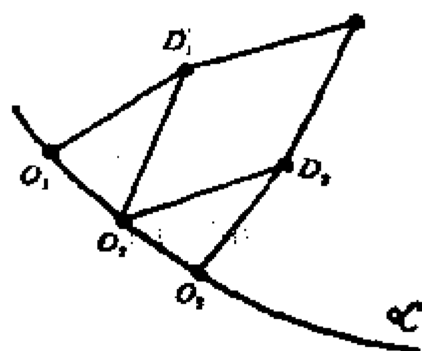


图 6.2

下面来证明 (6.1) 的古典解的存在性. 假定 $\mathscr{L}$ 的方程是

$$
\begin{cases}
x = \tilde{x}(s), \\
t = \tilde{t}(s).
\end{cases}
$$

如果解存在，那么由 (6.3) 式可以确定两族特征线

$$
\begin{cases}
\varphi_1(x, t) = c, \\
\varphi_2(x, t) = c.
\end{cases}
$$

作自变量变换

$$
\begin{cases}
\nu = \tilde{F}[\varphi_1(x, t)], \\
\mu = \tilde{G}[\varphi_2(x, t)].
\end{cases}
$$

由于 $\mathscr{L}$ 处处不与特征方向相切，所以它与每一条特征线只有一个交点，因此根据隐函数存在定理，总可选择 $\tilde{F}$ 和 $\tilde{G}$，使得

$$\begin{cases}\tilde{F}[\varphi_1(\tilde{x}(s),\ \tilde{t}(s))] = s,\\ \tilde{G}[\varphi_2(\tilde{x}(s),\ \tilde{t}(s))] = -s.\end{cases} \tag{6.7}$$

在这个变换下，两族特征线分别变为与 μ 轴和 ν 轴平行的直线族，而 $\mathscr{L}$ 则变成直线

$$\nu + \mu = 0. \tag{6.8}$$

沿着第一族特征线，ν 是常数，故由 (16.3) 得到

$$\frac{\partial x}{\partial \mu} - \lambda_1 \frac{\partial t}{\partial \mu} = 0.$$

类似地，沿着第二族特征线有

$$\frac{\partial x}{\partial \nu} - \lambda_2 \frac{\partial t}{\partial \nu} = 0.$$

又由 (6.4) 得到

$$\begin{cases} a_{11} \dfrac{\partial U_1}{\partial \mu} + a_{12} \dfrac{\partial U_2}{\partial \mu} - d_1 \dfrac{\partial t}{\partial \mu} = 0,\\ a_{21} \dfrac{\partial U_1}{\partial \nu} + a_{22} \dfrac{\partial U_2}{\partial \nu} - d_2 \dfrac{\partial t}{\partial \nu} = 0.\end{cases}$$

这样，原来的双曲型方程组就化为以 ν，μ 为自变量的四阶方程组，其一般形式是

$$\begin{cases} \alpha_{11} \dfrac{\partial x}{\partial \nu} + \alpha_{12} \dfrac{\partial t}{\partial \nu} + \alpha_{13} \dfrac{\partial U_1}{\partial \nu} + \alpha_{14} \dfrac{\partial U_2}{\partial \nu} = 0,\\ \alpha_{21} \dfrac{\partial x}{\partial \nu} + \alpha_{22} \dfrac{\partial t}{\partial \nu} + \alpha_{23} \dfrac{\partial U_1}{\partial \nu} + \alpha_{24} \dfrac{\partial U_2}{\partial \nu} = 0,\\ \alpha_{31} \dfrac{\partial x}{\partial \mu} + \alpha_{32} \dfrac{\partial t}{\partial \mu} + \alpha_{33} \dfrac{\partial U_1}{\partial \mu} + \alpha_{34} \dfrac{\partial U_2}{\partial \mu} = 0,\\ \alpha_{41} \dfrac{\partial x}{\partial \mu} + \alpha_{42} \dfrac{\partial t}{\partial \mu} + \alpha_{43} \dfrac{\partial U_1}{\partial \mu} + \alpha_{44} \dfrac{\partial U_2}{\partial \mu} = 0,\end{cases}$$

其中

$$\mathrm{Det}(\alpha_{ij}) = (\lambda_1 - \lambda_2)\mathrm{Det}(a_{ij}).$$

由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，$\mathrm{Det}(a_{ij}) \neq 0$，所以 $\mathrm{Det}(\alpha_{ij}) \neq 0$. 特别地，$\alpha_{ij}$ 都不直接与 ν，μ 有关.

为书写方便计，下面只考虑含有两个未知函数 $F(\nu,\ \mu)$ 和

$G(\nu, \mu)$ 的情况，即

$$\begin{cases} a_{11}\dfrac{\partial F}{\partial \nu}+a_{12}\dfrac{\partial G}{\partial \nu}=0, \\ a_{21}\dfrac{\partial F}{\partial \mu}+a_{22}\dfrac{\partial G}{\partial \mu}=0, \end{cases} \tag{6.9}$$

其中 a_{ij} 是 F 和 G 的函数，并且在直线 $\nu+\mu=0$ 上给定初值 $F=F_0$，$G=G_0$。我们假定下列两个条件满足：

(i) F_0 和 G_0 具有有界的二阶导数，

(ii) 存在正常数 c_0，使得当 $|G-G_0|<c_0$，$|F-F_0|<c_0$ 时，$a_{ij}(F, G)$ 的所有二阶偏导数有界，并且一致地有

$$|\mathrm{Det}(a_{ij})| \geqslant \delta > 0. \tag{6.10}$$

现在用 h 表示 (ν, μ) 平面上的网格步长，$\{P_l\}$ 表示某一排上的网格点，类似地有 $\{Q_l\}$ 和 $\{R_l\}$(见图 6.3)。于是由 (6.9) 得到下列差分格式

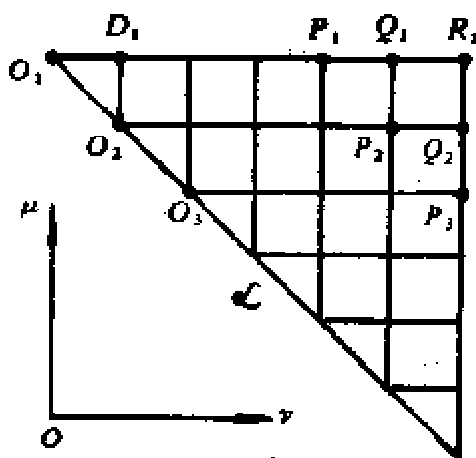


图 6.3

$$\begin{cases} a_{11}(P_1)[f(Q_1)-f(P_1)]+a_{12}(P_1) \\ \quad \times[g(Q_1)-g(P_1)]=0, \\ a_{21}(P_2)[f(Q_1)-f(P_2)]+a_{22}(P_2) \\ \quad \times[g(Q_1)-g(P_2)]=0. \end{cases} \tag{6.11}$$

为了证明收敛性，需要在上述条件下证明 f, g 的一，二阶差商在由 $\mathscr{L}$ 延拓出来的某个小范围内的一致有界性。

命题 6.1 如果在 P 行对角线上的差商有界于 N，即

$$\left|\frac{f(P_{l+1})-f(P_l)}{h}\right| \leqslant N, \left|\frac{g(P_{l+1})-g(P_l)}{h}\right| \leqslant N,$$

则 P, Q 两行间的差商有界于 c_1N，即

$$\left|\frac{f(Q_1)-f(P_1)}{h}\right|, \left|\frac{f(Q_1)-f(P_2)}{h}\right|, \cdots < c_1N,$$

$$\left|\frac{g(Q_1)-g(P_1)}{h}\right|, \left|\frac{g(Q_1)-g(P_2)}{h}\right|, \cdots < c_1N,$$

其中N与 c_1 都与h无关。

证明 将(6.11)改写为

$$\begin{cases}\alpha_{11}(P_1)[f(Q_1)-f(P_1)]+\alpha_{12}(P_1)[g(Q_1)-g(P_1)]=0,\\ \alpha_{21}(P_1)[f(Q_1)-f(P_1)]+\alpha_{22}(P_1)[g(Q_1)-g(P_1)]\\ \quad=[\alpha_{21}(P_1)-\alpha_{21}(P_2)][f(Q_1)-f(P_2)]-\alpha_{21}(P_1)[f(P_1)\\ \quad-f(P_2)]+[\alpha_{22}(P_1)-\alpha_{22}(P_2)][g(Q_1)-g(P_2)]\\ \quad\quad-\alpha_{22}(P_1)[g(P_1)-g(P_2)].\end{cases}$$

下面用 M_i 表示某个正常数。由于 α_{ij} 的偏导数一致有界，所以

$$\left|\frac{\alpha_{ij}(P_2)-\alpha_{ij}(P_1)}{h}\right|\leqslant M_1N, \tag{6.12}$$

从而由(6.10)得到

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(Q_1)-f(P_1)}{h}\right|+\left|\frac{g(Q_1)-g(P_1)}{h}\right|\\ &\quad\leqslant M_2N+hM_2N\left[\left|\frac{f(Q_1)-f(P_2)}{h}\right|\right.\\ &\quad\quad\left.+\left|\frac{g(Q_1)-g(P_2)}{h}\right|\right].\end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(Q_1)-f(P_2)}{h}\right|+\left|\frac{g(Q_1)-g(P_2)}{h}\right|\\ &\quad\leqslant M_3N+hM_3N\left[\left|\frac{f(Q_1)-f(P_1)}{h}\right|\right.\\ &\quad\quad\left.+\left|\frac{g(Q_1)-g(P_1)}{h}\right|\right].\end{aligned}$$

把以上两式相加，则当h充分小时

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(Q_1)-f(P_1)}{h}\right|+\left|\frac{g(Q_1)-g(P_1)}{h}\right|+\left|\frac{f(Q_1)-f(P_2)}{h}\right|\\ &\quad+\left|\frac{g(Q_1)-g(P_2)}{h}\right|\leqslant M_4N.\end{aligned}$$

命题 6.2 如果P行对角线上的差商有界于 N，则线性组合

$$\alpha_{11}(P_1)\frac{f(Q_1)-f(Q_2)}{h}+\alpha_{12}(P_1)\frac{g(Q_1)-g(Q_2)}{h}$$

和

$$\alpha_{21}(P_1)\frac{f(Q_1)-f(Q_2)}{h}+\alpha_{22}(P_1)\frac{g(Q_1)-g(Q_2)}{h} \quad (6.13)$$

有界于 c_2N，其中 c_2 与 h 无关.

证明 在 P_1 和 P_2 上写出 (6.11) 的第一式

$$\begin{cases}\alpha_{11}(P_1)[f(Q_1)-f(P_1)]+\alpha_{12}(P_1)[g(Q_1)-g(P_1)]=0,\\ \alpha_{11}(P_2)[f(Q_2)-f(P_2)]+\alpha_{12}(P_2)[g(Q_2)-g(P_2)]=0.\end{cases}$$

把以上两式相减后得到

$$\begin{aligned}&\alpha_{11}(P_1)\{[f(Q_1)-f(Q_2)]-[f(P_1)-f(P_2)]\}\\&\quad+\alpha_{12}(P_1)\{[g(Q_1)-g(Q_2)]-[g(P_1)-g(P_2)]\}\\&\quad+[\alpha_{11}(P_1)-\alpha_{11}(P_2)][f(Q_2)-f(P_2)]+[\alpha_{12}(P_1)\\&\quad-\alpha_{12}(P_2)][g(Q_2)-g(P_2)]=0,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\left|\alpha_{11}(P_1)\frac{f(Q_1)-f(Q_2)}{h}+\alpha_{12}(P_1)\frac{g(Q_1)-g(Q_2)}{h}\right|\\&\quad\leqslant\left|\alpha_{11}(P_1)\frac{f(P_1)-f(P_2)}{h}+\alpha_{12}(P_1)\frac{g(P_1)-g(P_2)}{h}\right|\\&\quad+h\left[\left|\frac{\alpha_{11}(P_1)-\alpha_{11}(P_2)}{h}\right|\left|\frac{f(Q_2)-f(P_2)}{h}\right|\right.\\&\quad\left.+\left|\frac{\alpha_{12}(P_1)-\alpha_{12}(P_2)}{h}\right|\left|\frac{g(Q_2)-g(P_2)}{h}\right|\right].\end{aligned}\quad (6.14)$$

由命题 6.1，即知(6.14)的右端有界于 c_2N. 类似地可证明(6.13)中的第二个线性组合也有界于 c_2N.

命题 6.3 若 (6.13) 的两个线性组合有界于 N，则 Q 行对角线上的差商有界于 c_3N，其中 c_3 与 h 无关.

证明 只要应用条件 (6.10).

现在把 Q 行以前的线性组合 (6.13) 的上界记为 E_Q，类似地定义 E_R.

命题 6.4 存在与 h 无关的正常数 c_4，使得

$$E_R\leqslant E_Q+c_4hE_Q^2.$$

证明 在 Q_1 和 Q_2 两点上写出 (6.11) 的第一式

$$\begin{cases}\alpha_{11}(Q_1)[f(R_1)-f(Q_1)]+\alpha_{12}(Q_1)[g(R_1)-g(Q_1)]=0,\\ \alpha_{11}(Q_2)[f(R_2)-f(Q_2)]+\alpha_{12}(Q_2)[g(R_2)-g(Q_2)]=0.\end{cases}$$

把以上两式相减即得到

$$\begin{aligned}&\alpha_{11}(Q_1)\frac{f(R_1)-f(R_2)}{h}+\alpha_{12}(Q_1)\frac{g(R_1)-g(R_2)}{h}\\ &\quad=\alpha_{11}(P_1)\frac{f(Q_1)-f(Q_2)}{h}+\alpha_{12}(P_1)\frac{g(Q_1)-g(Q_2)}{h}\\ &\quad+h\left\{\frac{\alpha_{11}(Q_1)-\alpha_{11}(P_1)}{h}\frac{f(Q_1)-f(Q_2)}{h}\right.\\ &\quad+\frac{\alpha_{11}(Q_2)-\alpha_{11}(Q_1)}{h}\frac{f(R_2)-f(Q_2)}{h}\\ &\quad+\frac{\alpha_{12}(Q_1)-\alpha_{12}(P_1)}{h}\frac{g(Q_1)-g(Q_2)}{h}\\ &\quad\left.+\frac{\alpha_{12}(Q_2)-\alpha_{12}(Q_1)}{h}\frac{g(R_2)-g(Q_2)}{h}\right\}.\end{aligned}$$

由命题 6.1,6.3以及与(6.12)类似的估计式,即得到

$$\begin{aligned}&\left|\alpha_{11}(Q_1)\frac{f(R_1)-f(R_2)}{h}+\alpha_{12}(Q_1)\right.\\ &\qquad\left.\times\frac{g(R_1)-g(R_2)}{h}\right|\leqslant E_Q+c_4hE_Q^2.\end{aligned}$$

类似地有

$$\begin{aligned}&\left|\alpha_{21}(Q_1)\frac{f(R_1)-f(R_2)}{h}+\alpha_{22}(Q_1)\right.\\ &\qquad\left.\times\frac{g(R_1)-g(R_2)}{h}\right|\leqslant E_Q+c_4hE_Q^2.\end{aligned}$$

由此即得所证.

现在把第 k 行以前的线性组合(6.13)的上界记为 E_k, 则

$$E_{k+1}\leqslant E_k+c_4hE_k^2.$$

由于 F_0 和 G_0 的差商有界,所以根据命题 6.2, E_1 与 h 无关.

引理 6.1 若 E_k 满足关系式

$$E_{k+1}\leqslant E_k+c_4hE_k^2,\quad k\geqslant 1,\tag{6.15}$$

则存在适当小的正数 η, 使得当 $kh<\eta$ 时, $E_k\leqslant 2E_1$.

证明 作辅助序列 W_k，它满足

$$\begin{cases}W_{k+1}=W_k+4c_4hE_1^2,\ k\geqslant 1,\\ W_1=E_1,\end{cases}$$

则有

$$W_k=E_1+4c_4h(k-1)E_1^2.$$

取适当小的 η，使得当 $kh<\eta$ 时，$4c_4h(k-1)E_1^2\leqslant E_1$，则 $W_k\leqslant 2E_1$，并且

$$W_{k+1}\geqslant W_k+c_4hW_k^2.$$

把上式与(6.15)相比较，即有 $E_k\leqslant W_k\leqslant 2E_1$.

根据引理 6.1，E_k 在小范围内一致有界. 再次应用命题 6.1 和命题 6.3，即知 f，g 对 ν，μ 的一阶差商都是一致有界的. 这些差商分别记为 f_ν，f_μ，g_ν 和 g_μ.

由于在上面的全部讨论中都默认了条件

$$|f-F_0|<c_0,\ |g-G_0|<c_0,$$

所以还要来验证它. 当 $k=0$ 时，这显然是对的. 设 $O_1,D_1,\cdots,Q_1$，R_1 的位置如图 6.3 所示，其中 R_1 在第 k 行上. 由于 O_1 在 $\mathscr{L}$ 上，所以

$$|f(R_1)-F_0(O_1)|\leqslant|f(R_1)-f(Q_1)|+|f(Q_1)-f(P_1)|+\cdots+|f(D_1)-f(O_1)|.$$

由命题 6.1，6.3 以及 $E_l\leqslant 2E_1(l\leqslant k+1)$，我们有

$$|f(R_1)-F_0(O_1)|\leqslant 2h(k+1)c_1c_3E_1.$$

若选取适当小的 η，使得当 $kh<\eta$ 时，$2h(k+1)c_1c_3E_1<c_0$，则

$$|f(R_1)-F_0(O_1)|<c_0.$$

同理可证明

$$|g(R_1)-G_0(O_1)|<c_0.$$

这样就完成了一阶差商在小范围内的一致有界性的证明.

类似地可以证明二阶差商的一致有界性.

现在在每个由三个网格点组成的小三角形内，利用(6.11)的解和线性插值构造连续函数 $F_h(x,t)$ 和 $G_h(x,t)$. 由于它们的二阶差商一致有界，所以 $\{F_h(x,t)\}$，$\{G_h(x,t)\}$ 及其一阶差

商都是等度连续的. 根据 Arzela 引理, 可选取子序列 $\{h_m\}$, 使得当 $m \to \infty$ 时, $h_m \to 0$, 而 $\{F_{h_m}\}$, $\{G_{h_m}\}$, $\{F_{h_m, \nu}\}$, $\{G_{h_m, \nu}\}$, $\{F_{h_m, \mu}\}$ 和 $\{G_{h_m, \mu}\}$ 分别一致收敛到连续函数 F, G, F_1, G_1, F_2 和 G_2. 可以仿照 § 5.1中的方法证明

$$\frac{\partial F}{\partial \nu} = F_1, \quad \frac{\partial F}{\partial \mu} = F_2, \quad \frac{\partial G}{\partial \nu} = G_1,$$

$$\frac{\partial G}{\partial \mu} = G_2.$$

最后在 (6.11) 的两边除以 h_m, 并令 $m \to \infty$, 即知 F 和 G 满足 (6.9). 因此, $F_{h_m}(x, t)$ 和 $G_{h_m}(x, t)$ 一致收敛到 (6.9) 的古典解. 进而可证明古典解是唯一的.

定理 6.1 如果 $\mathscr{L}$ 是处处不与特征方向相切的光滑曲线, G_0, F_0 和 a_{ij} 满足条件 (i) 和 (ii), 那么在由 $\mathscr{L}$ 延拓出来的一个适当小范围内, (6.9) 有唯一的古典解.

本节的证明方法可见 Sauer (1952) 的文章.

6.2 矩形网格上的特征型格式

本节介绍矩形网格上的特征型差分格式. 设 $\mathscr{L}$ 是 x 轴上的某一段, 且处处不与特征线相切. 在 $\mathscr{L}$ 上给定初值 $U_0(x)$, 并且满足下列条件:

(i) $U_0(x)$ 在 $\mathscr{L}$ 上有连续的且一致满足 Lipschitz 条件的导数;

(ii) $\mathscr{D}$ 是 (x, t) 平面上包含 $\mathscr{L}$ 的某个区域, 且存在正常数 c_l, 使得当 $(x, t) \in \mathscr{D}$ 和

$$|W_l - U_{0,l}(x)| < c_l, \quad 1 \leqslant l \leqslant n,$$

时, $A(x, t, W)$, $A(x, t, W)$ 和 $d(x, t, W)$ 对其 $n+2$ 个自变量都有一致满足 Lipschitz 条件的偏导数;

(iii) 存在正常数 M 和 δ, 使得上述条件满足时,

$$|\lambda_l| \leqslant M, \quad |\mathrm{Det} A| \geqslant \delta > 0;$$

于是, (6.1) 的初值问题在包含 $\mathscr{L}$ 的某个小区域 $\mathscr{D}_1$ 内存在唯

一的古典解，并且它的偏导数也一致满足 Lipschitz 条件。

现在用 h 和 τ 分别表示 x 和 t 的步长，$\tau = rh$，

$$r \leqslant \frac{1}{M}.$$

P'，P 和 P'' 表示某一行中紧邻的三个网格点，Q，P^*，P^{**} 的位置如图 6.4 所示。

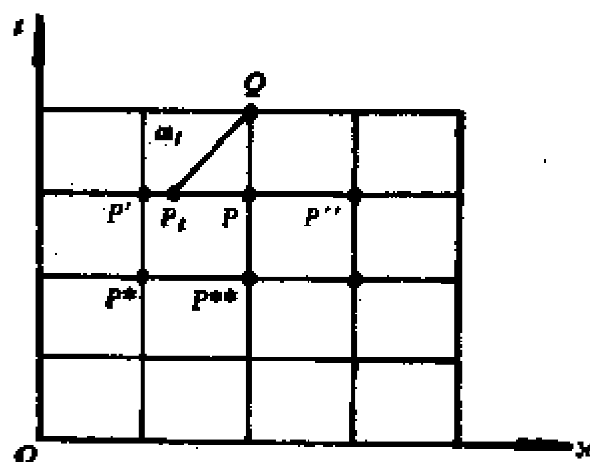


图 6.4

假定 $U(P')$，$U(P)$ 和 $U(P'')$ 的近似值 $u(P')$，$u(P)$ 和 $u(P'')$ 已经求得。从 Q 点向下方作 n 条直线 $\mathscr{L}_i$，它们的斜率为 $\lambda_i^{-1}(P, u(P))$，显然它们是相应的特征线的近似。由于

$$r \leqslant \frac{1}{M},$$

所以只要 $u(P)$ 的值满足条件

$$|u_i(P) - U_{0,i}(x)| < c_i, \tag{6.16}$$

那么，$\mathscr{L}_i$ 与 P' 和 P'' 两点连线的交点 P_i，必定落在 P' 与 P'' 之间。若 $\lambda_i(P, u(P)) \geqslant 0$，则 P_i 落在 P' 和 P 之间，所以由 (6.4) 得到下列差分格式

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(P, u(P)) \left[\frac{u_j(Q) - u_j(P_i)}{\tau}\right] = d_i(P, u(P)). \tag{6.17}$$

但点 P_i 一般不是网格点，通常应用插值方法计算它的值。如果采

用线性插值,则有

$$u_j(P_l)=\frac{\overline{P_lP}u_j(P')+\overline{P'P_l}u_j(P)}{h},$$

其中 $\overline{P_lP}$ 和 $\overline{P'P_l}$ 分别表示线段 $\widehat{P_lP}$ 和 $\widehat{P'P_l}$ 的长度. 把上式代入(6.17),因为

$$\overline{P_lP}=\tau\lambda_l(P,\ u(P)),\ \overline{P'P_l}=h-\tau\lambda_l(P,\ u(P)),$$

所以

$$\sum_{j=1}^{n}a_{lj}(P,\ u(P))\left[\frac{u_j(Q)-u_j(P)}{\tau}\right.$$
$$\left.+\lambda_l(P,\ u(P))\frac{u_j(P)-u_j(P')}{h}\right]$$
$$=d_l(P,\ u(P)).\tag{6.18}$$

若 $\lambda_l(P,\ u(P))\leqslant 0$, 则相应地有

$$\sum_{j=1}^{n}a_{lj}(P,\ u(P))\left[\frac{u_j(Q)-u_j(P)}{\tau}\right.$$
$$\left.+\lambda_l(P,\ u(P))\frac{u_j(P'')-u_j(P)}{h}\right]$$
$$=d_l(P,\ u(P)).\tag{6.19}$$

今后为确定计,均假定 $\lambda_l\geqslant 0$. 显然,(6.18),(6.19)实质上就是 Courant 格式. 如果 $\mathrm{Det}(a_{lj}(P,\ u(P)))\neq 0$, 则可由此两式求得一切 $u_i(Q)$ 的值.

下面来估计计算误差. 记 $\tilde{u}=u-U$. 由于 $U(P)$ 的偏导数和 a_{lj}, λ_l, d_l 都满足一致 Lipschitz 条件,因此

$$\sum_{j=1}^{n}a_{lj}(P,\ u(P))\left[\frac{U_j(Q)-U_j(P)}{\tau}\right.$$
$$\left.+\lambda_l(P,u(P))\ \frac{U_j(P)-U_j(P')}{h}\right]$$
$$=d_l(P,\ u(P))+O(|\tilde{u}(P)|)+O(h).\tag{6.20}$$

把(6.19)和(6.20)两式相减,即得到

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(P,\ u(P))\left[\frac{\tilde{u}_j(Q)-\tilde{u}_j(P)}{\tau}\right.$$

$$\left.+\lambda_i(P,u(P))\frac{\tilde{u}_j(P)-\tilde{u}_j(P')}{h}\right]$$

$$=O(|\tilde{u}(P)|)+O(h), \tag{6.21}$$

并且在 $\mathscr{L}$ 上 $\tilde{u}(P)$ 是零向量.

直接从(6.21)来估计 $|\tilde{u}|$ 相当困难，为此引入辅助误差向量 $\tilde{v}(Q)$，

$$\tilde{v}_i(Q)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(P,u(P))\tilde{u}_j(Q).$$

显然有 $O(|\tilde{u}|)=O(|\tilde{v}|)$. 由于

$$a_{ij}(P,u(P))\tilde{u}_j(P')=a_{ij}(P^*,\ u(P^*))\tilde{u}_j(P')$$

$$+[a_{ij}(P,\ u(P))-a_{ij}(P^*,\ u(P^*))]\tilde{u}_j(P'),$$

$$|a_{ij}(P,\ u(P))-a_{ij}(P^*,\ u(P^*))|$$

$$=O(|u(P)-u(P^*)|)+O(h),$$

以及

$$u(P^*)-u(P)=[u(P^*)-U(P^*)]+[U(P^*)$$

$$-U(P)]+[U(P)-u(P)]$$

$$=\tilde{u}(P^*)-\tilde{u}(P)+O(h),$$

我们得到

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(P,\ u(P))\tilde{u}_j(P')=\tilde{v}_i(P')+O(|\tilde{u}(P')||\tilde{u}(P^*)|)$$

$$+O(|\tilde{u}(P')||\tilde{u}(P)|)+O(h|\tilde{u}(P')|).$$

相仿地有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(P,\ u(P))\tilde{u}_j(P)=\tilde{v}_i(P)+O(|\tilde{u}(P)||\tilde{u}(P^{**})|)$$

$$+O(|\tilde{u}(P)|^2)+O(h|\tilde{u}(P)|).$$

把以上两式代入(6.21)，即得到

$$\frac{\tilde{v}_i(Q)-\tilde{v}_i(P)}{\tau}+\lambda_i(P,\ u(P))\frac{\tilde{v}_i(P)-\tilde{v}_i(P')}{h}$$

$$= \frac{\omega(Q)}{\tau},$$

或者

$$\tilde{v}_l(Q) = [1 - r\lambda_l(P, u(P))]\tilde{v}_l(P) + r\lambda_l(P, u(P))\tilde{v}_l(P') + \omega(Q), \tag{6.22}$$

其中

$$\omega(Q) = O(|\tilde{v}(P)|^2) + O(|\tilde{v}(P)||\tilde{v}(P')|) + O(|\tilde{v}(P)||\tilde{v}(P^{**})|) + O(|\tilde{v}(P')||\tilde{v}(P^*)|) + O(h|\tilde{v}(P)|) + O(h|\tilde{v}(P')|) + O(h^2).$$

特别,若 P 位于初值线 $\mathscr{L}$ 上,Q 位于直线 $t = \tau$ 上,则 $\omega(P) = 0$, $\omega(Q) = O(h^2)$.

今假定 P, P' 和 P'' 在第 k 行上, Q 在第 $k+1$ 行上. 用 E_k 表示第 k 行所有网格点上的 $|\tilde{v}|$ 的最大值,那末,由于

$$r \leqslant \frac{1}{M},$$

所以由 (6.22) 得到

$$\begin{cases} E_{k+1} \leqslant E_k + N(E_k^2 + E_k E_{k-1} + hE_k + h^2), \\ E_1 = O(h^2), \\ E_0 = 0, \end{cases} \tag{6.23}$$

其中 N 是适当的正数.

引理 6.2 若 kh 小于某个适当的正常数,且 E_k 满足 (6.23), 则 $E_k = O(h^2)$.

证明 作辅助序列 $\{W_k\}$, 它满足

$$\begin{cases} W_{k+1} = W_k + 4Nh^2, \ k > 1, \\ W_1 = c_0 h^2, \\ W_0 = 0. \end{cases} \tag{6.24}$$

选择适当的正数 c_0, 使得 $E_1 \leqslant W_1$, $h < \frac{1}{2c_0}$,则 $W_1 < \frac{h}{2}$. 如果 $(k-1)h < \frac{1}{8N}$, 则有

$$W_k = W_1 + 4N(k-1)h^2 < h,$$

因此

$$N(W_k^2 + W_kW_{k-1} + hW_k) \leqslant 3Nh^2.$$

代入 (6.24) 后得到

$$W_{k+1} \geqslant W_k + N(W_k^2 + W_kW_{k-1} + hW_k + h^2).$$

把上式与 (6.23) 相比较,即得所要证的结论.

根据引理 6.2, $|\tilde{u}| = O(|\tilde{v}|) = O(h)$.

由于以上的证明过程中都假定 (6.16) 成立,所以还需要验证它. 显然,在初值线 $\mathscr{L}$ 上,(6.16) 是成立的. 今假定当 $t \leqslant k\tau$ 时,结论也成立,那么,由于在 $\mathscr{D}_1$ 内,

$$|U_l(x, t) - U_{0,l}(x)| < c_l, \quad 1 \leqslant l \leqslant n,$$

因此存在正常数 ε, 使得 $h < \varepsilon$, 且在包含 $\mathscr{L}$ 的一个闭子区域 $\mathscr{D}_2$ 内,

$$|U_l(x, t) - U_{0,l}(x)| < c_l - \varepsilon.$$

假定 $Q \in \mathscr{D}_2 \cap \left\{(x,t)\,|\,t < \dfrac{r}{8N}\right\}$, 那么一方面上式成立,另一方面又有

$$|U_l(Q) - u_l(Q)| < h < \varepsilon.$$

所以在这个小区域内

$$|U_l(Q) - U_{0,l}(x)| < c_l, \quad 1 \leqslant l \leqslant n.$$

综合上面的讨论,即得到下面的结果:

定理 6.2 若条件 (i), (ii), (iii) 成立, $r \leqslant \dfrac{1}{M}$, 那末格式 (6.18), (6.19) 的解在由 $\mathscr{L}$ 延拓出来的适当小区域内, 以 $O(h)$ 的速率,按最大模收敛到 (6.1) 的解.

如果 $\mathscr{L}$ 是处处不与特征线相切的光滑曲线, 则可采用曲线网格来求解. Courant, Isancson, Rees (1952) 把前面的结果推广到这种情况.

例 6.1 在柱形河床中,河渠不稳定流动的 Saint-Venant 方程是

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial F}{\partial t}+F\dfrac{\partial U}{\partial x}+U\dfrac{\partial F}{\partial x}=0,\\[2mm]
\dfrac{\partial U}{\partial t}+U\dfrac{\partial U}{\partial x}+\dfrac{g}{B}\dfrac{\partial F}{\partial x}=N,
\end{cases}
\tag{6.25}
$$

其中 x 表示从某个断面开始的流程的长度，t 表示时间，F 表示过水断面的面积，U 是平均速度，g 是重力加速度，$B=B(F)>0$，N 是 U，F，x 和 t 的函数. 不难求得

$$
\lambda_1=U+\sqrt{\frac{Fg}{B}},\quad \lambda_2=U-\sqrt{\frac{Fg}{B}},
$$

因此得到下列正规形式

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial F}{\partial t}+\left(U-\sqrt{\dfrac{Fg}{B}}\right)\dfrac{\partial F}{\partial x}-\sqrt{\dfrac{FB}{g}}\Bigg(\dfrac{\partial U}{\partial t}\\[2mm]
\qquad +\left(U-\sqrt{\dfrac{Fg}{B}}\right)\dfrac{\partial U}{\partial x}\Bigg)=-\sqrt{\dfrac{FB}{g}}N,\\[2mm]
\dfrac{\partial U}{\partial t}+\left(U+\sqrt{\dfrac{Fg}{B}}\right)\dfrac{\partial U}{\partial x}+\sqrt{\dfrac{g}{FB}}\Bigg(\dfrac{\partial F}{\partial t}\\[2mm]
\qquad +\left(U+\sqrt{\dfrac{Fg}{B}}\right)\dfrac{\partial F}{\partial x}\Bigg)=N.
\end{cases}
$$

如果

$$
|u(P)|\leqslant\sqrt{\frac{f(P)g}{B(f(P))}},
$$

则有下列特征型差分格式

$$
\begin{cases}
\dfrac{f(Q)-f(P)}{\tau}+\left(u(P)-\sqrt{\dfrac{f(P)g}{B(f(P))}}\right)\dfrac{f(P')-f(P)}{h}\\[2mm]
\qquad -\sqrt{\dfrac{f(P)B(f(P))}{g}}\Bigg(\dfrac{u(Q)-u(P)}{\tau}+\Bigg(u(P)\\[2mm]
\qquad -\sqrt{\dfrac{f(P)g}{B(f(P))}}\Bigg)\dfrac{u(P')-u(P)}{h}\Bigg)\\[2mm]
\qquad =-\sqrt{\dfrac{f(P)B(f(P))}{g}}N(P,\ f(P),\ u(P)),
\end{cases}
$$

$$
\left[\frac{u(Q)-u(P)}{\tau}+\left(u(P)+\sqrt{\frac{f(P)g}{B(f(P))}}\right)\frac{u(P)-u(P')}{h}\right.
$$

$$
+\sqrt{\frac{g}{f(P)B(f(P))}}\left(\frac{f(Q)-f(P)}{\tau}+\left(u(P)\right.\right.
$$

$$
\left.\left.+\sqrt{\frac{f(P)g}{B(f(P))}}\right)\frac{f(P)-f(P')}{h}\right)
$$

$$
\left.=N(P,\ f(P),\ u(P)).\right.
$$

相仿地，可推出其它三种情况的差分格式。

6.3 二次守恒格式，预估校正法

特征型差分格式是基于物理上的传输律．根据双曲型方程的守恒律，也可以构造各种差分格式，在本节中以下列问题为例来说明它，

$$
\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}+U\dfrac{\partial U}{\partial x}=f(x,\ t),\ -\infty<x<\infty,\ 0<t\leqslant T,\\ U(x,0)=U_0(x),\ -\infty<x<\infty.\end{cases} \tag{6.26}
$$

h 和 τ 的意义如前，空间网格区域

$$
\mathscr{I}_h=\{x\,|\,x=jh,\ 1\leqslant j\leqslant J-1\},\ Jh=1+h.
$$

我们假定 $U_0(x)$，$f(x,\ t)$ 和 $U(x,\ t)$ 都对 x 以 1 为周期，并采用 § 4.3 中的记号．如同 § 1.2，定义下列差分算子

$$
J(v(x),\ w(x))=\frac{1}{3}w(x)v_{\hat{x}}(x)+\frac{1}{3}(w(x)v(x))_{\hat{x}}. \tag{6.27}
$$

命题 6.5 对一切函数 u，v 和 w，都有

$$
(J(u,\ w),v)+(J(v,w),\ u)=G(u,\ v,\ w), \tag{6.28}
$$

其中

$$
G(u,\ v,\ w)=\frac{1}{6}(u(1+h)v(1)w(1+h)
$$

$$
+u(1)v(1+h)w(1)+u(1)v(1+h)w(1+h)
$$

$$+ u(1+h)v(1)w(1))$$

$$-\frac{1}{6}(u(h)v(0)w(h)+u(0)v(h)w(0)$$

$$+u(0)v(h)w(h)+u(h)v(0)w(0)).$$

证明 由 Abel 公式得到

$$(\eta,\ \xi_x)+(\eta_{\bar{x}},\ \xi)=\eta(1)\xi(1+h)-\eta(0)\xi(h),$$

$$(\eta,\ \xi_{\bar{x}})+(\eta_x,\ \xi)=\eta(1+h)\xi(1)-\eta(h)\xi(0).$$

把以上两式相加即得到

$$(\eta,\xi_{\mathring{x}})+(\eta_{\mathring{x}},\xi)=\frac{1}{2}(\eta(1+h)\xi(1)+\eta(1)\xi(1+h)$$

$$-\eta(0)\xi(h)-\eta(h)\xi(0)). \tag{6.29}$$

先在上式中令 $\eta=v$, $\xi=uw$, 则得到

$$(v,(uw)_{\mathring{x}})+(v_{\mathring{x}},\ uw)=\frac{1}{2}(u(1)v(1+h)w(1)$$

$$+u(1+h)v(1)w(1+h)-u(h)v(0)w(h)$$

$$-u(0)v(h)w(0)).$$

再在 (6.29) 中令 $\eta=u$, $\xi=vw$, 则得到

$$(u,(vw)_{\mathring{x}})+(u_{\mathring{x}},vw)=\frac{1}{2}(u(1+h)v(1)w(1)$$

$$+u(1)v(1+h)w(1+h)-u(0)v(h)w(h)$$

$$-u(h)v(0)w(0)).$$

把以上两式相加,即得 (6.28).

特别,若 u, v, w 都以 1 为周期,或者

$$u(0)=v(0)=u(1)=v(1)=0,$$

则

$$(J(u,\ w),\ v)+(J(v,\ w),\ u)=0. \tag{6.30}$$

记 $u^k(x)=u(x,\ k\tau)$, 并用下列格式计算 (6.26),

$$\begin{cases} u_t^k(x)+J(u^k(x)+\delta\tau u_t^k(x),\ u^k(x)+\theta\tau u_t^k(x))=f^k(x), \\ \qquad\qquad x\in\mathscr{I}_h,\ k\geqslant 0, \\ u^k(x+1)=u^k(x),\ x\in\mathscr{I}_h,\ k\geqslant 0, \\ u^0(x)=U_0(x),\ x\in\mathscr{I}_h, \end{cases} \tag{6.31}$$

其中δ和θ是参数，$0 \leqslant \delta, \theta \leqslant 1$. 假定 $f^k(x) \equiv 0$, 于是当 $\delta = \theta = \frac{1}{2}$ 时，根据§1.2中的分析，它的解同时满足两个离散形式的守恒律，但在每个时刻 $k\tau$，都需要求解一个非线性代数方程组。当 $\delta = \frac{1}{2}$, $\theta = 0$ 时，根据(6.30)，$\|u^k\|^2$ 是守恒的，但并不满足一次守恒律. 此外，在每一时刻，需要求解一个线性代数方程组，根据周期条件，可仿照郭本瑜 (1965_b) 的方法来计算. 在实际计算中，为了加强稳定性，通常取 $\delta > \frac{1}{2}$.

下面假定 $\delta = \theta = 0$, 于是(6.31)是易于计算的显式格式，并由(1.18)推得，它的解满足离散形式的一次守恒律. 但若把(6.31)第一式与 $2u^k(x)$ 求内积，则由(6.30)和引理4.12得到

$$(\|u^k\|^2)_t = \tau\|u^k_t\|^2 + 2(f^k, u^k)$$

所以，即使 $f^k(x) \equiv 0$, $\|u^k\|^2$ 仍随 k 的增大而增大，当 $\|u^k\|^2$ 超过一定值时，计算就可能出现不稳定. 为了克服这种现象，可采用预估一校正方法，例如用 $u^{k+\frac{1}{2}}(x)$ 表示 $u^{k+1}(x)$ 的预估值，β 是非负参数，则有下列预估一校正格式

$$\begin{cases} u^{k+\frac{1}{2}}(x) = u^k(x) - \beta\tau J(u^k(x), u^k(x)), \\ \qquad\qquad x \in \mathscr{I}_h, k \geqslant 0, \\ u^k_t(x) + J(u^{k+\frac{1}{2}}(x), u^k(x)) = f^k(x), \\ \qquad\qquad x \in \mathscr{I}_h, k \geqslant 0, \end{cases} \tag{6.32}$$

它又等价于

$$u^k_t(x) + J(u^k(x), u^k(x)) - \beta\tau J(J(u^k(x), u^k(x)), u^k(x)) = f^k(x).$$

把上式与 $2u^k(x)$ 求内积，就得到

$$\|u^k\|^2_t - \tau\|u^k_t\|^2 + 2\beta\tau\|J(u^k, u^k)\|^2 = 2(u^k, f^k).$$

因为当 $f^k(x) \equiv 0$ 时，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} \approx u_t, \qquad U\dfrac{\partial U}{\partial x} \approx J(u, u), \\ \dfrac{\partial U}{\partial t} + U\dfrac{\partial U}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

所以若取 $\beta=\frac{1}{2}$，则 $\|u^k\|^2$ 是几乎守恒的. 为了加强计算稳定性，通常取 β 略大于 $\frac{1}{2}$. 关于这个格式的误差估计，可见郭本瑜(1981).

格式 (6.32) 的缺点是它的解不满足离散形式的一次守恒律. 为了克服这个缺点，可以采用下列格式

$$
\begin{cases}
u^{k+\frac{1}{2}}(x)=u^k(x)-\beta\tau J(u^k(x),\ u^k(x)), \\
\qquad\qquad x\in\mathscr{I}_h,\ k\geqslant 0, \\
u_t^k(x)+J(u^{k+\frac{1}{2}}(x),\ u^{k+\frac{1}{2}}(x))=f^k(x), \\
\qquad\qquad x\in\mathscr{I}_h,\ k\geqslant 0,
\end{cases}
\tag{6.33}
$$

它又等价于

$$
\begin{aligned}
u_t^k(x)&+J(u^k(x),u^k(x))-\beta\tau J(u^k(x),J(u^k(x),u^k(x))) \\
&-\beta\tau J(J(u^k(x),\ u^k(x)),\ u^k(x)) \\
&+\beta^2\tau^2 J(J(u^k(x),\ u^k(x)),\ J(u^k(x),\ u^k(x))) \\
&=f^k(x).
\end{aligned}
$$

若 $f^k(x)\equiv 0$，则由 (1.18) 可知，$h\sum\limits_{x\in\mathscr{I}_h}u^k(x)$ 是守恒的. 另一方面，又由 (6.30) 得到

$$
\begin{aligned}
\|u^k\|_t^2&-\tau\|u_t^k\|^2+2\beta\tau\|J(u^k,\ u^k)\|^2 \\
&-\beta^2\tau^2(J(u^k,\ u^k),\ J(u^k,\ J(u^k,\ u^k)))=0,
\end{aligned}
$$

所以又较好地满足二次守恒律，因此会给出更好的数值结果.

下面用能量方法来分析 (6.33) 的广义稳定性. 假设 $u^k(x)$ 和 $f^k(x)$ 分别有误差 $\tilde{u}^k(x)$ 和 $\tilde{f}^k(x)$，则满足

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}_t^k(x)&+J(\tilde{u}^k(x),\ u(x)+\tilde{u}^k(x)) \\
&-\beta\tau J(J(\tilde{u}^k(x),\ u^k(x)+\tilde{u}^k(x)),\ u^k(x)+\tilde{u}^k(x)) \\
&-\beta\tau J(\tilde{u}^k(x),\ J(u^k(x)+\tilde{u}^k(x),u^k(x)+\tilde{u}^k(x))) \\
&+\sum_{l=1}^{12}A_l^k(x)=\tilde{f}^k(x),
\end{aligned}
\tag{6.34}
$$

其中

$$A_1^k(x) = J(u^k(x),\ \tilde{u}^k(x)),$$
$$A_2^k(x) = -\beta\tau J(J(u^k(x),\ \tilde{u}^k(x)),\ u^k(x) + \tilde{u}^k(x)),$$
$$A_3^k(x) = -\beta\tau J(J(u^k(x),\ u^k(x)),\ \tilde{u}^k(x)),$$
$$A_4^k(x) = -\beta\tau J(u^k(x),\ J(\tilde{u}^k(x),\ u^k(x) + \tilde{u}^k(x))),$$
$$A_5^k(x) = -\beta\tau J(u^k(x),\ J(u^k(x),\ \tilde{u}^k(x))),$$
$$A_6^k(x) = \beta^2\tau^2 J(J(u^k(x),\ u^k(x)),\ J(u^k(x),\ \tilde{u}^k(x))),$$
$$A_7^k(x) = \beta^2\tau^2 J(J(u^k(x),u^k(x)),J(\tilde{u}^k(x),u^k(x)+\tilde{u}^k(x))),$$
$$A_8^k(x) = \beta^2\tau^2 J(J(u^k(x),\ \tilde{u}^k(x)),\ J(u^k(x),\ u^k(x))),$$
$$A_9^k(x) = \beta^2\tau^2 J(J(u^k(x),\ \tilde{u}^k(x)),\ J(u^k(x),\ \tilde{u}^k(x))),$$
$$A_{10}^k(x) = \beta^2\tau^2 J(J(u^k(x),\ \tilde{u}^k(x)),\ J(\tilde{u}^k(x),\ u^k(x) + \tilde{u}^k(x))),$$
$$A_{11}^k(x) = \beta^2\tau^2 J(J(\tilde{u}^k(x),\ u^k(x) + \tilde{u}^k(x)),\ J(u^k(x),\ u^k(x) + \tilde{u}^k(x))),$$
$$A_{12}^k(x) = \beta^2\tau^2 J(J(\tilde{u}^k(x),\ u^k(x) + \tilde{u}^k(x)),\ J(\tilde{u}^k(x),u^k(x) + \tilde{u}^k(x)))。$$

把 (6.34) 与 $2\tilde{u}^k(x)$ 求内积，由引理 4.12 和 (6.30) 得到

$$\|\tilde{u}^k\|_t^2 - \tau\|\tilde{u}_t^k\|^2 + 2\beta\tau\|J(\tilde{u}^k,\ u^k + \tilde{u}^k)\|^2 + 2\sum_{l=1}^{12}(\tilde{u}^k,\ A_l) \leqslant \|\tilde{u}^k\|^2 + \|\tilde{f}^k\|^2. \tag{6.35}$$

设 m 是待定系数，并把 (6.34) 对 $m\tau\tilde{u}_t^k(x)$ 求内积，则得到

$$\begin{aligned} &m\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2 + m\tau(\tilde{u}_t^k,\ J(\tilde{u}^k,\ u^k + \tilde{u}^k)) \\ &- m\beta\tau^2(\tilde{u}_t^k,\ J(J(\tilde{u}^k,\ u^k + \tilde{u}^k),u^k + \tilde{u}^k)) \\ &- m\beta\tau^2(\tilde{u}_t^k,\ J(\tilde{u}^k,\ J(u^k + \tilde{u}^k,\ u^k + \tilde{u}^k))) \\ &+ m\tau\sum_{l=1}^{12}(\tilde{u}_t^k,\ A_l^k) \leqslant a\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2 \\ &+ \frac{M_0}{4a}\|\tilde{f}^k\|^2,\ a > 0, \end{aligned} \tag{6.36}$$

在本章中，用 M_l 表示与 $u^k(x)$ 有关的正常数，但不明显依赖于 h。

下面来估计 (6.35) 和 (6.36) 中的各项。 首先对任意的 v 和

w，由(6.29)得到

$$
\begin{aligned}
(w,\ J(v,\ w)) &= \frac{1}{3}(w^2,\ v_{\mathring{x}}) + \frac{1}{3}(w,\ (wv)_{\mathring{x}}) \\
&= \frac{1}{3}(w^2,\ v_{\mathring{x}}) - \frac{1}{3}(w,\ vw_{\mathring{x}}) + D,
\end{aligned}
\tag{6.37}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
D = &\frac{1}{6} w(1)w(1+h)(v(1)+v(1+h)) \\
&- \frac{1}{6} w(h)w(0)(v(h)+v(0)).
\end{aligned}
$$

因为

$$
(wv)_{\mathring{x}} = wv_{\mathring{x}} + w_{\mathring{x}}v + \frac{h}{2}\ w_x v_x - \frac{h}{2}\ w_{\bar{x}} v_{\bar{x}},
$$

所以又有

$$
\begin{aligned}
(w,\ J(v,\ w)) = &\frac{2}{3}(w^2,\ v_{\mathring{x}}) + \frac{1}{3}(ww_{\mathring{x}},\ v) \\
&+ \frac{h}{6}(ww_x,\ v_x) - \frac{h}{6}(ww_{\bar{x}},\ v_{\bar{x}}).
\end{aligned}
$$

把上式与(6.37)相加得到

$$
\begin{aligned}
2(w,\ J(v,\ w)) = &(w^2,\ v_{\mathring{x}}) + \frac{h}{6}(ww_x,\ v_x) \\
&- \frac{h}{6}(ww_{\bar{x}},\ v_{\bar{x}}) + D.
\end{aligned}
\tag{6.38}
$$

在上式中令 $w=\tilde{u}^k$，$v=u^k$，因为 $u^k(x)$ 和 $\tilde{u}^k(x)$ 以 1 为周期，所以

$$
\begin{aligned}
2(\tilde{u}^k,\ A_1^k) = &((\tilde{u}^k)^2,\ u_{\mathring{x}}^k) + \frac{h}{6}(\tilde{u}^k\tilde{u}_x^k,\ u_x^k) \\
&- \frac{h}{6}(\tilde{u}^k\tilde{u}_{\bar{x}}^k,\ u_{\bar{x}}^k).
\end{aligned}
$$

类似地估计 $2(\tilde{u}^k,\ A_3^k)$ 后得到

$$
|2(\tilde{u}^k,\ A_1^k + A_3^k)| \leqslant M_1\|\tilde{u}^k\|^2.
$$

因为

$$2(\tilde{u}^k, A_2^k) = 2\beta\tau(J(u^k, \tilde{u}^k), J(\tilde{u}^k, u^k + \tilde{u}^k)),$$

所以

$$|2(\tilde{u}^k, A_2^k)| \leqslant \frac{M_2\tau}{bh^2}\|\tilde{u}^k\|^2 + 2\beta b\tau\|J(\tilde{u}^k, u^k + \tilde{u}^k)\|^2, \quad b > 0.$$

不难验证

$$|2(\tilde{u}^k, A_4^k + A_7^k)| \leqslant \frac{M_3}{\varepsilon}\|\tilde{u}^k\|^2 + \varepsilon\left(\frac{\tau^2}{h^2} + \frac{\tau^4}{h^2}\right)\|J(\tilde{u}^k, u^k + \tilde{u}^k)\|^2, \quad \varepsilon > 0,$$

$$|2(\tilde{u}^k, A_5^k + A_6^k + A_8^k)| \leqslant M_4\left(1 + \frac{\tau^2}{h^4}\right)\|\tilde{u}^k\|^2,$$

$$|2(\tilde{u}^k, A_9^k)| \leqslant M_5\left(\|\tilde{u}^k\|^2 + \frac{\tau^4}{h^4}\|\tilde{u}^k\|^2 + \frac{\tau^4}{h^7}\|\tilde{u}^k\|^4\right),$$

$$\begin{aligned}|2(\tilde{u}^k, A_{10}^k + A_{11}^k)| &\leqslant M_6\|\tilde{u}^k\|^2 + \frac{\tau^4}{h^3}\|J(\tilde{u}^k, u^k + \tilde{u}^k)\|^2 \\ &\quad (\|J(u^k, \tilde{u}^k)\|^2 + \|J(u^k, u^k + \tilde{u}^k)\|^2) \\ &\leqslant M_7\|\tilde{u}^k\|^2 + \frac{M_7\tau^4}{h^3}\|J(\tilde{u}^k, u^k + \tilde{u}^k)\|^2 \\ &\quad + \frac{M_7\tau^4}{h^5}\|\tilde{u}^k\|^2\|J(\tilde{u}^k, u^k + \tilde{u}^k)\|^2.\end{aligned}$$

又由 (6.30) 得到

$$2(\tilde{u}^k, A_{12}^k) = -2\beta^2\tau^2(J(\tilde{u}^k, u^k + \tilde{u}^k), J(\tilde{u}^k, J(\tilde{u}^k, u^k + \tilde{u}^k))),$$

所以由 (6.38) 得到

$$\begin{aligned}|2(\tilde{u}^k, A_{12}^k)| &\leqslant M_8\tau^2\|\tilde{u}_x^k\|_\infty\|J(\tilde{u}^k, u^k + \tilde{u}^k)\|^2 \\ &\leqslant \frac{M_8\tau^2}{h^{1.5}}\|\tilde{u}^k\|\|J(\tilde{u}^k, u^k + \tilde{u}^k)\|^2.\end{aligned}$$

又可估计得到

$$|m\tau(\tilde{u}_t^k, A_1^k + A_3^k + A_5^k + A_6^k + A_8^k)| \leqslant a\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2 + \frac{M_9}{a}\left(\frac{\tau}{h^2} + \frac{\tau^3}{h^4}\right)\|\tilde{u}^k\|^2,$$

$$|m\tau(\tilde{u}_{\bar{t}}^k, A_2^k + A_9^k)| \leqslant a\tau\|\tilde{u}_{\bar{t}}^k\|^2 + \frac{M_{10}}{a}\left(1 + \frac{\tau^3}{h^4}\right)\|\tilde{u}^k\|^2$$

$$+ \frac{M_{10}}{a}\left(\frac{\tau^3}{h^5} + \frac{\tau^5}{h^7}\right)\|\tilde{u}^k\|^4,$$

$$|m\tau(\tilde{u}_{\bar{t}}^k,\ A_4^k + A_7^k)| \leqslant a\tau\|\tilde{u}_{\bar{t}}^k\|^2 + \frac{M_{11}\tau^3}{ah^2}\|J(\tilde{u}^k,\ u^k + \tilde{u}^k)\|^2,$$

$$|m\tau(\tilde{u}_{\bar{t}}^k,\ A_{10}^k + A_{11}^k + A_{12}^k)| \leqslant a\tau\|\tilde{u}_{\bar{t}}^k\|^2 + \frac{M_{12}\tau_5}{ah^3}\|J(\tilde{u}^k,$$

$$u^k + \tilde{u}^k)\|^2 + \frac{M_{12}\tau^5}{ah^5}\|\tilde{u}^k\|^2\|J(\tilde{u}^k,\ u^k + \tilde{u}^k)\|^2.$$

此外

$$|m\tau(\tilde{u}_{\bar{t}}^k,\ J(\tilde{u}^k,\ u^k + \tilde{u}^k))| \leqslant \frac{m^2\tau}{4(7a + 1)}\|\tilde{u}_{\bar{t}}^k\|^2$$

$$+ \tau(7a + 1)\|J(\tilde{u}^k,\ u^k + \tilde{u}^k)\|^2,$$

$$|m\beta\tau^2(\tilde{u}_{\bar{t}}^k,\ J(\tilde{u}^k,\ J(u^k + \tilde{u}^k, u^k + \tilde{u}^k)))| \leqslant a\tau\|\tilde{u}_{\bar{t}}^k\|^2$$

$$+ \frac{\beta^2 m^2\tau^3}{4a}\|J(\tilde{u}^k,\ J(u^k + \tilde{u}^k,\ u^k + \tilde{u}^k))\|^2$$

$$\leqslant a\tau\|\tilde{u}_{\bar{t}}^k\|^2 + \frac{2\beta^2 m^2\tau^3}{ah^3}\|\tilde{u}^k\|^2\|J(u^k + \tilde{u}^k,\ u^k + \tilde{u}^k)\|^2$$

$$\leqslant a\tau\|\tilde{u}_{\bar{t}}^k\|^2 + \frac{M_{13}\tau^3}{ah^3}\|\tilde{u}^k\|^2 + \frac{M_{13}\tau^3}{ah^5}\|\tilde{u}^k\|^4$$

$$+ \frac{4\beta^2 m^2\tau^3}{ah^3}\|\tilde{u}^k\|^2\|J(\tilde{u}^k,\ u^k + \tilde{u}^k)\|^2,$$

$$|m\beta\tau^2(\tilde{u}_{\bar{t}}^k,\ J(J(\tilde{u}^k,\ u^k + \tilde{u}^k), u^k + \bar{u}^k))| \leqslant a\tau\|\tilde{u}_{\bar{t}}^k\|^2$$

$$+ \frac{2\beta^2 m^2\tau^3}{ah^3}(M_{14} + \|\tilde{u}^k\|^2)\|J(\tilde{u}^k,\ u^k + \tilde{u}^k)\|^2.$$

把以上各估计式代入 (6.35) 和 (6.36)，再把两式相加，并令 $m = 2(7a + 1)$，从而得到

$$\|\tilde{u}^k\|_{\bar{t}}^2 + \tau(2\beta - 2\beta b - 7a - 1 - \frac{\varepsilon(\tau + \tau^3)}{h^2}$$

$$- \frac{M_{14}\tau^2}{ah^3}\left(1 + \frac{1}{a}\right) - \frac{M_{14}\tau^2}{ah^3}\|\tilde{u}^k\|^2$$

$$-\frac{M_{14}\tau^3}{h^5}\left(1+\frac{1}{a}\right)\|\tilde{u}^k\|^2-\frac{M_{14}\tau}{h^{1.5}}\|\tilde{u}^k\|\right)\|J(\tilde{u}^k, u^k+\tilde{u}^k)\|^2$$

$$\leqslant M_{15}\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(1+\frac{\tau}{h^2}+\frac{\tau^3}{h^4}\right)\|\tilde{u}^k\|^2$$

$$+M_{15}\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{\tau^3}{h^5}+\frac{\tau^4}{h^7}\right)\|\tilde{u}^k\|^4$$

$$+M_{15}\left(1+\frac{1}{a}\right)\|\tilde{f}^k\|^2.$$

现在令 h, ε 适当小,并假定

$$\tau h^{-2}\leqslant c_0,\ \beta>\frac{7a+1}{2(1-b)}, \tag{6.39}$$

则存在 $p_0>0$, 使得

$$\begin{aligned}(\|\tilde{u}^k\|^2)_t &+ \tau(p_0-M_{16}h-M_{16}h\|\tilde{u}^k\|^2\\&-M_{16}h^{0.5}\|\tilde{u}^k\|)\|J(\tilde{u}^k,u^k+\tilde{u}^k)\|^2\\&\leqslant M_{17}(\|\tilde{u}^k\|^2+h\|\tilde{u}^k\|^4+\|\tilde{f}^k\|^2).\end{aligned} \tag{6.40}$$

记

$$\tilde{\rho}(k\tau)=\|\tilde{u}^{(0)}\|^2+M_{17}\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}\|f^\xi\|^2,$$

则由 (6.40) 得到

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}^k\|^2\leqslant \tilde{\rho}(k\tau)+\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}&[M_{18}(\|\tilde{u}^\xi\|^2+h\|\tilde{u}^\xi\|^4)\\&+\tau(p_0-M_{19}h-M_{19}h\|\tilde{u}^\xi\|^2\\&-M_{19}h^{0.5}\|\tilde{u}^\xi\|)\|J(\tilde{u}^\xi,\ u^\xi+\tilde{u}^\xi)\|^2].\end{aligned}$$

最后应用了注记 4.10, 在其中令

$$E^k=\|\tilde{u}^k\|^2,\ N_1=N_2=1,$$

$$a_1=1,\ b_1=-1,\ d_1=-1.$$

定理 6.3 若条件 (6.39) 满足,并且

$$\tilde{\rho}(k\tau)e^{M_{20}T}\leqslant\frac{M_{21}}{h},$$

则对一切 $k\tau\leqslant T$,

$$\|\tilde{u}^k\|^2\leqslant M_{22}\tilde{\rho}(k\tau)e^{M_{20}k\tau}.$$

注记 6.1 格式 (6.33) 的广义稳定性指标 $s \leqslant -0.5$. 若 U 适当光滑,则计算是收敛的. 此格式也可用于间断解的计算,详见郭本瑜 (1981) 和 Guo Ben-yu (1984a).

6.4 Kreiss 的耗散方法

许多实际问题可归纳为线性对称双曲型方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = A(x)\dfrac{\partial U}{\partial x}, & -\infty < x < \infty,\ 0 < t \leqslant T, \\ U(x,\ 0) = U_0(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases} \tag{6.41}$$

其中 $A(x)$ 是 n 阶 Hermite 矩阵.

因为 (6.41) 是双曲型的,所以存在矩阵 $\widetilde{T}(x)$, 使得

$$\widetilde{T}A\widetilde{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix},$$

其中 $\mu_l = \mu_l(x)$ 是实数,并存在正常数 $c_{\widetilde{T}}$, 使得对一切 x,

$$\|\widetilde{T}\| \leqslant c_{\widetilde{T}},\ \|\widetilde{T}^{-1}\| \leqslant c_{\widetilde{T}}. \tag{6.42}$$

又由于 $A(x)$ 是 Hermite 阵, 因此还可把 $\widetilde{T}$ 取为酉阵, 此时 $c_{\widetilde{T}} = 1$.

为方便计,设 x 和 t 的步长都是 τ, 并考虑下列显式格式

$$u^{k+1} = C(\tau)u^k, \tag{6.43}$$

其中

$$C(\tau)u^k(x) = \sum_\sigma C^\sigma(x,\ \tau)u^k(x + \sigma\tau), \tag{6.44}$$

$C^\sigma(x,\ \tau)$ 也是 Hermite 矩阵. 又定义局部增长矩阵

$$G(\beta,\ \tau,\ x) = \sum_\sigma C^\sigma(x,\ \tau)e^{i\sigma\beta\tau}, \tag{6.45}$$

其特征值为 $\lambda_l = \lambda_l(\beta,\ \tau,\ x)$.

Kreiss (1964) 提出了耗散格式的概念. 具体地说,如果存在正数 τ_0, δ 和正整数 r, 使得对一切 x, $\tau \leqslant \tau_0$ 和 $|\beta\tau| \leqslant \pi$, 都有

$$|\lambda_l(\beta,\ \tau,\ x)| \leqslant 1 - \delta|\beta\tau|^{2r}, \tag{6.46}$$

则称(6.43)是 2γ 阶耗散的. 他证明了下列结果:

定理 6.4 如果下列条件满足:

(i) 矩阵 $A(x)$ 和 $C^\sigma(x, \tau)$ 都是一致有界的 Hermite 矩阵,而且 $A(x)$ 对 x 一致满足 Lipschitz 条件, $C^\sigma(x, \tau)$ 对 x 和 τ 一致满足 Lipschitz 条件;

(ii) 格式(6.43)是 2γ 阶耗散的;

(iii) 格式(6.43)对(6.41)的逼近误差至少是 $O(\tau^{2\gamma-1})$ 阶,

那么,格式(6.43)对初值是按 L^2 范数稳定的.

证明 采用 Parlett (1966) 方法来证明. 由条件 (i), 若用 $C^\sigma(x) = C^\sigma(x, 0)$ 来代替 $C^\sigma(x, \tau)$, 则其稳定性质不变. 因此,今后假定 C, G 和 λ_l 都不明显地依赖于τ.

首先证明, 对任意固定的 x_0, 都可找到矩阵 $\hat{H}(\beta, \tau, x_0)$, 使得 $\hat{H}(\beta, \tau, x_0)$ 对 $\beta\tau$ 具有周期 2π, 并存在正常数 $c_{\hat{H}}$, 使得

$$c_{\hat{H}}^{-1} I \leqslant \hat{H} \leqslant c_{\hat{H}} I, \tag{6.47}$$

$$G^* \hat{H} G \leqslant \left(1 - \frac{\delta}{2} |\beta\tau|^{2\gamma}\right) \hat{H}, \tag{6.48}$$

事实上,由条件 (iii) 得到

$$G(\beta, \tau, x_0) = e^{i\beta\tau A(x_0)} + Q(\beta, \tau, x_0),$$

其中,当 $|\beta\tau| \leqslant \pi$ 时,

$$\|Q(\beta, \tau, x_0)\| \leqslant c_1 |\beta\tau|^{2\gamma}.$$

因为(6.41)是双曲型方程组,所以存在矩阵 $\tilde{T}(\beta, \tau, x_0)$, 使得

$$\tilde{T} G \tilde{T}^{-1} = W + R, \tag{6.49}$$

其中W是对角阵 $e^{i\beta\tau \tilde{T} A \tilde{T}^{-1}}$, $\|R\| \leqslant c_2 |\beta\tau|^{2\gamma}$.

由 Schur 定理,存在酉阵 $\mathscr{U}(\beta, \tau, x_0)$, 使得

$$\begin{aligned} \tilde{G} = \mathscr{U} \tilde{T} G \tilde{T}^{-1} \mathscr{U}^* &= \mathscr{U} W \mathscr{U}^* + \mathscr{U} R \mathscr{U}^* \\ &= \Lambda + \mathscr{N}, \end{aligned} \tag{6.50}$$

其中 $\tilde{G}$ 是三角阵, Λ 是元素为 $\lambda_l(\beta, \tau, x_0)$ 的对角阵,

$$\mathscr{N} = \begin{Bmatrix} 0 & & * \\ \vdots & 0 & \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 \end{Bmatrix}.$$

因为 $\|R\| \leqslant c_2|\beta\tau|^{2r}$，所以 $\mathscr{U} R \mathscr{U}^*$ 的元素的绝对值不超过 $c_3|\beta\tau|^{2r}$。把 $\mathscr{U} W \mathscr{U}^*$ 的元素简记为 $b_{lj}(1 \leqslant l,\ j \leqslant n)$。由于 $\widetilde{G}$ 是上三角阵，故对一切 $l > j$，

$$|b_{lj}| \leqslant c_4|\beta\tau|^{2r}. \tag{6.51}$$

但 $\mathscr{U} W \mathscr{U}^*$ 又是规范阵，因此对一切 l，有

$$\sum_{j=1}^{n} |b_{lj}|^2 = \sum_{j=1}^{n} |b_{jl}|^2.$$

特别有

$$\sum_{j=2}^{n} |b_{1j}|^2 = \sum_{j=2}^{n} |b_{j1}|^2.$$

根据(6.51)，

$$\sum_{j=2}^{n} |b_{1j}|^2 \leqslant (n-1)c_4^2|\beta\tau|^{4r},$$

$$\sum_{j=3}^{n} |b_{2j}|^2 \leqslant (n-2)c_4^2|\beta\tau|^{4r} + |b_{12}|^2$$

$$\leqslant (2n-3)c_4^2|\beta\tau|^{4r}.$$

依此递推下去，即知当 $l < j$ 时，

$$|b_{lj}|^2 \leqslant c_4^2(1 + (n-2)2^{l-1})|\beta\tau|^{4r}.$$

所以 $\mathscr{U} W \mathscr{U}^*$ 的一切非对角线元素的绝对值都不超过 $c_5|\beta\tau|^{2r}$，并由此得到

$$\|\mathscr{N}\| \leqslant c_6|\beta\tau|^{2r}.$$

今引入矩阵 $\widetilde{G}_D = D^{\frac{1}{2}}\widetilde{G}D^{-\frac{1}{2}}$，$\mathscr{N}_D = D^{\frac{1}{2}}\mathscr{N}D^{-\frac{1}{2}}$，其中

$$D = \begin{pmatrix} d & & & 0 \\ & d^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d^n \end{pmatrix}, \quad d > 1,$$

则 $\widetilde{G}_D = \Lambda + D^{\frac{1}{2}}\mathscr{N}D^{-\frac{1}{2}} = \Lambda + \mathscr{N}_D$。由于 $\mathscr{N}_D$ 的第 (l, j) 个元素为 $d^{\frac{1}{2}(l-j)}\mathscr{N}_{lj}$，所以

$$\|\mathscr{N}_D\| \leqslant c_7 d^{-\frac{1}{2}}\|\mathscr{N}\| \leqslant c_6 c_7 d^{-\frac{1}{2}}|\beta\tau|^{2r},$$

因此当 d 适当大时，

$$\|\widetilde{G}_D^*\widetilde{G}_D\| \leqslant \|\Lambda^*\Lambda\| + 2\|\mathscr{N}_D\| + \|\mathscr{N}_D\|^2$$

$$\leqslant 1-\delta|\beta\tau|^{2r}+c_8 d^{-\frac{1}{2}}|\beta\tau|^{2r}\leqslant 1-\frac{\delta}{2}|\beta\tau|^{2r},$$

从而

$$\left(1-\frac{1}{2}\delta|\beta\tau|^{2r}\right)I-\widetilde{G}_D^*\widetilde{G}_D\geqslant 0,$$

或者写成

$$\left(1-\frac{1}{2}\delta|\beta\tau|^{2r}\right)D-\widetilde{G}^*D\widetilde{G}\geqslant 0.$$

记 $\hat{H}=\widetilde{T}^*\mathscr{U}^*D\mathscr{U}\widetilde{T}$，它是 Hermite 矩阵，且满足(6.48). 若取 $c_{\hat{H}}=d^n c_T^2$，则(6.47)也成立.

显然，这一步的证明并未用到 $A(x)$ 和 $C^\sigma(x_0)$ 的 Hermite 性质.

其次证明：可构造 $\hat{H}(\beta, \tau, x_0)$，使得它不仅满足(6.47)，(6.48)，而且具有下列形式

$$\hat{H}(\beta, \tau, x_0)=I+\hat{H}_{2r-1}(\beta, \tau, x_0), \tag{6.52}$$

其中，当 $|\beta\tau|\leqslant\pi$ 时，

$$|\hat{H}_{2r-1}|\leqslant c_9|\beta\tau|^{2r-1}.$$

事实上，由于 $A(x)$ 和 $C^\sigma(x)$ 是 Hermite 矩阵，所以不妨假定已用初等酉变换把 $A(x_0)$ 化为对角阵，其元素是 $\mu_i(x_0)$. 记 $\beta_0=\frac{\beta}{|\beta|}$，则有

$$G(\beta, \tau, x_0)=W(\beta, \tau, x_0)+|\beta\tau|^{2r}R(\beta_0, \tau, x_0)$$
$$+o(|\beta\tau|^{2r}), \tag{6.53}$$

其中 $W=e^{i\beta\tau A(x_0)}$，它是对角酉矩阵，$R(\beta_0, \tau, x_0)$ 是 Hermite 矩阵. 如果 $\mu_l=\mu_j$，那末这种变换具有一定的任意性. 但由于 $R(\beta_0, \tau, x_0)$ 是 Hermite 矩阵，所以可假定这一个变换已使相应的元素 $R_{lj}(\beta_0, \tau, x_0)=0$. 今定义

$$\hat{H}(\beta, \tau, x_0)=I+|\beta\tau|^{2r-1}\hat{H}'(\beta_0, \tau, x_0), \tag{6.54}$$

其中 $\hat{H}'$ 的元素是

$$H'_{lj}=\begin{cases}0, & \text{当 } \mu_l=\mu_j,\\ \dfrac{-2i\beta_0 R_{lj}}{\mu_l-\mu_j}, & \text{当 } \mu_l\neq\mu_j.\end{cases}$$

把上式代入 (6.53)，即得到

$$
\begin{aligned}
G^*\hat{H}G &= (W^* + |\beta\tau|^{2\gamma}R^* + o(|\beta\tau|^{2\gamma}))(I \\
&\quad + |\beta\tau|^{2\gamma-1}\hat{H}')(W + |\beta\tau|^{2\gamma}R + o(|\beta\tau|^{2\gamma})) \\
&= W^*W + |\beta\tau|^{2\gamma}R^*W + |\beta\tau|^{2\gamma-1}W^*\hat{H}'W \\
&\quad + |\beta\tau|^{2\gamma}W^*R + o(|\beta\tau|^{2\gamma}).
\end{aligned}
$$

将W按 $|\beta\tau|$ 的幂次展开后得到

$$
G^*\hat{H}G = \hat{H} + |\beta\tau|^{2\gamma}\mathscr{U} + o(|\beta\tau|^{2\gamma}), \tag{6.55}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\mathscr{U}(\beta_0, \tau, x_0) &= 2R(\beta_0, \tau, x_0) \\
&\quad + i\beta_0[\hat{H}'(\beta_0, \tau, x_0)A(x_0) \\
&\quad - A(x_0)\hat{H}'(\beta_0, \tau, x_0)].
\end{aligned}
$$

下面来考察$\mathscr{U}$的性质．首先由 $\hat{H}'$ 的构造方法，$\mathscr{U}$的非对角线元素为零．此外又有下列引理：

引理 6.3 若格式 (6.43) 的增长矩阵G具有形式 (6.53)，则当 $|\beta\tau| \to 0$ 时，

$$
R_{ll}(\beta_0, \tau, x_0) \leqslant -\delta + o(1). \tag{6.56}
$$

证明 根据 Gerschgorin 定理，如果一个矩阵的 s 个 Gerschgorin 圆与其它的 Gerschgorin 圆相分离，那末，在这 s 个圆的并集内一定包含了 s 个特征值．我们先假定 μ_l 是A的一个单重特征值，并用 $|\beta\tau|^{\frac{1}{2}}$ 乘G的第 l 行，用 $|\beta\tau|^{-\frac{1}{2}}$ 乘G的第 l 列，这是一个相似变换，故特征值 λ_l 保持不变．但当 $|\beta\tau| \to 0$ 时，第 l 个 Gerschgorin 圆的半径是 $O(|\beta\tau|^{2\gamma+\frac{1}{2}})$，而其它圆的半径是 $O(|\beta\tau|^{2\gamma-\frac{1}{2}})$．又由 (6.53)，第 l 个圆的中心是

$$
G_{ll} = e^{i\beta\tau\mu_l} + |\beta\tau|^{2\gamma}R_{ll}(\beta_0, \tau, x_0) + o(|\beta\tau|^{2\gamma}),
$$

并且当 $l \neq j$ 时，$\mu_l \neq \mu_j$．因为 $\gamma \geqslant 1$，故当 $|\beta\tau|$ 充分小时，第 l 个圆与其它的圆相分离，因此，在这个圆内存在一个特征值，并满足

$$
\begin{aligned}
&\lambda_l(\beta, \tau, x_0) \\
&\quad = e^{i\beta\tau\mu_l} + |\beta\tau|^{2\gamma}R_{ll}(\beta_0, \tau, x_0) + o(|\beta\tau|^{2\gamma}).
\end{aligned}
$$

根据 (6.46)，$|\lambda_l| \leqslant 1 - \delta|\beta\tau|^{2\gamma}$，所以

$$1-2\delta|\beta\tau|^{2r}\geqslant 1+2|\beta\tau|^{2r}R_{ll}(\beta_0,\ \tau,\ x_0)+o(|\beta\tau|^{2r}),$$

故当 $\beta\tau\to 0$ 时，

$$R_{ll}(\beta_0,\ \tau,\ x_0)\leqslant -\delta+o(1).$$

若 μ_l 不是 A 的单重特征值，则可用前面方法处理它所对应的行与列. 因为当 $l\neq j$, $\mu_l=\mu_j$ 时，$R_{lj}=0$，所以相应的 Gerschgorin 圆的半径仍然是 $O(|\beta\tau|^{2r+\frac{1}{2}})$，故至少有一个圆包含了一个特征值，并由此推得 (6.56). 另一方面，若对某些 l, $R_{ll}>-\delta+o(1)$，则当 $|\beta\tau|\to 0$ 时,这些圆与满足 $R_{ll}<-\delta+o(1)$ 的圆相分离,故在这些圆中又包含了特征值,但这会引起矛盾,从而证明了引理的结论.

根据(6.56)，当 $|\beta\tau|\to 0$ 时，

$$\mathscr{U}\leqslant -2\delta I+o(1).$$

由于 $\hat{H}'(\beta_0,\ \tau,\ x_0)$ 是有界的，故存在一个正数 ξ_0，使得当$0\leqslant|\beta\tau|\leqslant\xi_0$ 时，(6.47)，(6.48) 和 (6.52) 都成立. 当 $|\beta\tau|>\xi_0$ 时，可采用第一步中的方法来构造 $\hat{H}(\beta,\ \tau,\ x_0)$，并且使 (6.52) 成立.

第三步是对具有适当小支集的函数 u 来证明稳定性. 为方便计,不妨假定当 $|x|>\zeta>0$ 时,

$$u(x)\equiv 0. \tag{6.57}$$

把与 $C^\sigma(0)$ 相对应的差分算子记为 C_0，它所对应的增长矩阵是

$$G(\beta,\tau,\ 0)=\sum_\sigma C^\sigma(0)e^{i\sigma\beta\tau}.$$

根据前面的证明,存在矩阵 $\hat{H}=\hat{H}(\beta,\ \tau,\ 0)$，使得

$$\hat{H}=I+\hat{H}_{2r-1}(\beta,\ \tau,\ 0), \tag{6.58}$$

它满足 (6.47), (6.48), 并且

$$\|\hat{H}_{2r-1}\|\leqslant c_{10}|\beta\tau|^{2r-1}.$$

今定义算子 H,

$$Hu^k(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{H}(\beta,\ \tau,\ 0)\hat{u}^k(\beta)e^{i\beta x}d\beta, \tag{6.59}$$

其中 $\hat{u}(\beta)$ 是 u 的 Fourier 变换．相应地可定义 H_{2r-1}，又记

$$\|u^k\|_H = (u^k,\ Hu^k)^{\frac{1}{2}},$$

因为H是正定的，所以它可作为范数．经计算得到

$$\begin{aligned}\|Cu^k\|_H^2 &= (Cu^k,\ (I + H_{2r-1})Cu^k) = E + F \\ &= (E_0 + F_0) + (E - E_0) + (F - F_0),\end{aligned} \tag{6.60}$$

其中

$$E = \|Cu^k\|^2,\quad F = (Cu^k, H_{2r-1}Cu^k),$$

$$E_0 = \|C_0u^k\|^2,\ F_0 = (C_0u^k,\ H_{2r-1}C_0u^k),$$

下面来估计上式中各项的上界．首先有

$$\begin{aligned}E_0 + F_0 &= \|C_0u^k\|_H^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{u}^k)^* G^* \hat{H} G \hat{u}^k d\beta \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{u}^k)^* \left(1 - \frac{1}{2}\delta|\beta\tau|^{2r}\right) \hat{H}\hat{u}^k d\beta \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{u}^k)^* \left(1 - \frac{1}{2}\delta\left(2\sin\frac{\beta\tau}{2}\right)^{2r}\right) \hat{H}\hat{u}^k d\beta.\end{aligned} \tag{6.61}$$

由于

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[u^k(x+\tau) - u^k(x)\right] e^{-i\beta x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\beta\tau} - 1)u^k(x)e^{-i\beta x} dx \\ &= 2ie^{i\beta\tau/2}\sin\frac{\beta\tau}{2}\hat{u}^k(\beta,\ \tau),\end{aligned}$$

故得到

$$\|\partial_x u^k\|^2 = \|\bar{\partial}_x u^k\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(2\sin\frac{\beta\tau}{2}\right)^2 |\hat{u}^k|^2 d\beta.$$

一般地有

$$\|\partial_x^p u^k\|^2 = \|\bar{\partial}_x^p u^k\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(2\sin\frac{\beta\tau}{2}\right)^{2p} |\hat{u}^k|^2 d\beta, \tag{6.62}$$

并当 $p \geqslant q$ 时，

$$\|\partial_x^p u^k\| \leqslant 2^{p-q}\|\partial_x^q u^k\|. \tag{6.63}$$

把 (6.62) 和 (6.47) 代入 (6.61) 后得到

$$E_0 + F_0 \leqslant \|u^k\|_H^2 - \frac{1}{2}\delta c\beta^2\|\partial_x^\gamma u^k\|^2. \tag{6.64}$$

为了估计 (6.60) 中的其余两项，需要考虑 C 的更详细的表达式。由于 (6.43) 是 $2\gamma-1$ 阶的耗散格式，所以

$$C = \sum_{m=0}^{2\gamma-1}\frac{1}{m!}P_D^m + Q_D,$$

其中

$$P_D = A(x)D^{(2\gamma-1)},$$

而 $D^{(2\gamma-1)}$ 是算子 $\hat{\partial}_x$ 的多项式，

$$D^{(2\gamma-1)} = \sum_{m=0}^{\gamma-1}(-1)^m d_{2m+1}(\hat{\partial}_x)^{2m+1},$$

其中 d_{2m+1} 是实数，Q_D 则是由 A 和差分算子 ∂_x, $\bar{\partial}_x$ 所组成的乘积的和，并且至少是 2γ 阶的差分算子.

根据分部积分公式和 A 的 Hermite 性质，

$$(w, \hat{\partial}_x(Av)) = -(\hat{\partial}_x w, Av) = -(A\hat{\partial}_x w, v).$$

但 A 是 Lipschitz 连续的，因此

$$(w, \hat{\partial}_x(Av)) = (w, A\hat{\partial}_x v) + \varphi(w, v),$$

其中

$$|\varphi(w, v)| \leqslant c_{11}\tau\|w\|\|v\|.$$

反复应用上面的关系式，即得到

$$\left\|\left(\sum_{m=0}^{2\gamma-1}\frac{1}{m!}P_D^m\right)w\right\|^2 = \left(w, \sum_{l=0}^{2\gamma-1}\frac{1}{l!}(-P_D)^l\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{m=0}^{2\gamma-1}\frac{1}{m!}P_D^m\right)w\right) + \varphi(w, w)$$

$$= \|w\|^2 + (w, Rw) + \varphi(w, w),$$

其中 R 是至少为 2γ 阶的差分算子. 再次应用上面的技巧即得到

$$(w, Rw) = (\partial_x^\gamma w, S\partial_x^\gamma w) + \varphi(w, w),$$

这里 S 是有界的差分算子，其阶数比 R 小 2γ.

根据上面的分析，我们有

$$\|Cu^k\|^2 = \left\|\sum_{m=0}^{2r-1}\left(\frac{1}{m!}P_D^m\right)u^k\right\|^2$$

$$+ 2\mathrm{Re}\left(Q_Du^k, \left(\sum_{m=0}^{2r-1}P_D^m\right)u^k\right) + \|Q_Du^k\|^2$$

$$= \|u^k\|^2 + (\partial_x^r u^k, S'\partial_x^r u^k) + \varphi(u^k, u^k), \qquad (6.65)$$

其中 S' 也是有界的差分算子，与 S 相类似．我们有

$$\|C_0u^k\|^2 = \|u^k\|^2 + (\partial_x^r u^k, S_0'\partial_x^r u^k) + \varphi(u^k, u^k). \qquad (6.66)$$

从而

$$E - E_0 = \|Cu^k\|^2 - \|C_0u^k\|^2$$

$$= (\partial_x^r u^k, [S' - S_0']\partial_x^r u^k) + \varphi(u^k, u^k). \qquad (6.67)$$

显然，$E - E_0$ 主要由 $S' - S_0'$ 的性质来决定．但是当 τ 充分小时，对上面所讨论的函数，有

$$Cu^k = C_0u^k + g(x)[C - C_0]u^k,$$

其中 $g(x)$ 是一个光滑函数，当 $|x| < \frac{3}{2}\zeta$ 时，$g(x) \equiv 1$，而当 $|x| > 2\zeta$ 时，$g(x) \equiv 0$，故由 (6.67) 得到

$$|E - E_0| \leqslant M_1(\zeta)\|\partial_x^r u^k\|^2 + c_{12}\tau\|u^k\|^2, \qquad (6.68)$$

其中当 $\zeta \to 0$ 时，$M_1(\zeta) \to 0$．

最后来估计 $F - F_0$．我们有

$$|F - F_0| = |\mathrm{Re}([C + C_0]u^k, H_{2r-1}[C - C_0]u^k)|$$

$$\leqslant |([C + C_0]u^k, H_{2r-1}[C - C_0]u^k)|.$$

现在把 H_{2r-1} 分解为 $H_{2r-1} = H_1H_2$，其中 H_l 的 Fourier 变换是

$$\hat{H}_1 = \left(2\sin\frac{\beta\tau}{2}\right)^r I, \quad \hat{H}_2 = \hat{H}_1^{-1}\hat{H}_{2r-1},$$

于是由 (6.58) 得到

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^r |\beta\tau|^r I \leqslant \hat{H}_1 \leqslant |\beta\tau| I^r,$$

$$\|\hat{H}_2\| \leqslant c_{13}\left(\frac{\pi}{2}\right)^r |\beta\tau|^{r-1},$$

所以

$$|F-F_0| \leqslant \|H_1[C+C_0]u^k\|\|H_2[C-C_0]u^k\|$$
$$\leqslant (c_{14}\|\partial_x^\gamma u^k\| + c_{15}\tau\|u^k\|)\|\partial_x^{\gamma-1}[C-C_0]u^k\|. \quad (6.69)$$

又有

$$\|\partial_x^{\gamma-1}[C-C_0]u^k\| \leqslant \|[C-C_0]\partial_x^{\gamma-1}u^k\| + c_{16}\tau\|u^k\|,$$

因为 $C-C_0$ 至少是一阶差分算子，所以

$$\|\partial_x^{\gamma-1}[C-C_0]u^k\| \leqslant M_2(\zeta)\|\partial_x^\gamma u^k\| + c_{17}\tau\|u^k\|,$$

其中当 $\zeta \to 0$ 时，$M_2(\zeta) \to 0$.

把上式代入 (6.69)，结合 (6.68) 可知存在函数 $M(\zeta)$，使得

$$|E-E_0| + |F-F_0| \leqslant M(\zeta)\|\partial_x^\gamma u^k\|^2 + c_{18}\tau\|u^k\|^2,$$

其中当 $\zeta \to 0$ 时，$M(\zeta) \to 0$，从而可选择 ζ_0，使得当 $\zeta < \zeta_0$ 时，

$$M(\zeta)\|\partial_x^\gamma u^k\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\delta c_{\bar{H}}^{1}\|\partial_x^\gamma u^k\|^2.$$

把上式和 (6.64) 代入 (6.60)，并由 (6.47) 得到

$$\|u^{k+1}\|_H^2 \leqslant \|u^k\|_H^2 + c_{18}\tau\|u^k\|^2 \leqslant (1 + c_{18}c_H\tau)\|u^k\|_H^2. \quad (6.70)$$

最后证明，对一切 u^k，上式都成立. 为此需要应用 Gårding (1953) 的技巧，具体地说，选择满足下列条件的函数 $d_l(x)$，

(i) $\sum_{l=1} d_l^2(x) \equiv 1$;

(ii) 每个小区间 $\mathscr{I}_l$ 的长度不超过 ζ_0，而在 $\mathscr{I}_l$ 外，$d_l(x) \equiv 0$;

(iii) 对每个 x，最多只有 N 个 $d_l(x) \neq 0$，其中 N 与 x 无关.

于是在每个 $\mathscr{I}_l$ 内，可按前面的方法定义 H_l. 又记

$$\|u^k\|_H^2 = \sum_l \|d_l u^k\|_{H_l}^2 = \sum_l (d_l u^k, H_l d_l u^k),$$

则得

$$\|u^{k+1}\|_H^2 = \sum_l (d_l C u^k, H_l d_l C u^k).$$

但在每个点 x 上，仅仅 N 个 d_l 不等于零，所以当 $k\tau \leqslant T$ 时

$$\|u^{k+1}\|_H^2 \leqslant \sum_l (C d_l u^k, H_l C d_l u^k) + c_{19}\tau\|u^k\|^2$$

$$\leqslant (1 + c_{20}\tau) \sum_{l} \|d_l u^k\|_{H_l}^2 + c_{19}\tau \|u^k\|^2$$
$$\leqslant (1 + c_{21}\tau)\|u^k\|_H^2 \leqslant \cdots \leqslant c_{22}\|u^0\|_H^2,$$
这就完成了定理的证明.

注记 6.2　可以把本定理推广到多维空间中.

§7　守恒型方程组的初值问题

上节所讨论的差分方法，主要用来计算解的光滑部分. 但从拟线性双曲型方程组的理论来说，即使方程的系数，右端项和初始条件充分光滑，也只能保证存在局部的古典解. 例如考虑下列方程

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U)\frac{\partial U}{\partial x} = 0,$$

其特征线方程是

$$\frac{dx}{dt} = A(U).$$

如果 $\frac{\partial A}{\partial U} \neq 0$，则特征线斜率与 U 有关. 当两条特征线相交时，解一般发生间断，因此需要拓广解的定义.

本节讨论守恒型双曲型方程组的弱解及其计算方法，包括守恒型格式. 单调格式，Lax-Wendroff 型格式，Engquist-Osher 格式，混合开关方法和预估校正格式. 还叙述了基于 Riemann 间断分解的 Годунов 格式和 Glimm 格式，以及 Chorin 的随机选取法. 最后介绍了人工粘性法，人工压缩法，质点法，涡团法和其它方法.

7.1　守恒型方程组的弱解和激波

考虑下列守恒型方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} + \dfrac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, \ -\infty < x < \infty, \ t > 0, \\ U(x, 0) = U_0(x), \ -\infty < x < \infty, \end{cases} \tag{7.1}$$

其中U和F是n维向量，其分量是 U_i 和 F_i. $A(U)$ 表示F对U的 Jacobi 矩阵，并对一切 U, $A(U)$ 都有n个不同的实根.

如果在半平面 $t>0$ 的任何一个有界区域上，U和 $F(U)$ 可积，并且对于无限光滑的，当 $|x|+t$ 充分大时为零的试探函数 $\phi(x,t)$，都有

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} U + \frac{\partial\phi}{\partial x} F(U)\right) dx\,dt + \int_{-\infty}^\infty \phi(x,0) U_0(x)\,dx = 0, \qquad (7.2)$$

则称 $U(x,t)$ 是 (7.1) 的弱解.

若 $U(x,t)$ 是 (7.1) 的古典解，则由 (7.1) 得到

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \phi \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x}\right) dx\,dt = 0. \qquad (7.3)$$

根据 Green 公式，可由 (7.3) 推得 (7.2)，所以古典解一定是弱解. 反之，若弱解及其一阶偏导数连续，则可由 (7.2) 推出 (7.3)，从而 $U(x,t)$ 是古典解.

分片连续的弱解在间断线上满足一定条件. 假设γ是间断线上的一段，它的方程是 $x=\tilde{x}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. 作有界区域 $D=D^+\cup D^-$，使得间断线与D的相交部份恰为 γ，而在 D^+ 和 D^- 内解是光滑的（见图 7.1). 选取 ϕ，使得在D及其边界Γ之外，$\phi\equiv 0$，从而由 (7.2) 得到

$$\iint_{D^+} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} U + \frac{\partial\phi}{\partial x} F(U)\right) dx\,dt + \iint_{D^-} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} U + \frac{\partial\phi}{\partial x} F(U)\right) dx\,dt = 0. \qquad (7.4)$$

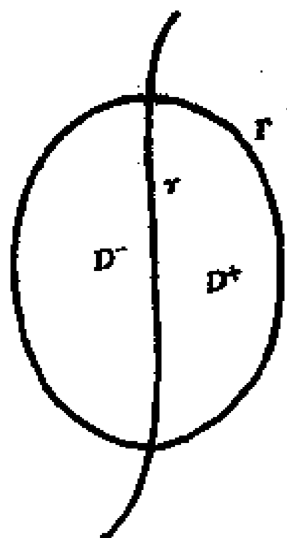


图 7.1

用 U^- 和 $F^-=F(U^-)$ 表示γ左侧的值，U^+ 和 $F^+=F(U^+)$ 表示γ右侧的值，$[F]$ 和 $[U]$ 分别表示跃度，即

$$[F]=F^+-F^-, \quad [U]=U^+-U^-,$$

则由 (7.4) 和 Green 公式得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\phi\left(F^+ - U^+\frac{d\tilde{x}}{dt}\right)dt = \int_{t_1}^{t_2}\phi\left(F^- - U^-\frac{d\tilde{x}}{dt}\right)dt.$$

由于被积函数是连续的，ϕ 是任意的，因此

$$[F] = [U]\frac{d\tilde{x}}{dt}. \tag{7.5}$$

上式被称为 Hugoniot 条件，$s = \dfrac{d\tilde{x}}{dt}$ 被称为间断传播速度.

由于对弱解的要求很弱，因而往往不唯一. 为了保证唯一性，通常还要附加一些条件，因为许多物理问题，都归结为问题 (7.1)，所以希望由此确定的解恰为物理上所需要的解，简称物理解. 这类条件可根据物理原理来推导，例如熵条件.

Олейник (1957) 考虑了 $n=1$ 的情况，此时熵条件是指对 U^-, U^+ 间的一切值 Z，都满足

$$s \leqslant \frac{F(Z) - F(U^-)}{Z - U^-},$$

或者其等价形式

$$\frac{F(Z) - F(U^+)}{Z - U^+} \leqslant s.$$

如果不等式对一切这样的 Z 都严格成立，那末就把这类间断称为激波，s 被称为激波传播速度，$-[U]$ 被称为激波强度. 若等号对一切这样的 Z 都成立，则称为接触间断.

当 $n > 1$ 时，把 $A(U)$ 的特征根依次排列为

$$\lambda_1(U) < \lambda_2(U) < \cdots < \lambda_n(U).$$

如果对某个 l，

$$\begin{aligned} &\lambda_{l-1}(U^-) < s < \lambda_l(U^-), \\ &\lambda_l(U^+) < s < \lambda_{l+1}(U^+), \end{aligned} \tag{7.6}$$

则称它是一个 l 类激波. 显然，共有 n 种激波. 上式表示第 l 类间断传播速度大于一侧第 l 特征线的前进速度，小于另一侧第 l 特征线的前进速度、如果

$$\lambda_l(U^+) = s = \lambda_l(U^-), \tag{7.7}$$

则称它是一个 l 类接触间断，此时间断传播速度恰为特征线的前进速度.

关于这方面的详细讨论可见 Lax (1957).

7.2 守恒型格式和单调格式

守恒型方程组的解满足守恒律. 事实上，若 $\int_{-\infty}^{\infty} U(x,t)dx$ 存在，则由 (7.1) 得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(x, t)dx = \int_{-\infty}^{\infty} U_0(x)dx.$$

根据这个性质，可以设计不同的差分格式.

在本节中设 $x_j = jh$, $t_k = k\tau$, $r = \frac{\tau}{h}$, $u_j^k = u(x_j, t_k)$, L_h 表示差分算子. 计算 (7.1) 的两层格式是

$$u_j^{k+1} = (L_h u^k)_j = G(u_{j+m}^k, u_{j+m-1}^k, \cdots, u_{j-m}^k), \qquad (7.8)$$

其中 G 是 n 维向量.

Lax-Wendroff (1960) 最早提出了守恒型格式，也即，如果

$$G(u_{j+m}, u_{j+m-1}, \cdots u_{j-m}) = u_j - r(g_{j+\frac{1}{2}} - g_{j-\frac{1}{2}}),$$

其中

$$g_{j+\frac{1}{2}} = g(u_{j+m}, \cdots, u_{j-m+1}),$$

则称 (7.8) 是守恒型差分格式.

把光滑解 $U(x, t)$ 代入 (7.8)，则由守恒格式的定义得到

$$\frac{U_j^{k+1} - U_j^k}{\tau} + \frac{g_{j+\frac{1}{2}}^k - g_{j-\frac{1}{2}}^k}{h} = \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_j^k + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_j^k + E_j^k.$$

若格式对 (7.1) 的逼近是相容的，则当 $h, \tau \to 0$ 时，$E_j^k \to 0$，从而上式趋向于 (7.1)，由此得到守恒型格式的必要条件

$$g(U, U, \cdots, U) = F(U) + c_0, \qquad (7.9)$$

其中 c_0 是任意常数

守恒型格式的解满足下列离散形式的守恒律

$$h\sum_{j=-\infty}^{\infty}u_j^k = h\sum_{j=-\infty}^{\infty}u_j^0.$$

现在把 u_j^k 线性插值为 $U_h(x, t)$. Lax, Wendroff(1960) 证明了下列结果:

定理 7.1 若 (7.8) 是守恒型格式,并当 $h, \tau\to 0$ 时,$U_h(x,t)$ 有界地几乎处处收敛到某个函数 $U(x, t)$, 那么它一定是 (7.1) 的弱解.

证明 我们有

$$\frac{1}{\tau}(u_j^{k+1}-u_j^k) = -\frac{1}{h}(g_{j+\frac{1}{2}}^k - g_{j-\frac{1}{2}}^k).$$

用 $h\tau\phi_j^k$ 乘上式, 并对一切 j, k 求和, 对所得式子的左端应用 Abel 公式,在右端中用 j 分别代替 $j+\frac{1}{2}$ 和 $j-\frac{1}{2}$, 则得到

$$\begin{aligned}
&h\tau\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{\phi_j^{k-1}-\phi_j^k}{\tau}u_j^k \\
&\quad - h\tau\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{\phi_{j+\frac{1}{2}}^k-\phi_{j-\frac{1}{2}}^k}{h}g_j^k \\
&\quad - h\sum_{j=-\infty}^{\infty}\phi_j^0u_j^0 = 0.
\end{aligned}\tag{7.10}$$

因为当 $h, \tau\to 0$ 时, $U_h(x, t)$ 有界地几乎处处收敛到 $U(x, t)$, 故由 (7.9) 得到

$$g_{i-\frac{1}{2}}\to g(U, U, U, \cdots, U) = F(U) + c_0,$$

用 $U_h(x_j, t_k)$ 代替 (7.10) 中的 u_j^k, 取极限即得所证的结论.

由于分片连续的弱解满足 Hugoniot 条件,所以守恒型格式能较好地描述间断传播的速度. 但是,守恒型格式未必是稳定的.

例 7.1 考虑下列 Hopf 方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{U^2}{2}\right)=0, & -\infty<x<\infty,\ 0<t\leqslant T, \\ U(x, 0) = U_0(x), & -\infty<x<\infty.\end{cases}$$

若取

$$g_{j+\frac{1}{2}}^k = \frac{1}{4}((u_{j+1}^k)^2 + (u_j^k)^2),$$

则得到下列守恒型格式

$$u_j^{k+1} = u_j^k - \frac{r}{4}((u_{j+1}^k)^2 - (u_{j-1}^k)^2). \tag{7.11}$$

假设 u_j^k 发生计算误差 $\tilde{u}_j^k$，则它满足

$$\tilde{u}_j^{k+1} = \tilde{u}_j^k - \frac{r}{4}((\tilde{u}_{j+1}^k)^2 + 2u_{j+1}^k\tilde{u}_{j+1}^k - (\tilde{u}_{j-1}^k)^2 - 2u_{j-1}^k\tilde{u}_{j-1}^k).$$

现在近似地分析稳定性，即在上式中假定 u_j^k 为常数 u，并略去关于 $\tilde{u}_j^k$ 的高阶小量，则得到

$$\tilde{u}_j^{k+1} = \tilde{u}_j^k - \frac{ru}{2}(\tilde{u}_{j+1}^k - \tilde{u}_{j-1}^k).$$

由分离变量法得到它的增长系数

$$G(\beta, \tau) = (1 - iru\sin\beta h).$$

所以，不论采用什么样的 r 值，都存在 β，使得

$$|G(\beta, \tau)| = \sqrt{1 + r^2u^2\sin^2\beta h} > 1,$$

因此计算是不稳定的.

另一类重要格式是单调格式. Годунов (1959) 最早讨论了一阶常系数双曲型方程

$$\frac{\partial U}{\partial t} + c\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

的单调格式. 他证明了差分格式

$$u_j^{k+1} = \sum_l a_{lj}u_l^k$$

为单调格式的充要条件是所有的 $a_{lj} \geqslant 0$. 他还证明这类格式是稳定的，并且只能是一阶的.

Harten, Hyman, Lax, Keyfitz (1976) 把 Годунов 的工作推广到单个守恒律 (即 $n = 1$) 的守恒型格式，也就是说，如果

$$G_l = \frac{\partial G(y_m, \cdots, y_{-m})}{\partial y_l} \geqslant 0, \quad -m \leqslant l \leqslant m,$$

则称这类格式是单调的.

如果格式是单调的，则当 $\{u_i^0\}$ 是单调序列时，$\{u_i^k\}$ 也保持了单调性.

单调守恒格式具有上述两种格式的双重优点. Harten, Hyman, Lax, Keyfitz (1976) 还得到了下列重要结果:

定理 7.2 如果 (7.8) 是单调守恒的，r 保持不变，并且当 h, $\tau \to 0$ 时，$U_h(x, t)$ 有界地几乎处处收敛到 $U(x, t)$，那末它一定是 (7.1) 的弱解，并且满足熵条件.

证明 首先，根据定理 7.1，$U(x, t)$ 是 (7.1) 的弱解.

其次，设 z 是任意实数，并定义

$$E(U) = \begin{cases} 0, & \text{当 } U < z, \\ U - z, & \text{当 } U \geqslant z, \end{cases}$$

$$H(U) = \begin{cases} 0, & \text{当 } U < z, \\ F(U) - F(z), & \text{当 } U \geqslant z. \end{cases}$$

若能证明

$$\frac{\partial E(U)}{\partial t} + \frac{\partial H(U)}{\partial x} \leqslant 0, \tag{7.12}$$

则可仿照 Hugoniot 条件的证明过程，综合上式，推出在间断线上成立

$$s(E(U^-) - E(U^+)) - (H(U^-) - H(U^+)) \leqslant 0,$$

但此式与 Олейник 的熵条件等价，因此把问题归结为证明 (7.12).

第三，我们将证明

$$\frac{E(u_j^{k+1}) - E(u_j^k)}{\tau} + \frac{1}{h}(g_H(u_{j+m}^k, \cdots, u_{j-m+1}^k) - g_H(u_{j+m-1}^k, \cdots u_{j-m}^k)) \leqslant 0. \tag{7.13}$$

其中

$$g_H(y_m, \cdots, y_{-m+1}) = \sum_{l=-m+1}^{m} \times \int_0^1 \dot{E}(y_l)(y_l - z) g_l(y_m(\theta), \cdots, y_{-m+1}(\theta)) d\theta,$$

$$y_l(\theta) = z + \theta(y_l - z), \quad -m + 1 \leqslant l \leqslant m,$$

$$\dot{E}(y) = \frac{dE(y)}{dy} = \begin{cases} 0, & 当\ y < z, \\ 1, & 当\ y \geqslant z, \end{cases}$$

$$g_l = \frac{\partial g(y_m, \cdots, y_{-m+1})}{\partial y_l}.$$

事实上,若令

$$u_{i+l}^k(\theta) = z + \theta(u_{i+l}^k - z), \quad -m \leqslant l \leqslant m,$$

$$v_i^k(\theta) = G(u_{i+m}^k(\theta), \cdots, u_{i-m}^k(\theta)),$$

则有

$$v_i^k(0) = G(z, \cdots, z) = z,$$

$$v_i^k(1) = G(u_{i+m}^k, \cdots, u_{i-m}^k) = u_i^{k+1},$$

因此

$$E(u_i^{k+1}) = E(u_i^{k+1}) - E(z) = \int_0^1 \frac{d}{d\theta} E(v_i^k(\theta)) d\theta$$

$$= \sum_{l=-m}^{m} \int_0^1 \dot{E}(v_i^k(\theta))(u_{i+l}^k - z) G_l(u_{i+m}^k(\theta), \cdots, u_{i-m}^k(\theta)) d\theta.$$

类似地可由 g_H 的定义得到

$$-E(u_i^k) + r[g_H(u_{i+m}^k, \cdots, u_{i-m+1}^k) - g_H(u_{i+m-1}^k, \cdots, u_{i-m}^k)]$$

$$= -\int_0^1 \dot{E}(u_i^k(\theta))(u_i^k - z) d\theta$$

$$+ r \sum_{l=-m}^{m} \int_0^1 \dot{E}(u_{i+l}^k(\theta))(u_{i+l}^k - z)[g_l(u_{i+m}^k(\theta), \cdots, u_{i-m+1}^k(\theta)) - g_{l+1}(u_{i+m-1}^k(\theta), \cdots, u_{i-m}^k(\theta))] d\theta$$

$$= -\sum_{l=-m}^{m} \int_0^1 \dot{E}(u_{i+l}^k(\theta))(u_{i+l}^k - z) G_l(u_{i+m}^k(\theta), \cdots, u_{i-m}^k(\theta)) d\theta.$$

综合以上两式即得到

$$E(u_i^{k+1}) - E(u_i^k) + r[g_H(u_{i+m}^k, \cdots, u_{i-m+1}^k) - g_H(u_{i+m-1}^k, \cdots, u_{i-m}^k)]$$

$$= \sum_{l=-m}^{m} \int_0^1 (\dot{E}(v_i^k(\theta)) - \dot{E}(u_{i+l}^k(\theta)))(u_{i+l}^k$$

$$- z)G_l(u_{i+m}^k(\theta), \cdots, u_{i-m}^k(\theta))d\theta. \tag{7.14}$$

若 $u_{i+l}^k - z < 0$，那末对一切 $0 \leqslant \theta \leqslant 1$，都有

$$\dot{E}(u_{i+l}^k(\theta)) \equiv 0, \quad \dot{E}(v_i^k(\theta)) \geqslant 0,$$

若 $u_{i+l}^k - z \geqslant 0$，则有

$$\dot{E}(u_{i+l}^k(\theta)) \equiv 1, \quad \dot{E}(v_i^k(\theta)) \leqslant 1,$$

所以恒有

$$(u_{i+l}^k - z)(\dot{E}(v_i^k(\theta)) - \dot{E}(u_{i+l}^k(\theta))) \leqslant 0.$$

由于 $G_l \geqslant 0$，所以 (7.14) 的右端非正，并由此推得 (7.13)。

最后，由于 g_H 是连续的，故由 (7.9) 得到

$$g_H(U, U, \cdots, U) = \dot{E}(U)\int_0^1 \sum_{l=-m+1}^{m}$$

$$\times (U - z)g_l(U(\theta), \cdots, U(\theta))d\theta$$

$$= \dot{E}(U)\int_0^1 \frac{d}{d\theta} g(U(\theta), U(\theta), \cdots, U(\theta))d\theta$$

$$= \dot{E}(U)(g(U, U, \cdots, U) - g(z, z, \cdots, z))$$

$$= \dot{E}(U)(F(U) - F(z)) = H(U).$$

到此，只要仿照定理 7.1 的证明过程，即可由 (7.13) 推出 (7.12)。

如果 $F(U)$ 是凸函数，$\bar{U}$ 是 $F'(U)$ 的唯一零点，那末可以证明，下列的 Engquist-Osher (1980) 格式是单调守恒的

$$u_i^{k+1} = u_i^k - r\partial_x F(\min(u_i^k, \bar{U})) - r\bar{\partial}_x \max(u_i^k, \bar{U})).$$

单调守恒格式的缺点是它仅有一阶逼近精度．为方便计，设 $m = 1$，并记

$$g_l = \frac{\partial g(y_2, y_1)}{\partial y_l}, \quad g_{l,q} = \frac{\partial^2 g(y_2, y_1)}{\partial y_l \partial y_q}, \quad 1 \leqslant l, \ q \leqslant 2,$$

把光滑解 $U(x, t)$ 代入 (7.8)，由守恒格式的定义得到

$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} + \frac{1}{h}(g(U_{i+1}^k, U_i^k) - g(U_i^k, U_{i-1}^k))$$

$$= \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_i^k + \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)_i^k$$

$$+ \frac{1}{h} g_1(U_i^k, U_i^k)(U_i^k - U_{i-1}^k)$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{h}\, g_2(U_i^k,\, U_i^k)(U_{i+1}^k - U_i^k) \\
&-\frac{1}{2h}\, g_{11}(U_i^k,\, U_i^k)(U_i^k - U_{i-1}^k)^2 \\
&+\frac{1}{2h}\, g_{22}(U_i^k,\, U_i^k)(U_{i+1}^k - U_i^k)^2 \\
&+\frac{1}{h}\, O((U_{i+1}^k - U_i^k)^3 + (U_i^k - U_{i-1}^k)^3) + O(h^2)
\end{aligned}
\tag{7.15}
$$

把上式右端的第三、四项中的 U_{i+1}^k 和 U_{i-1}^k 展开，因为由 (7.9) 得到

$$
g_1(U,\, U) + g_2(U,\, U) = \frac{\partial F}{\partial U} = A(U),
$$

所以略去指标 i, k 后，(7.15) 的右端恰是

$$
\frac{\partial U}{\partial t} + A\,\frac{\partial U}{\partial x} + E + O(h^2),
$$

其中

$$
\begin{aligned}
E = \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) &+ \frac{h}{2}(g_2(U,U) - g_1(U,U))\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\
&+ \frac{h}{2}\,(g_{22}(U,\, U) - g_{11}(U,\, U))\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2
\end{aligned}
$$

由于

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(A\,\frac{\partial U}{\partial t}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(A^2\,\frac{\partial U}{\partial x}\right), \\
g_1(U,\, U)\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(g_1(U,\, U)\,\frac{\partial U}{\partial x}\right) \\
&\quad - (g_{11}(U,\, U) + g_{12}(U,\, U))\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2, \\
g_2(U,\, U)\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(g_1(U,\, U)\,\frac{\partial U}{\partial x}\right)
\end{aligned}
$$

$$-(g_{11}(U,U)+g_{22}(U,U))\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2,$$

所以

$$E=\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(B(U)\frac{\partial U}{\partial x}\right),$$

$$B(U)=g_2(U,U)-g_1(U,U)+rA^2(U),$$

其中，由格式的单调性，$g_1(U,U)\geqslant 0$，$g_2(U,U)\leqslant 0$。又因为

$$\sum_{l=-1}^{1}G_l=1,\quad \sum_{l=-1}^{1}lG_l=-rA,$$

$$\sum_{l=-1}^{1}l^2G_l=rg_1-rg_2,$$

所以

$$r^2A^2\leqslant\sum_{l=-1}^{1}l^2G_l\sum_{l=-1}^{1}G_l$$

$$=\sum_{l=-1}^{1}l^2G_l=rg_1-rg_2,$$

故有

$$g_2-g_1+rA^2\leqslant 0,$$

所以格式的逼近精度是 $O(h)$。

注记 7.1 许多流体力学方程组都归结为方程组 (7.1)。守恒型格式保证了动量和质量守恒。若对其中的某些方程采用二次守恒格式，则可达到总能量守恒。Попов, Самарский (1969, 1970), Белан, Маштылев, Шушляпин (1974) 和 Кузьмин, Макаров, Меладзе (1980) 等人则构造了一些完全守恒格式，它使得有关的各个物理量都满足相应的离散的守恒性质。

7.3 正型差分格式，弱解的存在性

本节介绍 Олейник (1957) 提出的证明弱解存在性的方法。设 $n=1$，即考虑下列方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}+\dfrac{\partial F(U)}{\partial x}=0, & -\infty<x<\infty,\ 0<t\leqslant T,\\ U(x,0)=U_0(x), & -\infty<x<\infty,\end{cases}\tag{7.16}$$

其中 $F'(U)$ 连续，$U_0\in BV$，即是有界变差函数，并记

$$\mathscr{I}=[\inf_x U_0(x),\ \sup_x U_0(x)],$$

$$\bar{F}=\sup_{U\in\mathscr{I}}|F'(U)|.$$

计算 (7.16) 的一类格式如下(见符鸿源 (1981))

$$\begin{cases}u_j^{k+1}=\sum\limits_{l=-m}^{m}a_l u_{j+l}^k-r\Big[\sum\limits_{l=-m}^{m}b_l F(u_{j+l}^k)\\ \qquad +g(u_{j+m}^k,\cdots,u_{k-m+1}^j)-g(u_{j+m-1}^k,\cdots,u_{j-m}^k)\Big],\\ u_j^0=U_0(x_j),\end{cases}\tag{7.17}$$

其中 a_l,b_l 是常数，当 $y_l\in\mathscr{I}$ 时，$g(Y)=g(y_m,\cdots,y_{-m+1})$ 是连续可微函数．记

$$g_l=\frac{\partial g}{\partial y_l},\quad -m+1\leqslant l\leqslant m,$$

$$z_{j+\frac{1}{2}}^k=(u_{j+m}^k,\cdots,u_{j-m+1}^k)^*,$$

则由中值定理得到

$$g(z_{j+\frac{1}{2}}^k)-g(z_{j-\frac{1}{2}}^k)=\sum_{l=-m+1}^{m}g_{l[j+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}]}^k(u_{j+l}^k-u_{j+l-1}^k),\tag{7.18}$$

其中 $g_{l[j+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}]}^k$ 表示 g_l 取 $z_{j+\frac{1}{2}}^k$ 和 $z_{j-\frac{1}{2}}^k$ 之间的值．

如果 (7.18) 对 (7.17) 的逼近是相容的，则将光滑解 $U(x,t)$ 代入 (7.17) 后得到

$$U_j^k+\tau\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_j^k=\sum_{l=-m}^{m}a_l U_j^k+\sum_{l=-m}^{m}lha_l\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_j^k$$

$$-\Big[r\sum_{l=-m}^{m}b_l F(U_j^k)+rh\sum_{l=-m}^{m}lb_l F'(U_j^k)$$

$$\times\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_j^k\Big]-rh\sum_{l=-m+1}^{m}g_l(U_j^k,\cdots,U_j^k)$$

$$\times \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_i^k + o(h), \tag{7.19}$$

令 $h \to 0$，就得到

$$U_i^k = \sum_{l=-m}^{m} a_l U_i^k - r \sum_{l=-m}^{m} b_l F(U_i^k),$$

因此

$$\sum_{l=-m}^{m} a_l = 1, \quad \sum_{l=-m}^{m} b_l = 0. \tag{7.20}$$

由上式和 (7.19) 可得

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_i^k = \frac{1}{r} \sum_{l=-m}^{m} l a_l \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_i^k$$

$$- \sum_{l=-m}^{m} l b_l F'(U_i^k) \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_i^k$$

$$- \sum_{l=-m+1}^{m} g_l(U_i^k, \cdots, U_i^k) \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_i^k + o(1),$$

令 $h \to 0$，则得

$$\begin{cases} \sum_{l=-m}^{m} l a_l = 0, \\ \sum_{l=-m}^{m} l b_l = 1, \\ \sum_{l=-m+1}^{m} g_l(U, U, \cdots, U) = 0. \end{cases} \tag{7.21}$$

假定格式 (7.17) 满足下列条件：

(i) 正型性，即存在正常数 γ_0，使得

$$\begin{cases} a_l - r\bar{g}_l + r\underline{g}_{l+1} \geqslant \gamma_0 |b_l|, \quad -m+1 \leqslant l \leqslant m-1, \\ a_m - r\bar{g}_m \geqslant \gamma_0 |b_m|, \\ a_{-m} - r\underline{g}_{-m+1} \geqslant \gamma_0 |b_{-m}|, \end{cases} \tag{7.22}$$

其中

$$\bar{g}_l = \sup_{Y \in \mathscr{J}^{2m}} g_l(Y), \quad \underline{g}_l = \inf_{Y \in \mathscr{J}^{2m}} g_l(Y),$$

$$\mathscr{I}^{2m}=\{Y\mid y_l\in\mathscr{I},\ -m+1\leqslant l\leqslant m\};$$

(ii) 存在正常数 c_0，使得当 $Y\in\mathscr{I}^{2m}$ 时，

$$|g(Y)|\leqslant c_0\sum_{l=-m+2}^{m}|y_l-y_{l-1}|. \tag{7.23}$$

引入

$$\begin{cases}c_l=a_l-rg_l+rg_{l+1}, & -m+1\leqslant l\leqslant m-1,\\ c_m=a_m-rg_m,\\ c_{-m}=a_{-m}+rg_{-m+1},\end{cases} \tag{7.24}$$

则由 (7.22)，当 $Y\in\mathscr{I}^{2m}$ 时，$c_l\geqslant 0$. 又由 (7.20)，

$$\sum_{l=-m}^{m}c_l=1.$$

根据 (7.21)，必存在一个 l_0，使得 $b_{l_0}\neq 0$，从而由 (7.22) 得到

$$a_{l_0}-rg_{l_0}+rg_{l_0+1}\geqslant\gamma_0|b_{l_0}|>0, \tag{7.25}$$

也就是说，至少存在一个 c_{l_0}，使得

$$c_{l_0}=\inf_{Y\in\mathscr{I}^{2m}}c_{l_0}(Y)>0.$$

下面来证明弱解的存在性.

引理 7.1 若当 $x\in[a,b]$ 时，$A_l(x)\geqslant 0$，则有

$$\sum_{l=1}^{L}A_l(x)\inf_{x\in[a,b]}B_l(x)\leqslant\sum_{l=1}^{L}A_l(x)B_l(x)$$

$$\leqslant\sum_{l=1}^{L}A_l(x)\sup_{x\in[a,b]}B_l(x).$$

命题 7.1 如果

$$r\bar{F}'<\gamma_0,\quad r\sum_{\substack{-m\leqslant l\leqslant m\\ l\neq l_0}}|b_l|\bar{F}'<c_{l_0}, \tag{7.26}$$

那末对一切 j, k，都有 $u_j^k\in\mathscr{I}$.

证明 由中值定理得到

$$F_{j+l}^k=F_{j+l_0}^k+\tilde{F}'^k_{j+l,j+l_0}(u_{j+l}^k-u_{j+l_0}^k), \tag{7.27}$$

其中

$$F_{j+l}^k=F(u_{j+l}^k),\ \tilde{F}'^k_{j+l,j+l_0}=F'(\theta u_{j+l}^k+(1-\theta)u_{j+l_0}^k),$$
$$0\leqslant\theta\leqslant 1,$$

把上式和 (7.18) 代入 (7.17)，并注意到 (7.20)，(7.24) 后得到

$$
\begin{aligned}
u_i^{k+1} = & \sum_{\substack{-m\leqslant l\leqslant m\\ l\neq l_0}} \left(c_{l[j+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}]}^{k} - r b_l \widetilde{F}'^{k}_{j+l,j+l_0}\right) u_{j+l}^{k} \\
& + \left(c_{l_0[j+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}]}^{k} + r \sum_{\substack{-m\leqslant l\leqslant m\\ l\neq l_0}} b_l \widetilde{F}'^{k}_{j+l,j+l_0}\right) u_{j+l_0}^{k},
\end{aligned}
\tag{7.28}
$$

其中 $c_{l[j+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}]}^{k}$ 表示 c_l 取 $z_{j+\frac{1}{2}}^{k}$ 和 $z_{j-\frac{1}{2}}^{k}$ 之间的值.

由 (7.26) 得到

$$
r\left|\widetilde{F}'^{k}_{j+l,j+l_0}\right| < \gamma_0, \quad r \sum_{\substack{-m\leqslant l\leqslant m\\ l\neq l_0}} |b_l|\left|\widetilde{F}'^{k}_{j+l,j+l_0}\right| < c_{l_0}, \tag{7.29}
$$

所以，(7.28) 右端各项的系数为正，从而由引理 7.1 得到

$$
\begin{aligned}
u_j^{k+1} \leqslant & \sum_{\substack{-m\leqslant l\leqslant m\\ l\neq l_0}} \left(c_{l[j+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}]}^{k} - r b_l \widetilde{F}'^{k}_{j+l,j+l_0}\right) \sup u_j^{k} \\
& + \left(c_{l_0[j+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}]}^{k} + r \sum_{\substack{-m\leqslant l\leqslant m\\ l\neq l_1}} b_l \widetilde{F}'^{k}_{j+l,j+l_0}\right) \sup u_j^{k},
\end{aligned}
$$

由于 $\sum_l c_l = 1$，所以 $u_j^{k+1} \leqslant \sup_j u_j^k$. 同理可证 $\inf_j u_j^k \leqslant u_j^{k+1}$。由于 $u_j^0 \in \mathscr{I}$，所以对一切 j，k，都有 $u_j^k \in \mathscr{I}$.

命题 7.2 若条件 (7.26) 成立，则

$$
\sum_{j=-\infty}^{\infty} |u_j^k - u_{j-1}^k| \leqslant \operatorname{Var} U_0(x).
$$

证明 由 (7.17)，(7.18) 和中值定理得

$$
\begin{aligned}
u_j^{k+1} - u_{j-1}^{k+1} = & \sum_{l=-m}^{m} a_l (u_{j+l}^k - u_{j+l-1}^k) \\
& - r \sum_{l=-m}^{m} b_l \widetilde{F}'^{k}_{j+l,j+l-1} (u_{j+l}^k - u_{j+l-1}^k) \\
& - r \sum_{l=-m+1}^{m} g_{l[j+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}]}^{k} (u_{j+l}^k - u_{j+l-1}^k) \\
& + r \sum_{l=-m+1}^{m} g_{l[j+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}]}^{k} (u_{j+l-1}^k - u_{j+l-2}^k).
\end{aligned}
$$

记

$$\begin{cases} c^k_{l,j-\frac{1}{2}} = a_l - rg^k_{l[j+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}]} + rg^k_{l+1[j-\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}]}, \\ \qquad -m+1 \leqslant l \leqslant m-1, \\ c^k_{m,j-\frac{1}{2}} = a_m - rg^k_{m[j+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}]}, \\ c^k_{-m,j-\frac{1}{2}} = a_{-m} + rg^k_{-m+1[j-\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}]} \end{cases}$$

则可把上式改写为

$$u_j^{k+1} - u_{j-1}^{k+1} = \sum_{l=-m}^{m} (c^k_{l,j-\frac{1}{2}} - rb_l \bar{F}'^k_{j+l,j+l-1})(u^k_{j+l} - u^k_{j+l-1}).$$

条件 (7.22) 保证上式右端的系数为正，因此对一切正整数 J 都有

$$\sum_{j=-J}^{J} |u_j^{k+1} - u_{j-1}^{k+1}| \leqslant \sum_{j=-J}^{J} \sum_{l=-m}^{m} c^k_{l,j-\frac{1}{2}} |u^k_{j+l} - u^k_{j+l-1}|$$

$$- \sum_{j=-J}^{J} \sum_{l=-m}^{m} rb_l \bar{F}'^k_{j+l,j+l-1} |u^k_{j+l} - u^k_{j+l-1}|. \qquad (7.30)$$

今假定

$$\sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} |u^k_\sigma - u^k_{\sigma-1}| < \infty,$$

并在上式中令 $J \to \infty$. 下面来计算右端的极限.

首先，上式右端的第二项等于

$$-r \sum_{l=-m}^{m} \sum_{\sigma=-J+l}^{J+l} b_l \bar{F}'^k_{\sigma,\sigma-1} |u^k_\sigma - u^k_{\sigma-1}|. \qquad (7.31)$$

由 $F'(U)$ 的连续性和命题 7.1，$|\bar{F}'^k_{\sigma,\sigma-1}|$ 是有界的，所以

$$\sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} \bar{F}'^k_{\sigma,\sigma-1} |u^\sigma_k - u^k_{\sigma-1}| < \infty;$$

因此当 $J \to \infty$ 时，(7.31) 趋向于

$$-r \sum_{l=-m}^{m} \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} b_l \bar{F}'^k_{\sigma,\sigma-1} |u^k_\sigma - u^k_{\sigma-1}|$$

$$= -r \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} \bar{F}'^k_{\sigma,\sigma-1} \left(\sum_{l=-m}^{m} b_l |u^k_\sigma - u^k_{\sigma-1}| \right) = 0.$$

又将 $c^k_{l,j-\frac{1}{2}}$ 的表达式代入 (7.30) 右端的第一项后得到

$$\sum_{j=-J}^{J} \sum_{l=-m}^{m} c^k_{l,j-\frac{1}{2}} |u^k_{j+1} - u^k_{j+l-1}| = \sum_{\sigma=1}^{9} A_\sigma, \qquad (7.32)$$

其中

$$A_1=\sum_{j=-J}^{J}\sum_{l=-m}^{m}a_l|u_{j+l}^k-u_{j+l-1}^k|,$$

$$A_2=-\sum_{j=-J}^{J}rg_{m[j+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}]}^k|u_{j+m}^k-u_{j+m-1}^k|,$$

$$A_3=-\sum_{j=-J}^{J}rg_{m-1[j+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}]}^k|u_{j+m-1}^k-u_{j+m-2}^k|,$$

$$A_4=\sum_{j=-J}^{J}rg_{m[j-\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}]}^k|u_{j+m-1}^k-u_{j+m-2}^k|,$$

$$A_5=-\sum_{j=-J}^{J}\sum_{l=-m+2}^{m-2}rg_{l[j+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}]}^k|u_{j+l}^k-u_{j+l-1}^k|,$$

$$A_6=\sum_{j=-J}^{J}\sum_{l=-m+2}^{m-2}rg_{l+1[j-\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}]}^k|u_{j+l}^k-u_{j+l-1}^k|,$$

$$A_7=\sum_{j=-J}^{J}rg_{-m+1[j-\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}]}^k|u_{j-m}^k-u_{j-m-1}^k|,$$

$$A_8=-\sum_{j=-J}^{J}rg_{-m+1[j+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}]}^k|u_{j-m+1}^k-u_{j-m}^k|,$$

$$A_9=\sum_{j=-J}^{J}rg_{-m+2[j-\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}]}^k|u_{j-m+1}^k-u_{j-m}^k|.$$

显然有

$$A_1=\sum_{l=-m}^{m}\sum_{\sigma=-J+l}^{J+l}a_l|u_\sigma^k-u_{\sigma-1}^k|,$$

所以当 $J\to\infty$ 时，由 (7.20) 得到

$$\begin{aligned}A_1\to&\sum_{l=-m}^{m}a_l\sum_{\sigma=-\infty}^{\infty}|u_\sigma^k-u_{\sigma-1}^k|\\=&\sum_{j=-\infty}^{\infty}|u_j^k-u_{j-1}^k|.\end{aligned}$$

可以验证

$$A_3+A_5=-\sum_{l=-m+2}^{m-1}\sum_{j=-J}^{J}rg_{l[j+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}]}^k|u_{j+l}^k-u_{j+l-1}^k|.$$

又因为

$$A_6 = \sum_{j=-J}^{J} \sum_{l=-m+3}^{m-1} r g^k_{l[j-\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}]} |u^k_{j+l-1} - u^k_{j+l-2}|$$

$$= \sum_{j=-J-1}^{J-1} \sum_{l=-m+3}^{m-1} r g^k_{l[j+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}]} |u^k_{j+l} - u^k_{j+l-1}|,$$

$$A_9 = \sum_{j=-J-1}^{J-1} r g^k_{-m+2[j+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}]} |u^k_{j-m+2} - u^k_{j-m+1}|,$$

所以

$$A_6 + A_9 = \sum_{l=-m+2}^{m-1} \sum_{j=-J-1}^{J-1} r g^k_{l[j+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}]} |u^k_{j+l} - u^k_{j+l-1}|.$$

从而

$$A_3 + A_5 + A_6 + A_9 = -\sum_{l=-m+2}^{m-1} r g^k_{l[J+\frac{1}{2},J-\frac{1}{2}]} |u^k_{J+l} - u^k_{J+l-1}|$$

$$+ \sum_{l=-m+2}^{m-1} r g^k_{l[-J-\frac{1}{2},-J-\frac{3}{2}]} |u^k_{-J+l-1} - u^k_{-J+l-2}|.$$

由于

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |u^k_j - u^k_{j-1}| < \infty,$$

所以 $|u^k_{\pm J} - u^k_{\pm J-1}| \to 0$，因此当 $J \to \infty$ 时，$A_3 + A_5 + A_6 + A_9 \to 0$。又有

$$A_4 = \sum_{j=-J-1}^{J-1} r g^k_{m[j+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}]} |u^k_{j+m} - u^k_{j+m-1}|,$$

所以

$$A_2 + A_4 = -r g^k_{m[J+\frac{1}{2},J-\frac{1}{2}]} |u^k_{J+m} - u^k_{J+m-1}|$$

$$+ r g^k_{m[-J-\frac{1}{2},-J-\frac{3}{2}]} |u^k_{-J+m-1} - u^k_{-J+m-2}|,$$

显然，当 $J \to \infty$ 时，上式也趋向零．类似地，当 $J \to \infty$ 时，

$$A_7 + A_8 = -r g^k_{-m+1[J+\frac{1}{2},J-\frac{1}{2}]} |u^k_{J-m+1} - u^k_{J-m}|$$

$$+ r g^k_{-m+1[-J-\frac{1}{2},-J-\frac{3}{2}]} |u^k_{-J-m} - u^k_{-J-m-1}| \to 0.$$

所以

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |u^{k+1}_j - u^{k+1}_{j-1}|$$

$$\leqslant \sum_{j=-\infty}^{\infty} |u_j^k - u_{j-1}^k| \leqslant \cdots \leqslant \mathrm{Var}U_0.$$

命题 7.3 若条件 (7.26) 成立，则

$$u_j^{k+s} = \sum_{\sigma=-ms}^{ms} \alpha_{j,\sigma}^k u_{j+\sigma}^k, \quad s \geqslant 1,$$

其中系数 $\alpha_{j,\sigma}^k \geqslant 0$, $\sum\limits_{\sigma=-ms}^{ms} \alpha_{j,\sigma}^k = 1$.

证明 用数学归纳法来证明. 根据 (7.28)，当 $s=1$ 时有

$$\begin{cases} \alpha_{j,\sigma}^k = c_\sigma^k - rb_\sigma \tilde{F}_{j+\sigma,j+l_0}^{\prime k}, \quad -m \leqslant \sigma \leqslant m, \ \sigma \neq l_0, \\ \alpha_{j,l_0}^k = c_{l_0}^k + r \sum\limits_{\substack{-m\leqslant l\leqslant m \\ l\neq l_0}} b_l \tilde{F}_{j+l,j+l_0}^{\prime k}. \end{cases}$$

由 (7.22) 和 (7.29) 可知 $\alpha_{j,\sigma}^k \geqslant 0$. 又由于

$$\sum_{l=-m}^{m} c_l = 1,$$

所以

$$\sum_{\sigma=-m}^{m} \alpha_{j,\sigma}^k = 1,$$

因此命题对 $s=1$ 成立.

假设命题对 s 成立，则有

$$u_j^{k+s+1} = \sum_{\sigma=-ms}^{ms} \alpha_{j,\sigma}^{k+1} u_{j+\sigma}^{k+1},$$

其中

$$\sum_{\sigma=-ms}^{ms} \alpha_{j,\sigma}^{k+1} = 1, \alpha_{j,\sigma}^{k+1} \geqslant 0.$$

把 (7.28) 代入上式后得到

$$u_j^{k+s+1} = \sum_{\sigma=-ms}^{ms} \alpha_{j,\sigma}^{k+1}$$

$$\times \Bigg[\sum_{\substack{-m\leqslant l\leqslant m \\ l\neq l_0}} (c_l^k - rb_l \tilde{F}_{j+\sigma+l,j+\sigma+l_0}^{\prime k}) u_{j+\sigma+l}^k$$

$$+\left(c_{l_0}^k + r\sum_{\substack{-m\leqslant l\leqslant m\\ l\neq l_0}} rb_l\widetilde{F}'^k_{j+\sigma+l,j+\sigma+l_0}\right)u^k_{j+\sigma+l_0}\Bigg], \tag{7.33}$$

合并同类项后得到

$$u_j^{k+s+1} = \sum_{\sigma=-m(s+1)}^{m(s+1)} \alpha_{j,\sigma}^k u_{j+\sigma}^k.$$

可直接看出 $\alpha_{j,\sigma}^k \geqslant 0$. 又令 $u_{j+\sigma}^k = 1$, 则由 (7.33) 得到

$$\sum_{\sigma=-m(s+1)}^{m(s+1)} \alpha_{j,\sigma}^k = \sum_{\sigma=-ms}^{ms} \alpha_{j,\sigma}^{k+1}$$

$$\times\Bigg[\sum_{\substack{-m\leqslant l\leqslant m\\ l\neq l_0}}(c_l^k - rb_l\widetilde{F}'^k_{j+\sigma+l,j+\sigma+l_0})$$

$$+\left(c_{l_0}^k + r\sum_{\substack{-m\leqslant l\leqslant m\\ l\neq l_0}} b_l\widetilde{F}'^k_{j+\sigma+l,j+\sigma+l_0}\right)\Bigg].$$

由

$$\sum_{\sigma=-ms}^{ms} \alpha_{j,\sigma}^{k+1} = 1$$

和

$$\sum_{l=-m}^{m} c_l^k = 1,$$

得出

$$\sum_{\sigma=-m(s+1)}^{m(s+1)} \alpha_{j,\sigma}^k = 1.$$

现在把 u_j^k 插值为阶梯函数 $U_h(x, t)$, 则对一切h, $U_h(x, t)\in\mathscr{I}$, 且 $U_h(x, t)\in BV$.

命题 7.4 若条件 (7.26) 满足,则对一切正数 t 和 t', 都有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|U_h(x, t') - U_h(x, t)|dx$$

$$\leqslant\left(\frac{2m}{r}|t' - t| + 4mh\right)\mathrm{Var}U_h(x, 0).$$

证明 不妨设 $t' > t$. 总可找到 k, s, 使得

$$U_h(x, t') - U_h(x, t) = U_h(x, t_{k+s}) - U_h(x, t_k).$$

由命题 7.3，

$$U_h(x_j, t') - U_h(x_j, t) = \sum_{\sigma=-ms}^{ms} \alpha_{j,\sigma}^k (u_{j+\sigma}^k - u_j^k),$$

从而

$$|U_h(x_j, t') - U_h(x_j, t)| \leqslant \sup_{-ms \leqslant \sigma \leqslant ms} |u_{j+\sigma}^k - u_j^k|$$

$$\leqslant \operatorname{Var} U_h(x, t_k)|_{[x_{j-ms-1}, x_{j+ms+1}]},$$

其中 $\operatorname{Var} U_h(x, t_k)|_{[,]}$ 表示 $U_h(x, t_k)$ 在区间[,]上的全变差.
因此

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} |U_h(x, t') - U_h(x, t)| dx$$

$$\leqslant h \operatorname{Var} U_h(x, t_k)|_{[x_{j-ms-1}, x_{j+ms+1}]},$$

并由此推得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |U_h(x, t') - U_h(x, t)| dx$$

$$\leqslant 2h(ms + 1) \operatorname{Var} U_h(x, t_k).$$

因为

$$2h(ms + 1) \leqslant \frac{2m\tau}{r}(s + 1) \leqslant \frac{2m}{r}(|t' - t| + 2\tau)$$

$$= \frac{2m}{r}|t' - t| + 4mh,$$

所以证明了本命题.

定理 7.3 设 $F'(U)$ 连续，$U_0(x) \in BV$，那末 (7.16) 存在 BV 类的弱解 $U(x, t)$，并且 $U(x, t) \in \mathscr{I}$，

$$\operatorname{Var} U(x, t) \leqslant \operatorname{Var} U_0(x).$$

证明 由命题 7.1 和 7.2，$U_h(x, t) \in \mathscr{I}$ 且

$$\operatorname{Var} U_h(x, t) \leqslant \operatorname{Var} U_0(x).$$

利用 Helly 定理可知，可从 $\{U_h\}$ 中选出一个子列，仍记为 $\{U_h\}$，使得在给定的时刻 t，按 L^1 范数收敛. 由对角线方法，又可从中选取子列，仍记为 $\{U_h\}$，使得在一切时刻

$$t = \frac{p}{q},$$

它按 L^1 范数收敛，其中 p, q 是自然数。对于任意时刻 t，则由命题 7.4 得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}|U_h(x, t) - U_{h'}(x, t)|dx \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\left|U_h(x, t) - U_h\left(x, \frac{p}{q}\right)\right|dx \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty}\left|U_h\left(x, \frac{p}{q}\right) - U_{h'}\left(x, \frac{p}{q}\right)\right|dx \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty}\left|U_{h'}(x, t) - U_{h'}\left(x, \frac{p}{q}\right)\right|dx \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\left|U_h\left(x, \frac{p}{q}\right) - U_{h'}\left(x, \frac{p}{q}\right)\right|dx \\
&\quad + c_1\left(\left|t - \frac{p}{q}\right| + h + h'\right),
\end{aligned}
$$

其中 c_1 是正常数，因此在任意时刻 t, $U_h(x, t)$ 都按 L^1 范数收敛到极限函数 $U(x, t)$。

最后来证明 $U(x, t)$ 是 (7.16) 的弱解。设 $\phi(x, t)$ 是试探函数，则由 (7.17) 得到

$$
\begin{aligned}
&\tau h \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\phi_j^k \\
&\quad \times \left\{\frac{u_j^{k+1} - \sum\limits_{l=-m}^{m} a_l u_{j+l}^k}{\tau} + \frac{\sum\limits_{l=-m}^{m} b_l F_{j+l}^k}{h}\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{h}\left(g\left(x_{j+\frac{1}{2}}^k\right) - g\left(x_{j-\frac{1}{2}}^k\right)\right)\right\} = 0.
\end{aligned}
$$

上式又可改写为

$$
\begin{aligned}
&\tau h \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{\left(\phi_j^{k-1} - \sum\limits_{l=-m}^{m} a_l \phi_{j-l}^k\right)u_j^k}{\tau} \\
&\quad + \tau h \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{\sum\limits_{l=-m}^{m} b_l \phi_{j-l}^k F_j^k}{h}
\end{aligned}
$$

$$
-h\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-m}^{m}a_l\phi_{i-l}^0 u_i^0
$$

$$
=\tau h\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{\phi_i^k-\phi_{i-1}^k}{h}g(x_{i-\frac{1}{2}}^k). \tag{7.34}
$$

因为 ϕ 是有限支集的，所以根据 (7.23) 和命题 7.2，可知上式右端为 $O(h)$. 又注意到 (7.20)，(7.21) 和

$$
\sum_{l=-m}^{m}b_l\phi_{i-l}^k=\sum_{l=-m}^{m}b_l\phi_i^k+\sum_{\substack{-m\leqslant l\leqslant m\\ l\neq l_0}}lhb_l
$$

$$
\times\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_i^k+O(h^2),
$$

在 (7.34) 取极限后得到

$$
\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}U+\frac{\partial\phi}{\partial x}F(U)\right)dx\,dt
$$

$$
+\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x,0)U_0(x)dx=0.
$$

尚可证明 $U(x,t)$ 满足熵条件.

本节的方法可推广应用到更一般的问题，例如多维问题和更一般的单调守恒格式，但无法应用到 $n>1$ 的情况.

7.4 Lax 格式和 Lax-Wendroff 型格式

可以从另一角度来拓广守恒型方程组的解. 如果 $U(x,t)$ 是分片连续的，并且对于在半平面 $t\geqslant 0$ 上的，与 $U(x,t)$ 的间断线只相交有限个点的任意光滑闭曲线 Γ 都有等式

$$
\int_{\Gamma}(F(U)dt-Udx)=0, \tag{7.35}
$$

则称 $U(x,t)$ 是 (7.1) 的弱解.

可以证明，如果 $U(x,t)$ 是分片连续的，那末上述定义的弱解与 § 7.1 中所定义的弱解是等价的.

从 (7.35) 出发也可以推出 Hugoniot 条件，并可由此构造一些差分格式. 例如若取 Γ 为矩形 $ABCD$ (见图 7.2)，则由 (7.35) 得到

$$\int_{\widehat{AB}} F\,dt - \int_{\widehat{BC}} U\,dx + \int_{\widehat{CD}} F\,dt - \int_{\widehat{DA}} U\,dx = 0. \tag{7.36}$$

对上式右端采用数值积分，即

$$\int_{\widehat{AB}} F\,dt \to \tau F_{j+1}^{k},$$

$$-\int_{\widehat{BC}} U\,dx \to 2h u_j^{k+1},$$

$$\int_{\widehat{CD}} F\,dt \to -\tau F_{j-1}^{k},$$

$$-\int_{\widehat{DA}} U\,dx \to -h(u_{j-1}^{k} + u_{j+1}^{k})$$

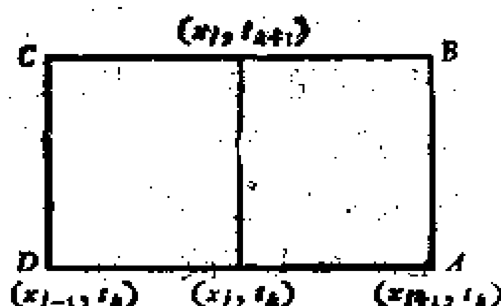


图 7.2

则得到 Lax(1954) 格式

$$\frac{u_j^{k+1} - \frac{1}{2}(u_{j-1}^{k} + u_{j+1}^{k})}{\tau} + \frac{F_{j+1}^{k} - F_{j-1}^{k}}{2h} = 0. \tag{7.37}$$

下面来近似分析 Lax 格式的稳定性。不难验证，u_j^k 的误差 $\tilde{u}_j^k$ 满足下列方程

$$\frac{\tilde{u}_j^{k+1} - \frac{1}{2}(\tilde{u}_{j-1}^{k} + \tilde{u}_{j+1}^{k})}{\tau} + \frac{\bar{A}_{j+1}^{k}\tilde{u}_{j+1}^{k} - \bar{A}_{j-1}^{k}\tilde{u}_{j-1}^{k}}{2h} = 0, \tag{7.38}$$

把 A 和 $\bar{A}_{j+1}^{k}$ 的元素记为 $A_{l\mu}$ 和 $(\bar{A}_{j+1}^{k})_{l\mu}$，则

$$(\bar{A}_{j+1}^{k})_{l\mu} = A_{l\mu}(u_{j+1}^{k} + \theta_{l,j+1}\tilde{u}_{j+1}^{k}),$$

$$0 \leqslant \theta_{l,j+1} \leqslant 1,\ 1 \leqslant l,\ \mu \leqslant n.$$

把上式中的 A 分别在 u_{j+1}^{k} 和 u_{j-1}^{k} 处展开，略去高阶小量后得到

$$\frac{\tilde{u}_j^{k+1} - \frac{1}{2}(\tilde{u}_{j-1}^{k} + \tilde{u}_{j+1}^{k})}{\tau} + \frac{A(u_{j+1}^{k})\tilde{u}_{j+1}^{k} - A(u_{j-1}^{k})\tilde{u}_{j-1}^{k}}{2h} = 0.$$

假设 A 是常数阵，那末由分离变量法得到增长矩阵

$$G(\beta, \tau) = \cos\beta h I - ir \sin\beta h A.$$

用 $\lambda(A)$ 和 $\lambda(G)$ 分别表示 A 和 G 的特征值，则得到

$$\lambda(G) = \cos\beta h - ir \sin\beta h \lambda(A).$$

因此当 $r|\lambda(A)|_{max} \leqslant 1$ 时，满足 Von Neumann 条件。因为 A 有 n 个不同的实特征根，故它有完全的特征向量系，又因为 G 是 A 的多项式，它们的特征向量相同，所以特征向量系的 Gram 行列式与 β, h 无关。根据定理 4.6，Lax 格式是稳定的。

Lax 格式可改写为

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} + \frac{F_{j+1}^k - F_{j-1}^k}{2h} = \frac{h^2}{2\tau} \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}, \quad (7.39)$$

因此可把它看作下列带有小参数项的抛物型方程组的中心差分格式

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = \frac{h^2}{2\tau} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \quad (7.40)$$

若当 $h \to 0$, $\tau \to 0$ 时，$\frac{\tau}{h}$ 是常数，则它就退化为原来的双曲型方程组。

由于这个小参数项的存在，大大加强了计算稳定性。事实上，若得到下列格式

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} + \frac{F_{j+1}^k - F_{j-1}^k}{2h} = 0, \quad (7.41)$$

不难验证，无论采用什么样的 r，它总是不稳定的。

例 7.2 设 U 是速度，P 是压力，ρ 是密度，E 是比内能，那末在 Euler 座标中的一维不定常流动满足下列方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho U)}{\partial x} = 0, & \text{连续性方程,} \\ \dfrac{\partial U}{\partial t} + U\dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} = 0, & \text{动量方程,} \\ \rho\left(\dfrac{\partial E}{\partial t} + U\dfrac{\partial E}{\partial x}\right) + P\dfrac{\partial U}{\partial x} = 0, & \text{能量方程,} \\ P = f(\rho, E), & \text{状态方程.} \end{cases} \quad (7.42)$$

令 $M = \rho U$,

$$\mathscr{E} = \rho\left(E + \frac{U^2}{2}\right),$$

$\overline{U} = (\rho, M, \mathscr{E})^*$ 以及

$$F(\overline{U}) = \left(M, \frac{M^2}{\rho} + P, \frac{M}{\rho}(\mathscr{E} + P)\right)^*,$$

则得到

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial t} + \frac{F(\overline{U})}{\partial x} = 0,$$

或写成分量形式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial M}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial M}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{M^2}{\rho} + P\right) = 0, \\ \dfrac{\partial \mathscr{E}}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{M}{\rho}(\mathscr{E} + P)\right) = 0, \\ P = f\left(\rho, \dfrac{\mathscr{E}}{\rho} - \dfrac{M^2}{2\rho^2}\right). \end{cases} \tag{7.43}$$

用 m, p, e 分别表示 M, P 和$\mathscr{E}$的近似值，ρ 的近似值仍记为 ρ，则得到下列 Lax 格式

$$\begin{cases} \dfrac{\rho_j^{k+1} - \dfrac{1}{2}(\rho_{j-1}^k + \rho_{j+1}^k)}{\tau} + \dfrac{m_{j+1}^k - m_{j-1}^k}{2h} = 0, \\ \dfrac{m_j^{k+1} - \dfrac{1}{2}(m_{j-1}^k + m_{j+1}^k)}{\tau} + \dfrac{(m_{j+1}^k)^2}{2h\rho_{j+1}^k} - \dfrac{(m_{j-1}^k)^2}{2h\rho_{j-1}^k} \\ \qquad + \dfrac{p_{j+1}^k - p_{j-1}^k}{2h} = 0, \\ \dfrac{e_j^{k+1} - \dfrac{1}{2}(e_{j-1}^k + e_{j+1}^k)}{\tau} + \dfrac{m_{j+1}^k}{2h\rho_{j+1}^k}(e_{j+1}^k + p_{j+1}^k) \\ \qquad - \dfrac{m_{j-1}^k}{2h\rho_{j-1}^k}(e_{j-1}^k + p_{j-1}^k) = 0, \\ p_j^k = f\left(\rho_j^k, \dfrac{e_j^k}{\rho_j^k} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m_j^k}{\rho_j^k}\right)^2\right) \end{cases} \tag{7.44}$$

不难验证，F 对 U 的 Jacobi 矩阵的特征值是 $U \pm a$ 和 U，其中 a 是局部等熵声速．对于等熵流，则

$$a = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}.$$

所以 Lax 格式的近似稳定条件是

$$r(|u| + a) \leqslant 1.$$

实际计算表明，用 Lax 格式计算间断解时误差较大，间断的过渡区也太宽．

Lax, Wendroff (1962b) 提出了下列二阶逼近精度的格式

$$u_i^{k+1} = u_i^k - \frac{r}{2}(F_{i+1}^k - F_{i-1}^k)$$
$$+ \frac{r^2}{2}[A_{i+\frac{1}{2}}^k(F_{i+1}^k - F_i^k) - A_{i-\frac{1}{2}}^k(F_i^k - F_{i-1}^k)],$$

其中

$$A_{i+\frac{1}{2}}^k = A\left(\frac{1}{2}u_i^k + \frac{1}{2}u_{i+1}^k\right).$$

若 A 是常数阵，则

$$u_i^{k+1} = u_i^k - \frac{rA}{2}(u_{i+1}^k - u_{i-1}^k)$$
$$+ \frac{r^2A^2}{2}(u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k), \tag{7.45}$$

所以上述格式也可以看作为下列带有小参数项的方程的中心差分格式

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\tau A^2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

上述格式也可以由 Taylor 展开式得到．首先有

$$U_i^{k+1} = U_i^k + \tau\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_i^k + \frac{\tau^2}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)_i^k + \cdots.$$

另一方面，我们有

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -A\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = A^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

把它们代入上式，并用相应的差商来逼近，就可推得 (7.45)．

不难用分离变量法得到 (7.45) 的近似增长矩阵

$$G(\beta,\tau)=I-ir\sin\beta h\cdot A-r^2(1-\cos\beta h)A^2$$

和相应的特征值的绝对值

$$|\lambda(G)|=\sqrt{1-4r^2\sin^4\frac{\beta h}{2}\lambda^2(A)(1-r^2\lambda^2(A))}$$

所以，当 $r|\lambda(A)|_{\max}\leqslant 1$ 时，计算是稳定的. 不过，由这个格式所得到的间断过渡区仍太宽. 此外，极限函数也未必满足熵条件.

Majda, Osher (1979) 对于 $n=1$, $F(U)$ 为凸函数的情况，构造了下列修正的 Lax-Wendroff 格式

$$\begin{aligned}u_j^{k+1}=u_j^k&-\frac{r}{2}(F_{j+1}^k-F_{j-1}^k)\\&+\frac{r^2}{2}\bar{\partial}_x\left[\frac{\partial_x F_j^k\partial_x F_j^k}{\partial_x u_j^k}\right]\\&+r\bar{\partial}_x\left[c\theta\left(\frac{|\partial_x u_j^k|}{h^\alpha}\right)\partial_x A_j^k\partial_x u_j^k\right],\end{aligned}\qquad(7.46)$$

其中 α, c 是适当选择的常数，

$$\theta(z)=\begin{cases}0, & 若\ |z|<1,\\1, & 若\ |z|\geqslant 1,\end{cases}$$

格式 (7.46) 是不单调的二阶逼近精度的格式. Majda, Osher (1979) 证明了，如果

$$\frac{1}{3}\leqslant\alpha\leqslant 1,\quad r\max_{j,k}|A_j^k|\leqslant 0.14,$$

则存在适当的正常数 c，使得若 $U_h(x,t)$ 有界地几乎处处收敛到 $U(x,t)$，则 $U(x,t)$ 必为相应方程的满足熵条件的弱解. 不过应用 (7.46) 计算所得的解在间断附近仍有振荡现象，而且对 τ 的限制也过于苛刻.

为了克服间断附近的振荡现象，Yee, Warming, Harten 提出了另一种守恒型格式，其解的极限函数也满足熵条件. 设

$$R=(R_1,R_2,\cdots,R_n)$$

是 A 的相应的右特征向量所组成的矩阵，矩阵 L 的每一行是 A 的左特征向量，并且 LR 为单位阵. 记

$$L_{j+\frac{1}{2}}^k = L\left(\frac{1}{2}u_j^k + \frac{1}{2}u_{j+1}^k\right),$$

$$\alpha_{j+\frac{1}{2}}^k = L_{j+\frac{1}{2}}^k(u_{j+1}^k - u_j^k),$$

$\alpha_{j+\frac{1}{2}}^k$ 的分量记为 $\alpha_{l,j+\frac{1}{2}}^k$，那么 Yee, Warming, Harten 得到的格式为

$$u_j^{k+1} = u_j^k - \frac{r}{2}(F_{j+1}^k - F_{j-1}^k)$$

$$- \frac{1}{2}(G_{j+1/2}^k - G_{j-\frac{1}{2}}^k),$$

其中

$$G_{j+\frac{1}{2}}^k = \sum_{l=1}^{n}\{\beta_{l,j+\frac{1}{2}}^k(g_{l,j}^k + g_{l,j+1}^k)$$

$$- Q_l(\sigma_{l,j+\frac{1}{2}}^k + \beta_{l,j+\frac{1}{2}}^k\gamma_{l,j+\frac{1}{2}}^k)\alpha_{l,j+\frac{1}{2}}^k\}R_{l,j+\frac{1}{2}}^k,$$

$$\beta_{l,j+\frac{1}{2}}^k = 1 + 2\max(\theta_{l,j}^k, \theta_{l,j+1}^k),$$

$$\theta_{l,j}^k = \frac{|\alpha_{l,j+\frac{1}{2}}^k| - |\alpha_{l,j-\frac{1}{2}}^k|}{|\alpha_{l,j+\frac{1}{2}}^k| + |\alpha_{l,j-\frac{1}{2}}^k|},$$

$$\sigma_{l,j+\frac{1}{2}}^k = r\lambda_l\left(A\left(\frac{1}{2}u_j^k + \frac{1}{2}u_{j+1}^k\right)\right)$$

$$g_{l,j}^k = \mathrm{sign}(\tilde{g}_{l,j+\frac{1}{2}}^k)\max[0, \min(|\tilde{g}_{l,j+\frac{1}{2}}^k|,$$

$$\tilde{g}_{l,j-\frac{1}{2}}^k \cdot \mathrm{sign}(\tilde{g}_{l,j+\frac{1}{2}}^k))],$$

$$\tilde{g}_{l,j+\frac{1}{2}}^k = \frac{1}{2}\alpha_{l,j+\frac{1}{2}}^k[Q_l(\sigma_{l,j+\frac{1}{2}}^k) - (\sigma_{l,j+\frac{1}{2}}^k)^2],$$

$$\gamma_{l,j+\frac{1}{2}}^k = \begin{cases} \dfrac{g_{l,j+1}^k - g_{l,j}^k}{\alpha_{l,j+\frac{1}{2}}^k}, & 若\ \alpha_{l,j+\frac{1}{2}}^k \neq 0, \\ 0, & 若\ \alpha_{l,j+\frac{1}{2}}^k = 0, \end{cases}$$

$Q_l(z)$ 是 z 的某个函数，通常

$$Q_l(z) = z^2 + \frac{1}{4},$$

或者给定 $\varepsilon > 0$，

$$Q_l(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2}{4\varepsilon} + \varepsilon, & 若\ |z| < 2\varepsilon, \\ |z|, & 若\ |z| \geq 2\varepsilon. \end{cases}$$

Engquist, Osher (1981) 对 $n = 1$，$F(U)$ 为凸函数，$\overline{U}$ 为

$F'(U)$ 的唯一零点的情况构造了另一类二阶逼近精度的格式，即

$$u_i^{k+1} = u_i^k - r\left[\partial_x \tilde{\tilde{F}}_i^k - \frac{1}{2}\partial_x(\tilde{\tilde{F}}'(z_i^k)\partial_x u_i^k) + \bar{\partial}_x \tilde{F}_i^k + \frac{1}{2}\bar{\partial}_x(\tilde{F}'(\omega_i^k)\bar{\partial}_x u_i^k)\right] + \frac{r^2}{2}[\partial_x(\tilde{\tilde{F}}'(z_i^k)\partial_x \tilde{\tilde{F}}_i^k) + \bar{\partial}_x(\tilde{F}'(\omega_i^k)\bar{\partial}_x \tilde{F}_i^k)], \tag{7.47}$$

其中

$$z_i^k = \max(u_{i-1}^k, u_i^k, u_{i+1}^k), \quad \omega_i^k = \min(u_{i-1}^k, u_i^k, u_{i+1}^k),$$

$$\tilde{F}(u) = \int_0^u \chi(s)F'(s)ds, \quad \tilde{\tilde{F}}(u) = \int_0^u (1-\chi(s))F'(s)ds,$$

$$\chi(u) = \begin{cases} 1, & 若\ F'(u) \geqslant 0, \\ 0, & 若\ F'(u) < 0. \end{cases}$$

可以证明，如果当 $h, \tau \to 0$ 时，格式 (7.47) 的解的分段插值函数 $U_h(x, t)$ 有界地几乎处处收敛到 $U(x, t)$，那末，$U(x, t)$ 一定是满足熵条件的弱解.

Osher, Solomon (1982) 把 Engquist-Osher 格式应用于空气动力学方程组，取得了很好的结果.

7.5 混合开关方法

针对单调守恒格式逼近精度仅为一阶的缺点，Harten, Zwas (1972) 和 Harten (1978) 提出了混合开关的方法. 例如设 $\tilde{L}_h$ 是单调守恒格式，$\tilde{\tilde{L}}_h$ 是 p 阶守恒格式，$p \geqslant 1$，

$$(\tilde{L}_h u^k)_i = u_i^k - r(\tilde{g}_{i+\frac{1}{2}}^k - \tilde{g}_{i-\frac{1}{2}}^k),$$

$$(\tilde{\tilde{L}}_h u^k)_i = u_i^k - r(\tilde{\tilde{g}}_{i+\frac{1}{2}}^k - \tilde{\tilde{g}}_{i-\frac{1}{2}}).$$

设 θ 是一个参数，$0 \leqslant \theta \leqslant 1$，那末下列混合格式仍是守恒的

$$L_h = \theta \tilde{L}_h + (1-\theta)\tilde{\tilde{L}}_h.$$

由于

$$\|L_h\| \leqslant \theta\|\tilde{L}_h\| + (1-\theta)\|\tilde{\tilde{L}}_h\|,$$

所以当 $\tilde{L}_h$，$\tilde{\tilde{L}}_h$ 两者稳定性条件中的较严格者满足时，L_h 也是稳定的.

可以把 θ 取为开关函数 $\theta_{i+\frac{1}{2}}$，$0 \leqslant \theta_{i+\frac{1}{2}} \leqslant 1$，于是

$$(L_h u^k)_j = u_j^k - r(g_{j+\frac{1}{2}}^k - g_{j-\frac{1}{2}}^k),$$

其中

$$g_{j+\frac{1}{2}}^k = \theta_{j+\frac{1}{2}}\tilde{g}_{j+\frac{1}{2}}^k + (1 - \theta_{j+\frac{1}{2}})\bar{g}_{j+\frac{1}{2}}^k.$$

在解的光滑区，宜取 $\theta_{j+\frac{1}{2}} \approx 0$，故格式的逼近精度近于 p 阶．在间断线附近，宜取 $\theta_{j+\frac{1}{2}} \approx 1$，从而格式近似地保持单调性，这样就兼有双重的优点．选择开关函数的方法之一是构造 u 的适当函数 $\sigma(u)$，并且令

$$\theta_{j+\frac{1}{2}} = \max(\theta_j, \theta_{j+1}),$$

$$\theta_j = \begin{cases} \left|\dfrac{|\sigma_{j+1}^k - \sigma_j^k| - |\sigma_j^k - \sigma_{j-1}^k|}{|\sigma_{j+1}^k - \sigma_j^k| + |\sigma_j^k - \sigma_{j-1}^k|}\right|^q, & \text{当分母大于 } \varepsilon, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases}$$

其中 ε 是度量解的光滑性的参数．

显然，$0 \leqslant \theta_{j+\frac{1}{2}} \leqslant 1$．在解的光滑区内，$L_h$ 是 $\min(p, q)$ 阶的，在间断线附近，则近似地保持了单调性．

Goldberg, Abarbanel (1974) 提出了另一种混合开关方法，即

$$u_j^{k+1} = \theta_j^k(\tilde{L}_h u^k)_j + (1 - \theta_j^k)(\tilde{\tilde{L}}_h u^k)_j,$$

其中 $\tilde{L}_h$ 是对应于 Lax 格式的差分算子，$\tilde{\tilde{L}}_h$ 是对应于 Lax-Wendroff 格式的差分算子，

$$\theta_j^k = \begin{cases} \theta, & \text{若 } j = j^{(k)} = k\delta + j_0, \\ 0, & \text{若 } j \neq j^{(k)}, \end{cases}$$

θ 是常数，δ 和 j_0 是给定的整数，$\dfrac{t_k\delta}{r} + j_0 h$ 可视为间断的位置．其它详见 Goldberg, Abarbanel (1974)．应用这个方法所得的激波剖面比 Lax 格式好，但在克服激波后的过头现象上，不如 Lax-Wendroff 格式．为了克服这个缺点，可把上述方法修正如下：

$$\begin{aligned} u_j^{k+1} = u_j^k &- \frac{r}{2}(F_{j+1}^k - F_{j-1}^k) \\ &+ \frac{1}{2}[\theta_{j+\frac{1}{2}}^k(u_{j+1}^k - u_j^k) - \theta_{j-\frac{1}{2}}^k(u_j^k - u_{j-1}^k)] \\ &+ \frac{r^2}{2}[(1 - \theta_{j+\frac{1}{2}}^k)A_{j+\frac{1}{2}}^k(F_{j+1}^k - F_j^k) \end{aligned}$$

$$- (1 - \theta_{j-\frac{1}{2}}^k) A_{j-\frac{1}{2}}^k (F_j^k - F_{j-1}^k)],$$

其中

$$\theta_{j+\frac{1}{2}}^k = \begin{cases} \theta, & \text{当 } |u_{j+1}^k - u_j^k| \geq \beta h, \\ 0, & \text{当 } |u_{j+1}^k - u_j^k| < \beta h, \end{cases}$$

β 是常数．计算结果表明，当 $\theta = 0.5$, $\beta h = 0.05, 0.1, 0.2, 0.4$ 时所得的结果比较好．

用混合开关方法计算空气动力学问题，已取得良好的结果。

7.6 预估校正格式

Richtmyer (1962) 把 Lax-Wendroff 格式改为下列预估校正形式

$$\begin{cases} u_{j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_j^k + u_{j+1}^k) - \frac{r}{2}(F_{j+1}^k - F_j^k), \\ u_j^{k+1} = u_j^k - r(F_{j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - F_{j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

为了克服用这一格式计算所得的间断解的过渡区太宽的缺点，Maccormack (1969) 提出了另一种预估校正格式，即

$$\begin{cases} u_j^{k+\frac{1}{2}} = u_j^k - r(F_{j+1}^k - F_j^k) + \varepsilon r(F_{j+1}^k - 2F_j^k + F_{j-1}^k), \\ u_j^{k+1} = \frac{1}{2}(u_j^k + u_j^{k+\frac{1}{2}}) - \frac{r}{2}(F_j^{k+\frac{1}{2}} - F_{j-1}^{k+\frac{1}{2}}) \\ \qquad - \frac{\varepsilon r}{2}(F_{j+1}^{k+\frac{1}{2}} - 2F_j^{k+\frac{1}{2}} + F_{j-1}^{k+\frac{1}{2}}), \end{cases} \tag{7.48}$$

其中 $\varepsilon = 0, 1$.

计算表明，ε 的值应与波的前进方向相对应．如果波是正向运动的，宜取 $\varepsilon = 0$；反之，则取 $\varepsilon = 1$．如果不这样会得到谬误的结果．可以证明，当 $r|\lambda(A)|_{\max} \leq 1$ 时，此格式是近似稳定的．用 Maccormack 方法计算间断解时，激波和接触间断仍有所拉宽，此外尚有过头现象。

Русанов (见 Rusanov (1969)) 和 Burstein, Mirin (1970) 根据 Runge-Kutta 方法提出了一个三阶精度的三步格式，它是采用中心差商型的格式，其具体算式如下：

$$
\begin{cases}
u_{j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2}(u_{j+1}^k + u_j^k) - \dfrac{\tau}{3}(F_{j+1}^k - F_j^k), \\
u_j^{k+\frac{2}{3}} = u_j^k - \dfrac{2\tau}{3}\left(F_{j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{3}} - F_{j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{3}}\right), \\
u_j^{k+1} = u_j^k - \dfrac{\tau}{24}(-2F_{j+2}^k + 7F_{j+1}^k - 7F_{j-1}^k \\
\qquad + 2F_{j-2}^k) - \dfrac{3\tau}{8}(F_{j+1}^{k+\frac{2}{3}} - F_{j-1}^{k+\frac{2}{3}}) \\
\qquad - \dfrac{\omega}{24}(F_{j+2}^k - 4F_{j+1}^k + 6F_j^k - 4F_{j-1}^k + F_{j-2}^k).
\end{cases}
\tag{7.49}
$$

记 $\nu = \tau\lambda(A)$，则当 $|\nu| \leqslant 1$ 和 $4\nu^2 - \nu^4 \leqslant \omega \leqslant 3$ 时计算是稳定的. 用 Русанов 方法计算激波，克服了过头现象，但激波仍拉得太宽.

Kutler, Lomax, Warming (1972) 提出了另一种非中心差商型的三步格式，它在 $t_k + \dfrac{2}{3}\tau$ 时刻采用了 Maccormack 方法，其具体计算格式如下：

$$
\begin{cases}
u_j^{k+\frac{2}{3}} = u_j^k - \dfrac{2\tau}{3}((1-\varepsilon)F_{j+1}^k - (1-2\varepsilon)F_j^k - \varepsilon F_{j-1}^k), \\
u_j^{k+\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{2}(u_j^k + u_j^{k+\frac{2}{3}}) - \dfrac{\tau}{3}(\varepsilon F_{j+1}^{k+\frac{2}{3}} + (1-2\varepsilon)F_j^{k+\frac{2}{3}} \\
\qquad + (\varepsilon - 1)F_{j-1}^{k+\frac{2}{3}}), \\
u_j^{k+1} = u_j^k - \dfrac{\omega_{j+\frac{1}{2}}^k}{24}(F_{j+2}^k - 3F_{j+1}^k + 3F_j^k - F_{j-1}^k) \\
\qquad + \dfrac{\omega_{j-\frac{1}{2}}^k}{24}(F_{j+1}^k - 3F_j^k + 3F_{j-1}^k - F_{j-2}^k) \\
\qquad - \dfrac{\tau}{24}(-2F_{k+2}^j + 7F_{j+1}^k - 7F_{j-1}^k + 2F_{j-2}^k) \\
\qquad - \dfrac{3\tau}{8}(F_{j+1}^{k+\frac{2}{3}} - F_{j-1}^{k+\frac{2}{3}}),
\end{cases}
\tag{7.50}
$$

其中

$$\omega_{j+\frac{1}{2}}^{k}=\omega(\nu_{j+\frac{1}{2}}^{k}),$$

$$\nu_{j+\frac{1}{2}}^{k}=\frac{r}{4}\left(\lambda(A_{j+2}^{k})+\lambda(A_{j+1}^{k})+\lambda(A_{j}^{k})+\lambda(A_{j-1}^{k})\right).$$

(7.50) 的近似稳定性条件与 (7.49) 相同.

可以按照不同的准则选择 ω 的值. 如果 A 是常数阵, 并且把光滑解代入 (7.50), 那末得到它所逼近的修正了的偏微分方程

$$\frac{\partial U}{\partial t}+A\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{Ah^{3}}{24}\left(\frac{\omega}{\nu}-4\nu+\nu^{3}\right)\frac{\partial^{4}U}{\partial x^{4}}$$

$$-\frac{Ah^{4}}{120}\left(-5\omega+(4\nu^{2}+1)(4-\nu^{2})\right)\frac{\partial^{5}U}{\partial x^{5}}+\cdots.$$

在上式中,四阶导数项表示耗散,五阶导数项表示弥散, 若希望减小耗散,则取 $\omega=4\nu^{2}-\nu^{4}$, 若希望减少弥散,则取

$$\omega=\frac{1}{5}(4\nu^{2}+1)(4-\nu^{2}).$$

计算结果表明,按照这两种 ω 值计算的差分解是比较好的.

上面所介绍的各种方法已广泛应用于航天工具的计算. 在 Taylor, Ndefo, Masson (1972) 和 Anderson (1974) 的论文中, 还数值地比较了这些方法.

Abarbanel, Gottlieb, Turkel (1975) 还提出了一类四阶逼近精度的预估校式格式. 下面记

$$\mu u_{j}^{k}=\frac{1}{2}\left(u_{j+\frac{1}{2}}^{k}+u_{j-\frac{1}{2}}^{k}\right),\quad \delta_{x}u_{j}^{k}=u_{j+\frac{1}{2}}^{k}-u_{j-\frac{1}{2}}^{k}.$$

他们的格式是

$$\begin{cases}u_{j}^{k+\frac{1}{4}}=\mu u_{j}^{k}-\dfrac{r}{2}\delta_{x}F_{j}^{k},\\[2ex] u_{j}^{k+\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{2}u_{j}^{k}-\dfrac{1}{2}\mu^{2}u_{j}^{k}-\dfrac{r}{2}\delta_{x}F_{j}^{k+\frac{1}{4}},\\[2ex] u_{j}^{k+\frac{3}{4}}=\dfrac{3}{2}\mu u_{j}^{k}-\dfrac{1}{2}\mu^{3}u_{j}^{k}-r\left[\delta_{x}F_{j}^{k+\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}\delta_{x}F_{j}^{k}\right.\\[2ex] \qquad\left.-\dfrac{1}{2}\delta_{x}(\mu^{2}F_{j}^{k})\right],\end{cases}$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
u_i^{k+1} = u_i^k - r \Big[& \frac{1}{6}\delta_x F_i^{k+\frac{3}{4}} + \frac{1}{3}\delta_x(\mu F_i^{k+\frac{1}{2}}) + \frac{2}{3}\delta^{\frac{1}{4}}{}_x F_i^{k+} \\
& - \frac{1}{3}\delta_x(\mu^2 F_i^{k+\frac{1}{4}}) + \frac{1}{4}\delta_x(\mu F_i^k) - \frac{1}{12}\delta_x(\mu^3 F_i^k)\Big].
\end{aligned}
\right.
$$

此外 Годунов 曾提出过一种一阶精度的预估校正格式

$$
\begin{cases}
u_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}(u_i^k + u_{i+1}^k) - r(F_{i+1}^k - F_i^k), \\
u_i^{k+1} = u_i^k - r[F(u_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}) - F(u_{i-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}})].
\end{cases}
$$

Shuman 则考虑了另一种预估校正格式，实质上它是一种滤波的方法．我们作一粗略的介绍，设 L_h 是 $p \geqslant 2$ 阶逼近精度的差分算子，则

$$
\begin{cases}
u_i^{k+\frac{1}{2}} = (L_h u^k)_i, \\
u_i^{k+1} = u_i^{k+\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{4}\Big[\theta_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\Big(u_{i+1}^{k+\frac{1}{2}} - u_i^{k+\frac{1}{2}}\Big) \\
\qquad - \theta_{i-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\Big(u_i^{k+\frac{1}{2}} - u_{i-1}^{k+\frac{1}{2}}\Big)\Big],
\end{cases}
$$

其中 $\theta_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}$ 按某种方法来调节．

7.7 Riemann 间断分解，Годунов 格式

守恒型方程组的一个最简单的初值问题是

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial t} + \dfrac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\
U(x, 0) = \begin{cases} U^-, & x \leqslant 0, \\ U^+, & x > 0, \end{cases}
\end{cases}
\tag{7.51}
$$

其中 U^- 和 U^+ 是常量．

现在把 U^- 和 U^+ 视为均匀直管中无限薄膜片两边的气体状态．如果在 $t = 0$ 时膜片破裂，那末两边气体就发生流动，并发生间断分解，这就是著名的 Riemann 问题（见 Courant, Friedrichs (1948) 和 Рождественский, Яненко (1968)）．

如果 $U(x, t)$ 是 (7.51) 的解，α 是正常数，那末 $U(\alpha x, \alpha t)$ 也是它的解．若解是唯一的，则 $U(\alpha x, \alpha t) = U(x, t)$，因此它

是齐次函数，即只依赖于变量

$$\xi = \frac{x}{t},$$

故由 (7.51) 得到

$$-\xi \frac{dU}{d\xi} + A \frac{dU}{d\xi} = 0.$$

若 $n = 1$，$F(U)$ 是严格凸函数，则可得到解的具体表达式. 它分三种情况.

(i) $U^- = U^+$，此时 $U(x,t) = U^- = U^+$.

(ii) $U^- > U^+$，由于 $F''(U) > 0$，$A = F'(U)$ 是单调增加的，因此

$$F'(U^-) > F'(U^+),$$

这是激波发生的充要条件，从而得到 (见图 7.3)

$$U(x, t) = \begin{cases} U^-, \text{当 } x \leqslant st, \\ U^+, \text{当 } x > st, \end{cases}$$

其中 s 是激波传播速度，

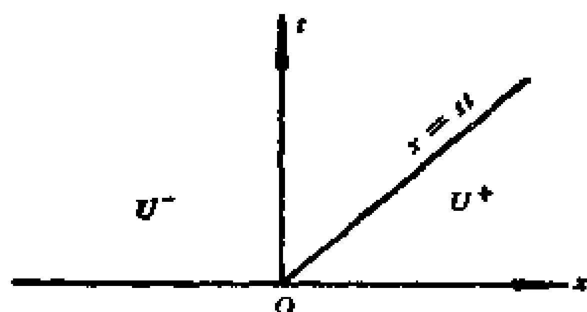


图 7.3

$$s = \frac{F(U^+) - F(U^-)}{U^+ - U^-}.$$

(iii) $U^+ > U^-$，此时不发生激波，即是稀疏波 (见图 7.4). 它的具体表达式是

$$U(x, t) = \begin{cases} U^-, & \text{当 } \frac{x}{t} < F'(U^-), \\ G\left(\frac{x}{t}\right), & \text{当 } F'(U^-) \leqslant \frac{x}{t} \leqslant F'(U^+), \\ U^+, & \text{当 } \frac{x}{t} > F'(U^+), \end{cases}$$

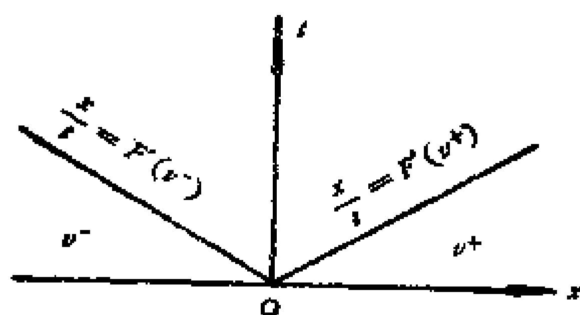


图 7.4

其中 $G(U)$ 是 $F'(U)$ 的反函数.

由于$G'(U)=\dfrac{1}{F''(U)}$, 所以当通过稀疏波时, U是增加的, 从而根据前面的分析可知道

$$|U|\leqslant\max(|U^-|,|U^+|).$$

当 $n\neq 1$ 时, Lax (1957) 证明了下列结果: 对于任意的 $U^{(0)}=U^-$, 都存在着它的一个充分小的邻域,使得当 $U^{(n)}=U^+$ 属于这个邻域时,一定存在着 $n-1$ 个常态解, 即在 (x,t) 平面上的某个区域内,U是常向量, 记为 $U^{(1)}, U^{(2)},\cdots,U^{(n-1)}$, 它们都在这个小邻域内,并且相邻两个常向量间可以用第 l 类激波,或第 l 类接触间断,或第 l 类中心单波从左到右地连接起来,它们构成了(7.51)的解. 这个解是相似的,即只依赖于变量

$$\xi=\frac{x}{t}.$$

如果考虑这个充分小邻域内的相似解, 则上述解是唯一的. 其中激波和接触间断的定义见 §7.1, 第 l 类中心单波是指在角状区域

$$\beta_1\leqslant\frac{x}{t}\leqslant\beta_2$$

内,过原点的每一条射线都是第 l 条特征线,在这条特征线上U是常向量.

若 U^- 和 U^+ 的差别较大,则对某些特殊的 $F(U)$, 也有一些理论上的结果.

基于 Riemann 的间断分解, Годунов(1959) 对于在 Lagrange

坐标下的方程组提出了一个算法. 以后, Годунов, Забродин, Прокопов (1961) 把它推广到 Euler 坐标下的守恒型方程组, 它由以下两步所组成:

第一步 假设已用某种方法算出 U 在 t_k 时刻和区间 (x_j, x_{j+1}) 上的近似平均值, 记为 $u^k_{j+\frac{1}{2}}$, 再将它作为 $u(x, t_k)$ 在 $[x_j, x_{j+1})$ 上各点的值, 于是在网格点 (x_j, t_k) 上, 解发生了间断, 它的左、右两侧的值分别是 $u^k_{j-\frac{1}{2}}$ 和 $u^k_{j+\frac{1}{2}}$, 因此当 $t > t_k$ 时发生了间断分解. 根据解的相似性, 它是 $\frac{x-x_j}{t-t_k}$ 的函数, 故在过点 (x_j, t_k) 的每条直线上, $U(x, t)$ 都取相同的值. 这个问题有许多种答案, 视 $F(U)$ 的具体形式和 $u^k_{j-\frac{1}{2}}$ 和 $u^k_{j+\frac{1}{2}}$ 的具体值而定. 如果

$$\tau < \frac{1}{2\max(s^k_j, |\lambda^k_j|_{\max})}, \tag{7.52}$$

其中 s^k_j 是间断分解中激波的传播速度, $|\lambda^k_j|_{\max}$ 是 A 的特征值的最大绝对值, 则在 $[t_k, t_k+\tau)$ 时间内, 在 x_j 各点发生的间断都不会相交. 特别由于解的相似性, 在直线 $x = x_j$ 上, $u(x, t)$ 取相同的值, 记为 $\bar{u}^k_j$.

第二步 取 Γ 为由四条直线 $x = x_j$, $x = x_{j+1}$, $t = t_k$, $t = t_{k+1}$ 所组成的长方形 $ABCD$ (见图 7.5), 并计算积分 (7.35). 由于在直线 $x = x_j$ 的各点上, 各个间断分解发生的波在时间间隔内都尚未到达, 所以在 $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ 和 $\widehat{DA}$ 上, $u(x, t)$ 都是常向量, 分别记为 $u^k_{j+\frac{1}{2}}$, $\bar{u}^k_j$, $\bar{u}^k_{j+1}$. 但在 $\widehat{DC}$ 上, $u(x, t)$ 不是常向量, 故

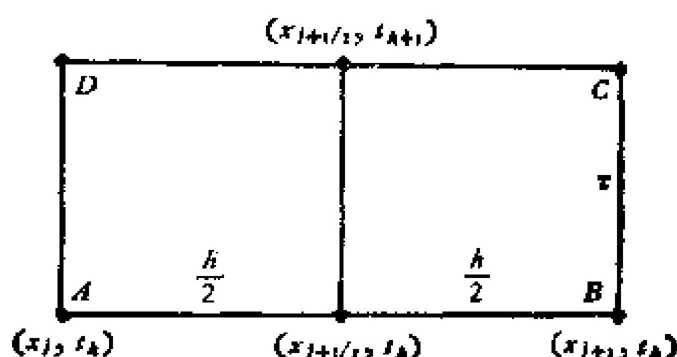


图 7.5

由 (7.35) 得到

$$\int_{\widehat{DC}} u(x, t)dx = hu^k_{i+\frac{1}{2}} - \tau F(\overline{u}^k_{i+1}) + \tau F(\overline{u}^k_i).$$

若把 $\frac{1}{h}\int_{\widehat{DC}} u(x, t)dx$ 作为 $u^{k+1}_{i+\frac{1}{2}}$，则有

$$u^{k+1}_{i+\frac{1}{2}} = u^k_{i+\frac{1}{2}} - r[F(\overline{u}^k_{i+1}) - F(\overline{u}^k_i)]. \tag{7.53}$$

现在把上述值作为 $u(x, t)$ 在 t_{k+1} 时刻和区间 $[x_i, x_{i+1})$ 上的值，则在点 (x_i, t_{k+1}) 又发生间断。如此递推下去，即得到了 Годунов 方法。

Годунов 方法的关键是怎样又快又好地计算 $\overline{u}^k_i$。当用它计算接触间断时，也有些被拉宽的现象。关于这个方法的详细叙述可见 Годунов, Забродин, Иванов, Крайко, Прокопов (1976)。

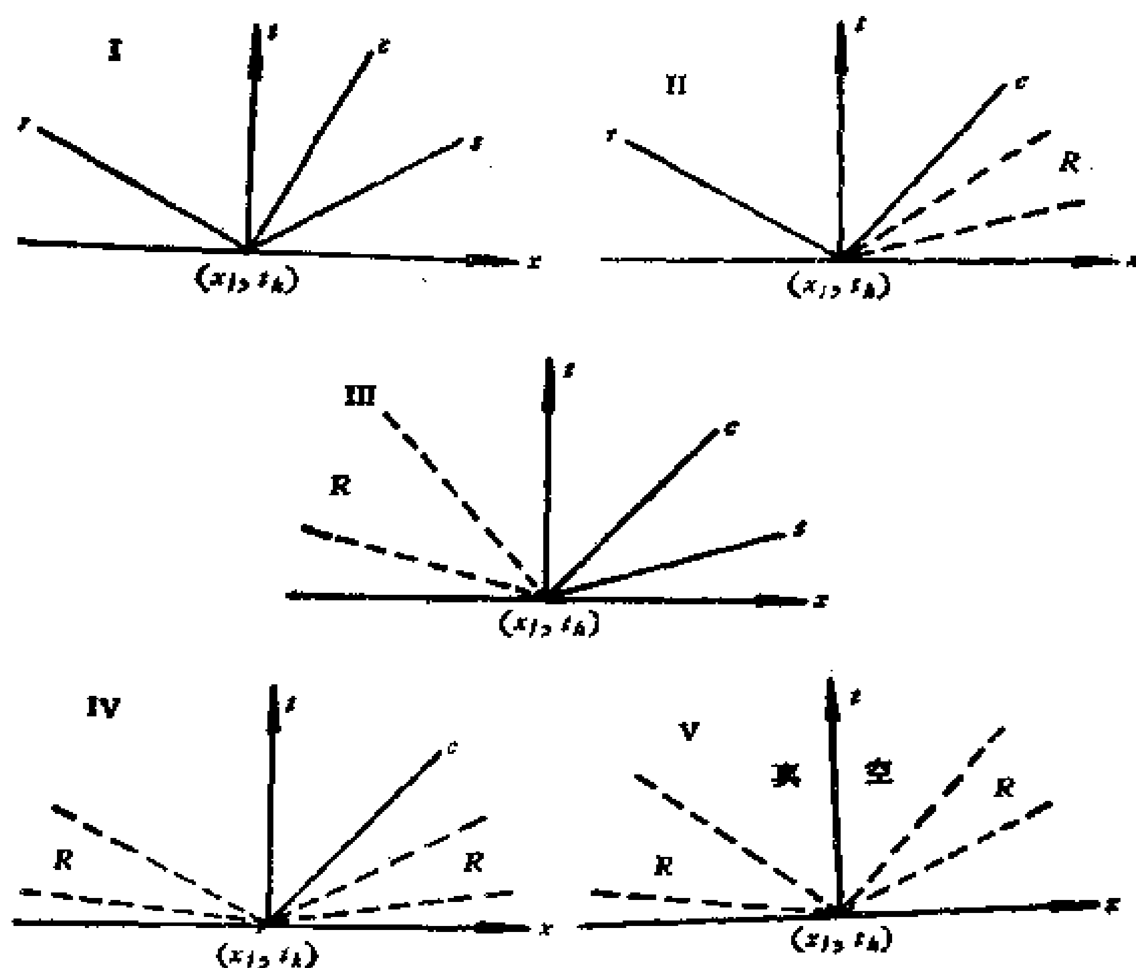


图 7.6

例 7.3 考虑理想气体的一维不定常流动问题(7.42)，并假定状态方程是

$$E = \frac{PV}{\gamma - 1},$$

那末在点 (x_i, t_k) 发生间断分解后可得到五种情况，如图 7.6 所示，其中 s 表示激波，c 表示接触间断，R 表示稀疏波。在稀疏波区域内解是光滑的，在激波，接触间断与稀疏波区之间，解是某些常向量。

这五种不同情况的发生，决定于 $\{u_{i+\frac{1}{2}}^k\}$ 的值。当 $p_{i+\frac{1}{2}}^k > p_{i-\frac{1}{2}}^k$ 时，只会发生 I，II，IV 和 V，发生的条件如下（详见 Ландау, Лифшиц (1954)）

I，$u_{i-\frac{1}{2}}^k - u_{i+\frac{1}{2}}^k > B_1$

$$= (p_{i+\frac{1}{2}}^k - p_{i-\frac{1}{2}}^k) \Big/ \sqrt{\rho_{i-\frac{1}{2}}^k\left(\frac{\gamma+1}{2} p_{i+\frac{1}{2}}^k + \frac{\gamma-1}{2} p_{i-\frac{1}{2}}^k\right)},$$

II，$B_1 > u_{i-\frac{1}{2}}^k - u_{i+\frac{1}{2}}^k > B_2 = \dfrac{2}{1-\gamma}$

$$\times \sqrt{\frac{\gamma p_{i+\frac{1}{2}}^k}{\rho_{i+\frac{1}{2}}^k}}\left(1 - \left(\frac{p_{i-\frac{1}{2}}^k}{p_{i+\frac{1}{2}}^k}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}\right),$$

IV，$B_2 > u_{i-\frac{1}{2}}^k - u_{i+\frac{1}{2}}^k > B_3$

$$= \frac{2\sqrt{\gamma}}{1-\gamma}\left(\sqrt{\frac{p_{i+\frac{1}{2}}^k}{\rho_{i+\frac{1}{2}}^k}} + \sqrt{\frac{p_{i-\frac{1}{2}}^k}{\rho_{i-\frac{1}{2}}^k}}\right),$$

V，$B_3 > u_{i-\frac{1}{2}}^k - u_{i+\frac{1}{2}}^k$.

当 $p_{i+\frac{1}{2}}^k < p_{i-\frac{1}{2}}^k$ 时，则发生情况 I，III，IV 和 V，它们发生的条件与上述条件相类似，但要把 B_1 和 B_2 中 p 和 ρ 的下标 $i - \dfrac{1}{2}$ 和下标 $i + \dfrac{1}{2}$ 互换。

条件 (7.52) 即为

$$\tau < \frac{1}{2\max(s_i^k, |u_i^k| + a_i^k)}, \tag{7.54}$$

其中 a_i^k 是局部声速值。

最后由 (7.53) 得到

$$
\begin{cases}
\rho_{i+\frac{1}{2}}^{k+1} = \rho_{i+\frac{1}{2}}^{k} - r\{(\overline{\rho u})_{i+1}^{k} - (\overline{\rho u})_{i}^{k}\} \\
(\rho u)_{i+\frac{1}{2}}^{k+1} = (\rho u)_{i+\frac{1}{2}}^{k} - r\{(\overline{p + \rho u^2})_{i+1}^{k} - (\overline{p + \rho u^2})_{i}^{k}\}, \\
\left(\rho\left(e + \dfrac{u^2}{2}\right)\right)_{i+\frac{1}{2}}^{k+1} = \left(\rho\left(e + \dfrac{u^2}{2}\right)\right)_{i+\frac{1}{2}}^{k} \\
\qquad - r\left\{\overline{\left(\rho u\left(e + \dfrac{p}{\rho} + \dfrac{u^2}{2}\right)\right)_{i+1}^{k}} - \overline{\left(\rho u\left(e + \dfrac{p}{\rho} + \dfrac{u^2}{2}\right)\right)_{i}^{k}}\right\}.
\end{cases}
\tag{7.55}
$$

7.8 Glimm 方法和随机选取法，弱解存在性的另一证明

Glimm (1965) 提出了基于 Riemann 间断分解的另一种格式. 记

$$Y = \{(j, k) | j, k \text{ 是整数}, \ j + k \text{ 为偶数}, \ k \geqslant 0\}.$$

在平面 (x, t) 上作一系列水平直线段，即

$$x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_{j+1}, \quad t = t_k. \tag{7.56}$$

又定义乘积空间

$$B = \prod_{(j,k)\in Y} \{(x, t) | x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_{j+1}, t = t_k\}.$$

在每个直线段 (7.56) 上随机地取一点 b_j^k (见图 7.7)，其全体 $\{b_j^k\}$ 即为 B 中的一个元素，记为 b.

图 7.7

假定在点 b_{j-1}^{k-1} 和 b_{j+1}^{k-1} 上，(7.1) 的解的近似值 $u(x, t)$ 已有定义，v 为下列 Riemann 问题的解

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{\partial F(v)}{\partial x}=0, \\
v(x,t_{k-1})=\begin{cases} u(b_{j-1}^{k-1}), & \text{当 } x_{j-1}\leqslant x<x_j, \\ u(b_{j+1}^{k-1}), & \text{当 } x_j\leqslant x<x_{j+1}. \end{cases}
\end{cases} \tag{7.57}
$$

显然,在区间 $[x_j, x_{j+1})$ 上 $v(x, t_{k-1})$ 为常向量. 为方便计. 还取

$$
u(x, t)=v(x, t), \quad x_{j-1}\leqslant x\leqslant x_{j+1}, \quad t_{k-1}\leqslant t<t_k.
$$

按照这种方法可以确定 $u(x, t)$ 在带形区域 $\{(x, t)|-\infty<x<\infty, \ t_{k-1}\leqslant t<t_k\}$ 上的值，它是(7.57)的弱解. 特别当 r 充分小时,在点 (x_j, t_{k-1}) 上发生的间断分解不会到达点 (x_{j-1}, t_k) 和 (x_{j+1}, t_k)，因此

$$
\begin{cases}
u(x_{j-1}, t)=u(b_{j-1}^{k-1}), & t_{k-1}\leqslant t<t_k, \\
u(x_{j+1}, t)=u(b_{j+1}^{k-1}), & t_{k-1}\leqslant t<t_k.
\end{cases}
$$

现在取 $u(b_j^k)=v(b_j^k)$，则可按照上面方法得到 $u(x, t)$ 在带形区域 $\{(x, t)|-\infty<x<\infty, \ t_k\leqslant t<t_{k+1}\}$ 上的值. 依此递推下去就得到 Glimm 格式的解.

下面用 Glimm 格式证明弱解存在性. 为简单起见，只讨论 $n=1$ 的简单情况,即

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial t}+\dfrac{\partial F(U)}{\partial x}=0, & -\infty<x<\infty, \ t>0, \\
U(x, 0)=U_0(x), & -\infty<x<\infty,
\end{cases} \tag{7.58}
$$

其中 $F'(U)$ 连续, $U_0(x)\in BV$, 并且当 $U\in\mathscr{I}$ 时, $F''(U)>0$,

$$
\mathscr{I}=[\inf_x U_0(x), \ \sup_x U_0(x)],
$$

还假定

$$
r\leqslant\sup_{U\in\mathscr{I}}|F'(U)|^{-1}. \tag{7.59}
$$

下面来建立一些估计式. 首先由解法直接得到

命题 7.5 对一切 x, t, $u(x, t)\in\mathscr{I}$.

根据这个命题, $F''(U)>0$.

今考虑由连接点 b_j^k, b_{j+1}^{k+1} 的直线段和连接点 b_j^k, b_{j-1}^{k+1} 的直

线段所组成的折线族，若折线的网格点指标数 $j+k$ 是单调增加的，则称此折线为 J 曲线，见图 7.7. 我们给 J 曲线族赋以序向，凡处于较大时间方向的曲线被排在后面，例如图 7.7 中的曲线 J_2 就在 J_1 之后，记为 $J_1 \leqslant J_2$. 用 $u|_J$ 表示 $u(x,t)$ 在 J 上的限制. 由 § 7.7 中的分析可知，$u|_J$ 是由很多激波和稀疏波所组成. 如果在 J 上的某一直线段 $\mathscr{L}_m$ 上通过一个激波，就记为 α_m，激波强度记为 $|\alpha_m| = U^- - U^+$. 今定义 J 上的泛函 $\mathscr{F}(J)$

$$\mathscr{F}(J) = \mathscr{F}(u|_J) = \sum_{\alpha_m \text{通过} J} |\alpha_m|.$$

用 θ 表示处于 $t=0$ 和 $t=\tau$ 之间的唯一的一条 J 曲线，则有

$$\mathscr{F}(\theta) \leqslant \operatorname*{Var}_x U_0(x).$$

命题 7.6 若 $J_1 \leqslant J_2$，则 $\mathscr{F}(J_2) \leqslant \mathscr{F}(J_1)$.

证明 为方便计，假设 J_2 只比 J_1 后退一步，见图 7.8.

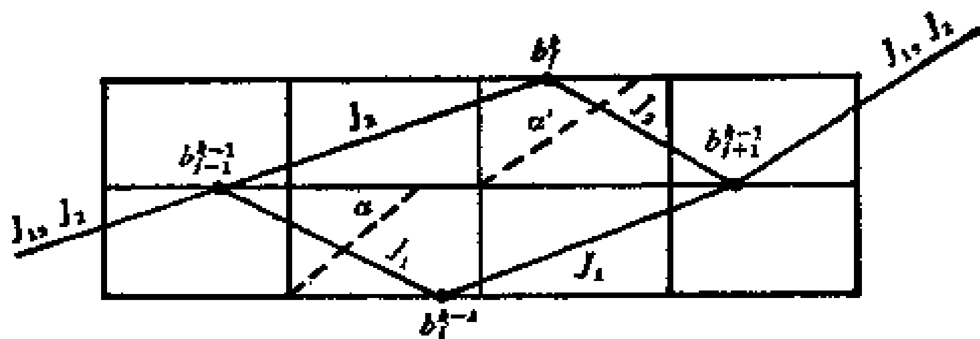


图 7.8

此时 J_1 和 J_2 除了两个不同的节点 b_j^{k-2} 和 b_j^k 以外，其余节点都相同. 现在考察由四点 b_{j-1}^{k-1}, b_j^k, b_{j+1}^{k-1} 和 b_j^{k-2} 所围成的四边形，并把通过四边形中 J_2 部份的唯一可能的激波记为 α'，通过 J_1 部份的激波记为 α_m. 根据 § 7.7 中的分析，此时可能发生四种情况；

I，$\alpha_1 + \alpha_2 \to \alpha'$，即有两个激波通过 J_1 部份，而在 J_2 部份生成一个激波.

II，$\alpha + 0 \to \alpha'$ 或 $0 + \alpha \to \alpha'$，即有一个激波通过 J_1 部份，而在 J_2 部份生成一个激波. 图 7.8 就表示这种情况.

III, $\alpha + 0 \to 0$ 或 $0 + \alpha \to 0$, 即有一个激波通过 J_1 部份，而在 J_2 部份无激波.

IV, $0 + 0 \to 0$, 即在 J_1 和 J_2 部份都无激波.

不难验证，对各种情况都有 $|\alpha'| = |\alpha_1| + |\alpha_2|$ 或 $|\alpha'| \leqslant |\alpha|$. 由于在 J_1, J_2 的其余组成部份上所通过的激波相同，所以

$$\mathscr{F}(J_2) \leqslant \mathscr{F}(J_1).$$

因为通过激波时，$u(x, t)$ 减少，而通过稀疏波时，$u(x, t)$ 增加，因此可由命题 7.6 推出，对一切 $t \geqslant 0$,

$$\operatorname*{Var}_x u(x, t) \leqslant 2\operatorname*{Var}_x U_0(x). \tag{7.60}$$

命题 7.7 对任意的 $t' \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, 都有

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t') - u(x, t)| dx \leqslant \frac{8}{r}(|t' - t| + 2\tau) \operatorname*{Var}_x U_0(x).$$

证明 不妨设 $t' > t$, 并取

$$t'' = \sup_k \{\xi | \xi \leqslant t, \ \xi = t_k\},$$

$$s = \left[\frac{t' - t''}{\tau}\right] + 1,$$

则有 $s\tau \leqslant t' - t'' + 2\tau$. 对任意的 x, $u(x, t_k)$ 完全由 Cauchy 问题的初值 $u(y, t_k)$ 所决定，其中 $y \in [x - sh, x + sh]$, 因此

$$|u(x, t') - u(x, t)| \leqslant \sup\{|u(y, t'') - u(x, t'')| / x - sh \leqslant y \leqslant x + sh\} \leqslant \operatorname*{Var}_x u(x, t'')|_{[x-sh, x+sh]},$$

其中变差是在区间 $[x - sh, x + sh]$ 上取的，因此

$$\int_{x_j}^{x_{j+2}} |u(x, t') - u(x, t)| dx \leqslant 2h \operatorname*{Var}_x u(x, t'')|_{[x_j - sh, x_{j+2} + sh]},$$

并由 (7.60) 得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t') - u(x, t)| dx \leqslant 2h(2s + 2) \operatorname*{Var}_x u(x, t'') \leqslant \frac{8}{r}(|t' - t| + 2\tau) \operatorname*{Var}_x U_0(x).$$

Glimm 格式的解与 h 和 b 的选取方法有关，因此一般地 $u(x, t)$ 也与 h, b 有关，故记之为 $u_{h,b}(x, t)$. 取 ϕ 为具有有界支集的无限光滑函数，记

$$\delta(h, b, \phi) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} u_{h,b}(x, t) + \frac{\partial\phi}{\partial x} F(u_{h,b})\right)dx dt + \int_{-\infty}^\infty \phi(x, 0)\phi_h(x)dx, \tag{7.61}$$

其中 $\phi_h(x)$ 是与 $U_0(x)$ 相对应的阶梯函数，当 $h \to 0$ 时，$\phi_h(x)$ 在 L^1 中收敛到 $U_0(x)$.

因为 $u_{h,b}(x, t)$ 是相应的 Riemann 问题在带形区域 $\{(x, t) | -\infty < x < \infty, t_{k-1} < t < t_k\}$ 中的弱解，因此

$$\delta(h, b, \phi) = \sum_{k=1}^\infty \int_{-\infty}^\infty \phi(x, t_k) \times (u(x, t_k - 0) - u(x, t_k))dx. \tag{7.62}$$

我们的测度空间 B 取决于 h, b. 今作同构

$$b_j^k \longleftrightarrow \frac{1}{2}(h^{-1}b_j^k - j + 1),$$

则 B 同构于 $\Pi[0, 1]$，所以可将 $\delta(h, b, \phi)$ 视为一个定义在一个固定的概率空间上的函数. 下面命题 7.8 中所讲的零测度集 N，也是指在此同构下映成 $\Pi[0, 1]$ 中的一个零测度集.

命题 7.8 存在一个零测度集 $N \in B$ 及一个序列 h_m，使得对任意的 $b \in B - N$ 和任意的 ϕ，当 $m \to \infty$ 时都有

$$h_m \to 0, \quad \delta(h_m, b, \phi) \to 0.$$

证明 分三步来完成.

首先用 $\delta(h, b, \phi, k)$ 表示 (7.62) 和式中的第 k 项，它是随机变量 b 的函数. 由于在区间 $[x_{j-1}, x_{j+1})$ 上 $u(x, t_k)$ 为常数，所以不难验证

$$\left|\sum_j \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \phi(x, t_k)(u(x, t_k - 0) - u(x, t_k))dx\right| \leqslant c_1 h \|\phi\|_{L^\infty} \operatorname*{Var}_x u(x, t_k - 0),$$

其中 c_1 是正常数，从而由 (7.60) 得到

$$\|\delta(h, b, \phi, k)\|_{L^\infty} \leqslant 2c_1 h \|\phi\|_{L^\infty} \mathrm{Var}\, U_0(x). \tag{7.63}$$

其次，暂假定 ϕ 是有界支集函数，它在

$$\{(x, t)/x_{j-1} \leqslant x < x_{j+1}, t = t_k\}$$

上是常数，而在每个由紧邻网格点组成的三角形内则是线性的。选取 $h_m = 2^{-m}$。下面来证明，此时 $\delta(h_m, b, \phi, k_1)$ 和 $\delta_1(h_m, b, \phi, k_2)$ 在 L^2 意义下是正交的。

不妨假设 $k_1 < k_2$，用 $\hat{B}$ 和 $d\hat{b}$ 分别表示不包括因子 $(\bar{j}, k_2)$ 的乘积空间及其测度，于是 $\delta(h_m, b, \phi, k_1)$ 和 $\delta(h_m, b, \phi, k_2)$ 在 L^2 中的内积是

$$\sum_j \int_{\hat{B}} \int_{(j, k_2)} \left(\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \phi(x, t_{k_1}) du(x, t_{k_1}) dx\right)$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, t_{k_1})\, du(x, t_{k_1}) dx\right) db_{j,k_2} d\hat{b}, \tag{7.64}$$

其中

$$du(x, t_k) = u(x, t_k - 0) - u(x, t_k).$$

因为

$$c_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, t_{k_1}) du(x, t_{k_1}) dx$$

与 b_{j,k_2} 无关，而 ϕ 在 $\{(x, t)|x_{j-1} \leqslant x < x_{j+1}, t = k_2\}$ 上是常数，所以 (7.64) 等于

$$\sum_j \int_{\hat{B}} c_2 \phi(x_j, t_{k_2}) \left[\int_{(j,k_2)} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} du(x, t_{k_2}) dx db_{j,k_2}\right] d\hat{b}. \tag{7.65}$$

另一方面有

$$\int_{(j,k_2)} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} du(x, t_{k_2}) dx db_{j,k_2}$$

$$= \int_{(j,k_2)} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} (u(x, t_{k_2} - 0) - u(b_j^{k_2}, t_{k_2}$$

$$- 0) db_{j,k_2} dx = 0,$$

因此 (7.64) 等于零，即 $\delta(h_m, b, \phi, k_1)$ 和 $\delta(h_m, b, \phi, k_2)$ 在 L^2 中是正交的，并由此得到

$$\|\delta(h_m, b, \phi)\|_{L^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|\delta(h_m, b, \phi, k)\|_{L^2}^2$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|\delta(h_m, b, \phi, k)\|_{L^\infty}^2. \tag{7.66}$$

由于ϕ是有界支集函数，故上式中仅 $O\left(\frac{1}{h_m}\right)$ 项非零，因此由(7.63)得到，当$m \to \infty$时，

$$\|\delta(h_m, b, \phi)\|_{L^2}^2 = O\left(\frac{1}{h}\right) c_1^2 h_m^2 \|\phi\|_{L^\infty}^2 (\operatorname*{Var}_x U_0(x))^2 \to 0. \tag{6.67}$$

最后，根据上面的分析，对上述有界支集的分片线性函数$\phi(x, t)$，都存在一个序列 $h_m \to 0$，使得 $\|\delta(h_m, b, \phi)\|_{L^2} \to 0$，因此几乎处处有 $\delta(h_m, b, \phi) \to 0$.现在取分片线性函数集 $\{\phi_l\}$，它是有界支集的 C^∞ 类函数空间中的稠密子集，则存在一个零测度集 $N \in B$，使得对一切 l 和 $b \in B - N$，当 $m \to \infty$ 时都有 $\delta(h_m, b, \phi_l) \to 0$.

对于 C^∞ 中的任意有界支集函数 $\phi(x, t)$，可选取 $\{\phi_{l'}\} \subset \{\phi_l\}$，使得 $\|\phi_{l'} - \phi\|_{L^\infty} \to 0$. 又由(7.63)得到

$$\|\delta(h_m, b, \phi)\|_{L^\infty} \leqslant c_3 \|\phi\|_{L^\infty},$$

因此

$$\|\delta(h_m, b, \phi - \phi_{l'})\|_{L^\infty} \leqslant c_3 \|\phi - \phi_{l'}\|_{L^\infty} \to 0, \tag{7.68}$$

所以在$B - N$上也有 $\delta(h_m, b, \phi) \to 0$. 证毕.

定理 7.4 在前述条件下，问题(7.58)至少有一个弱解 $U(x, t)$，并且 $U(x, t) \in \mathscr{I}$，$U(x, t) \in BV$.

证明 对任意的 $b \in B - N$，取序列 $\{u_{h_m,b}(x, t)\}$. 由于它一致有界并在任一直线 $t = t'$ 上对x有有界变差，故可仿照定理7.3的证明过程，选取一个子列，仍记为 $\{u_{h_m,b}(x, t)\}$，使得 $u_{h_m,b}(x, t)$ 按 L^1 范数，对t一致收敛到函数 $U(x, t)$，从而

$$F(u_{h_m,b}(x, t)) \to F(U(x, t)).$$

最后在(7.61)中取极限即得到

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} U + \frac{\partial \phi}{\partial x} F(U)\right) dx dt + \int_{-\infty}^\infty \phi(x, 0) U_0(x) dx$$

$$= \lim_{m \to \infty} \delta(h_m, b, \phi) = 0.$$

根据命题 7.5 和(7.60)，还可得到$U(x,t) \in \mathscr{I}$，$U(x,t) \in BV$.

Glimm 技巧的优点是可用来证明方程组的初值问题弱解的存在性，这可见 Nishida, Smoller (1973), Diperna (1973, 1982) 和 Tai-ping Liu (1977) 等. 但是很难把它应用于多维变量问题，并且由于它对初值要求较严，因此无法用来证明其他差分方法的收敛性. 其主要问题是它承袭了 Олейник (1957) 的方法，因此需要估计 $u(x, t)$，$\mathrm{Var}\, u(x, t)$ 和验证与命题 7.7 相类似的结论. 近来，Ball (1977) 应用补偿列紧方法研究非线性弹性力学问题，Tartar (1978) 则把它应用于单个双曲型方程，它不必要求 $u(x, t) \in BV$，但补充另一些条件. Diperna (1983a, b) 还应用这一方法研究了 $n = 2$ 和两个空间变量的问题. 关于补偿列紧的资料，还可见 Tartar (1977) 和 Murat (1978, 1979, 1981).

Chorin (1976) 提出了一种基于 Glimm 方法的差分格式，被称为随机选取法. 具体地说，设近似解 u_j^k 已经得到，并把它视为 u 在 $\{(x, t) | x_{j-\frac{1}{2}} \leqslant x < x_{j+\frac{1}{2}}, t = t_k\}$ 上的平均值，从而在点 $(x_{j+\frac{1}{2}}, t_k)$ 上发生间断. 设 ξ 是区间

$$\left\{x \,\middle|\, -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right\}$$

上均匀分布的随机变量，它的分布函数是

$$P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & x < -\dfrac{1}{2}, \\ x + \dfrac{1}{2}, & -\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 1, & x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

今考虑 Riemann 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial F(v)}{\partial x} = 0, \\ v(x, 0) = \begin{cases} u_{j+1}^k, & \text{当 } x \geqslant 0, \\ u_j^k, & \text{当 } x < 0, \end{cases} \end{cases}$$

它的解记为 $v_i(x,t)$. 取随机变量的某个值 ξ^k, 并把

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} = v_i\left(\xi^k h, \frac{\tau}{2}\right)$$

作为 $t_{k+\frac{1}{2}}$ 时刻在区间 $\{x | x_i \leqslant x < x_{i+1}\}$ 上的平均值，于是，在点 $(x_i, t_{k+\frac{1}{2}})$ 上又发生了间断.

再考虑另一个 Riemann 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial F(w)}{\partial x} = 0, \\ w(x,0) = \begin{cases} u_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}, & \text{当 } x \geqslant 0, \\ u_{i-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}, & \text{当 } x < 0, \end{cases} \end{cases}$$

它的解记为 $w_i(x,t)$. 取另一个随机数 $\xi^{k+\frac{1}{2}}$, 则得到

$$u_i^{k+1} = w_i\left(\xi^{k+\frac{1}{2}} h, \frac{\tau}{2}\right).$$

依此类推下去即得到 Chorin 方法的解.

具体记算时，ξ^k 也可以不取上述随机变量，但 ξ^k 落在 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 中任一子区间上的次数与区间长度成正比.

这个方法已成功地应用于燃烧问题. 计算得到的激波和接触间断的过渡区都很狭，其缺点是位置不很准确. 计算稀疏波时虽然不过分平滑，但有阶状的小摆动.

7.9 人工粘性法

拓广守恒型方程组解的另一条途径是考虑下列具有人工粘性项的抛物型方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} + \dfrac{\partial F(U)}{\partial x} = \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial x}\left(B(U)\dfrac{\partial U}{\partial x}\right), \\ \qquad -\infty < x < \infty, \ t > 0, \\ U(x,0) = U_0(x), \qquad -\infty < x < \infty, \end{cases} \tag{7.69}$$

其中 $B(U)$ 是正定矩阵，$\varepsilon > 0$.

若 (7.69) 有唯一的古典解，并且当 $\varepsilon \to 0$ 时，这个解按 L^1 范数收敛到一个极限函数，则称它是 (7.1) 的广义解。

如果 $n=1$，Олейник (1957) 证明了这样的极限函数确实存在，并且满足熵条件. Гельфанд (1959) 曾猜想这对 $n>1$ 也是成立的，但不久就被 Годунов (1960)，Дьяченко (1961) 和 Веленская (1961) 的工作证明这个猜想不是简单地成立的.

由于人工粘性项 $\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\left(B(U) \frac{\partial U}{\partial x}\right)$ 的存在，使得 (7.69) 的解从 U^- 变到 U^+ 时不是跳跃而是存在一个过渡区，但当 $\varepsilon \to 0$ 时，它变为间断.

例 7.4 考虑下列速度为 s 的激波

$$U(x,t)=\begin{cases}U^-, & \text{当 } x \leqslant st, \\ U^+, & \text{当 } x > st,\end{cases}$$

它满足

$$F(U^+)-F(U^-)=s(U^+-U^-).$$

显然，它是 (7.1) 的弱解，其中 $n=1$. 记 $\phi(U)=F(U)-sU$，则可把 Hugoniot 条件改写为

$$\phi(U^-)=\phi(U^+)=c,$$

其中 c 是常数. 又由激波的熵条件得到

$$(\phi(U)-c)\operatorname{sign}(U^+-U^-)>0.$$

今考虑下列具有人工粘性项的方程，其中 $\beta(U)>0$，

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F(U)}{\partial x}=\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\left(\beta(U) \frac{\partial U}{\partial x}\right).$$

令 $\xi=x-st$，并考虑只依赖于 ξ 的解，我们有

$$-s \frac{dU}{d\xi}+\frac{dF(U)}{d\xi}=\varepsilon \frac{d}{d\xi}\left(\beta(U) \frac{dU}{d\xi}\right),$$

或者

$$\frac{d\phi}{d\xi}=\varepsilon \frac{d}{d\xi}\left(\beta(U) \frac{dU}{d\xi}\right). \tag{7.70}$$

把上式对 ξ 积分，并适当选取积分常数就得到

$$\phi(U)-\phi(U^-)=\varepsilon\beta(U) \frac{dU}{d\xi}.$$

如果积分

$$\int_{U^-}^{U^+} \frac{\beta(U)dU}{\phi(U) - \phi(U^-)}$$

存在，则由 (7.70) 得到

$$\xi(U) = \varepsilon \int_{U^-}^{U} \frac{\beta(U)dU}{\phi(U) - \phi(U^-)} + c_1,$$

其中 $\xi(U)$ 表示取值 U 的点 ξ 的位置，c_1 是常数，从而在步长为 h 的网格区域上，从 U^- 变到 U^+ 时所占的网格数目为

$$\frac{\xi(U^+) - \xi(U^-)}{h} = \frac{\varepsilon}{h} \int_{U^-}^{U^+} \frac{\beta(U)dU}{\phi(U) - \phi(U^-)}.$$

显然，当 $\varepsilon \to 0$ 时上式右端趋向零，因而解就趋向于间断.

在实际应用中，即使把方程写成非守恒形式，同样可应用人工粘性法，$B(U)$ 也可以取成为非负定的.

例 7.5 设流体质点在 $t = 0$ 时的坐标是 ξ'，经过时间 t 以后的坐标是 $X = X(\xi', t)$，并用 $U(\xi', t)$ 表示该流体质点在 t 时刻的速度. 用 $\bar{\rho}_0(\xi')$ 表示 $t = 0$ 时的密度分布，$\rho(\xi', t)$ 表示该质点在 t 时刻的密度，$P(\xi', t)$ 表示压力，$E(\xi', t)$ 表示内能. 又设 ρ_0 是与 ρ 同一量纲的常数，

$$V_0 = \frac{1}{\rho_0}.$$

如果选取 Lagrange 座标

$$\xi = \frac{1}{\rho_0} \int \bar{\rho}_0(\xi')d\xi',$$

则得到 $X(\xi, t)$，$U(\xi, t)$，$P(\xi, t)$ 和 $E(\xi, t)$ 等，而一维不定常流动方程组为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial t} = U, & \text{速度方程}, \\ \dfrac{\partial U}{\partial t} + V_0 \dfrac{\partial P}{\partial \xi} = 0, & \text{动量方程}, \\ \dfrac{\partial E}{\partial t} + P \dfrac{\partial V}{\partial t} = 0, & \text{能量方程}, \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
V = V_0 \dfrac{\partial X}{\partial \xi}, & \text{连续方程,} \\
P = f(E, V), & \text{状态方程.}
\end{cases}
\tag{7.71}
$$

Von Neumann, Richtmyer (1950) 引人了人工粘性项

$$
q = \begin{cases}
\dfrac{\varepsilon^2 h^2}{V}\left(\dfrac{\partial U}{\partial \xi}\right)^2, & \text{当} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} < 0, \\
0, & \text{当} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} \geqslant 0,
\end{cases}
$$

则得到修正了的方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial X}{\partial t} = U, \\
\dfrac{\partial U}{\partial t} + V_0 \dfrac{\partial (P+q)}{\partial \xi} = 0, \\
\dfrac{\partial E}{\partial t} + (P+q)\dfrac{\partial V}{\partial t} = 0, \\
V = V_0 \dfrac{\partial X}{\partial \xi}, \\
P = f(E, V).
\end{cases}
\tag{7.72}
$$

特别可由其中的第一,四两式得到

$$
\frac{\partial V}{\partial t} = V_0 \frac{\partial U}{\partial \xi}.
$$

假定所讨论的是理想气体,则尚有

$$
E = \frac{PV}{\gamma - 1}.
$$

下面来分析过渡区的宽度(见 Richtmyer, Morton (1967)),我们考虑只依赖于 $\omega = \xi - st$ 的解,其中 s 是激波的传播速度,把它代入(7.72)后得到

$$
\begin{cases}
s\dfrac{dV}{d\omega} + V_0 \dfrac{dU}{d\omega} = 0, \\
s\dfrac{dU}{d\omega} - V_0 \dfrac{d(P+q)}{d\omega} = 0, \\
\dfrac{dE}{d\omega} + (P+q)\dfrac{dV}{d\omega} = 0.
\end{cases}
\tag{7.73}
$$

因为 $M=\frac{\xi}{V_0}$ 为常数，故积分上述方程组，然后把所得结果组合后得到

$$\begin{cases}MV+U=c_1,\\ M^2V+P+q=c_2,\\ \frac{1}{2}M^2V^2+E+(P+q)V=c_3,\end{cases}\tag{7.74}$$

其中 c_m 是积分常数．假定当 $\xi\to-\infty$ 时，U，V，P，q 分别趋向于 U^-，V^-，P^- 和 q^-，当 $\xi\to\infty$ 时，则分别趋向于 U^+，V^+，P^+ 和 q^+．相应的导数则趋向于零．于是由 q 的定义，当 $|\xi|\to\infty$ 时 $q\to 0$，并由 (7.74) 得到

$$\begin{cases}M(V^+-V^-)+U^+-U^-=0,\\ M^2(V^+-V^-)+P^+-P^-=0,\\ \frac{1}{2}M^2(V^+)^2-\frac{1}{2}M^2(V^-)^2+E^+-E^-+P^+V^+\\ \qquad -P^-V^-=0.\end{cases}$$

从上式也可以推出 Hugoniot 条件．

可由 (7.74) 的后两式得到

$$E=\frac{1}{2}M^2V^2-c_2V+c_3.$$

再由状态方程得到

$$\frac{PV}{\gamma-1}=\frac{1}{2}M^2V^2-c_2V+c_3.$$

把上式代入 (7.74) 的第二式后得到

$$qV=-\frac{1}{2}(\gamma+1)M^2V^2+c_4V+c_5.$$

因为当 $V=V^-$ 或 $V=V^+$ 时，$q=0$，故待定 c_4，c_5 后得到

$$qV=\frac{1}{2}(\gamma+1)M^2(V^+-V)(V-V^-).\tag{7.75}$$

可以证明 $\frac{dU}{d\omega}\leqslant 0$．因为若不然的话，必有 $q=0$，于是由

(7.75) 得到 $U=U^-$ 或 $U=U^+$，从而 $\frac{dU}{d\omega}=0$。既然 $\frac{dU}{d\omega}\leqslant 0$，则恒有

$$q=\frac{\varepsilon^2h^2}{V}\left(\frac{dU}{d\omega}\right)^2.$$

把它代入 (7.75)，注意到 (7.73) 的第一式及

$$\frac{dU}{d\omega}\leqslant 0$$

$\left(\text{即 } \frac{dV}{d\omega}\geqslant 0\right)$ 后得到

$$\frac{dV}{d\omega}=\frac{1}{\varepsilon h}\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}(V-V^+)(V^--V)}.$$

再对 ω 积分就得到

$$V=\frac{V^++V^-}{2}+\frac{V^+-V^-}{2}\times\sin\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\frac{\omega-\omega_0}{\varepsilon h},$$

其中 ω_0 是常数，不妨取为 0. 为了保证 $\frac{dV}{d\omega}\geqslant 0$，必须使

$$\frac{|\omega|\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}\,\varepsilon h}\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

又由于当 $\xi\to-\infty$ 时，$V\to V^-$，而当 $\xi\to\infty$ 时，$V\to V^+$，所以由连接条件得到

$$V=\begin{cases}\dfrac{V^++V^-}{2}+\dfrac{V^+-V^-}{2}\sin\sqrt{\dfrac{\gamma+1}{2}}\dfrac{\xi-st}{\varepsilon h}, & \\ \qquad\text{当 } |\xi-st|<\dfrac{\sqrt{2}\,\pi\varepsilon h}{2\sqrt{\gamma+1}}, & \\ V^-, \quad \text{当 } \xi-st\leqslant\dfrac{-\sqrt{2}\,\pi\varepsilon h}{2\sqrt{\gamma+1}}, & \\ V^+, \quad \text{当 } \xi-st\geqslant\dfrac{\sqrt{2}\,\pi\varepsilon h}{2\sqrt{\gamma+1}}. & \end{cases}$$

由此可见，从 V^- 到 V^+ 的过渡区宽度是

$$\Delta\omega = \Delta\xi = \frac{\sqrt{2}\,\pi\varepsilon h}{2\sqrt{\gamma+1}}.$$

上式中 h 前的系数表示间断被抹平的网格数． 若 $\gamma = 1.4$，$\varepsilon = 1.5 \sim 2$，则激波宽度是 3—4 个网格，这是尚可接受的．

用 x，u，e，p 分别表示，X，U，E 和 P 的近似值，q 的近似值仍用 q 来表示，则得到计算 (7.72) 的下列格式

$$\begin{cases} \dfrac{x_i^{k+1} - x_i^k}{\tau} = u_i^{k+1}, \\ \dfrac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} + v_0 \dfrac{p_{i+\frac12}^k + q_{i+\frac12}^k - p_{i+\frac12}^k - q_{i+\frac12}^k}{h} = 0, \\ e_{i+\frac12}^{k+1} - e_{i+\frac12}^k + \left(\dfrac{p_{i+\frac12}^{k+1} + p_{i+\frac12}^k}{2} + q_{i+\frac12}^{k+1} \right) \left(v_{i+\frac12}^{k+1} - v_{i+\frac12}^k \right) \\ \qquad = 0, \\ v_{i+\frac12}^{k+1} = v_0 \dfrac{x_{i+1}^{k+1} - x_i^{k+1}}{h}, \\ p_{i+\frac12}^{k+1} = f\left(e_{i+\frac12}^{k+1},\ v_{i+\frac12}^{k+1}\right), \\ q_{i+\frac12}^k = \begin{cases} \dfrac{2\varepsilon^2}{v_{i+\frac12}^k + v_{i+\frac12}^{k+1}} (u_{i+1}^k - u_i^k)^2, & \text{当 } u_{i+1}^k - u_i^k < 0, \\ 0, & \text{当 } u_{i+1}^k - u_i^k \geqslant 0. \end{cases} \end{cases} \tag{7.76}$$

Самарский, Арсенин (1961) 提出了更一般的粘性项

$$q = -\frac{\varepsilon}{2} \left| \frac{\partial U}{\partial \xi} \right|^{\beta} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - d \left| \frac{\partial U}{\partial \xi} \right| \right),$$

其中 $0 \leqslant \beta \leqslant 1$，$0 \leqslant d \leqslant 1$．当 $\beta = 0$ 时它是线性粘性项． 当 $\beta = 1$，$d = 1$ 时，它类似于 Von Neumann-Richtmyer 的粘性项．Landshoff 曾建议采用

$$q = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon^2 h^2}{V} \left(\dfrac{\partial U}{\partial \xi} \right)^2 + \dfrac{dah}{V} \left| \dfrac{\partial U}{\partial \xi} \right|, d \approx 1, & \text{若 } \dfrac{\partial U}{\partial \xi} < 0, \\ \dfrac{dah}{V} \left| \dfrac{\partial U}{\partial \xi} \right|, & \text{若 } \dfrac{\partial U}{\partial \xi} \geqslant 0. \end{cases}$$

Whit (1973) 基于 Hugoniot 条件，采用了与密度梯度有关的粘性

项

$$q=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon^2h^2}{V}\left|\dfrac{\partial U}{\partial\xi}\right|\left|\dfrac{\partial P}{\partial\xi}\dfrac{\partial V}{\partial\xi}\right|^{\frac{1}{2}}, & \text{当 } \dfrac{\partial U}{\partial\xi}<0,\\ 0, & \text{当 } \dfrac{\partial U}{\partial\xi}\geqslant 0.\end{cases}$$

有关的工作还可见 Lapidus (1967). Harlow, Amsden (1971, 1974) 等还引入了人工热传导项和人工扩散项.此外，Boris, Book (1973) 提出了一种流校正输运算法，即对利用人工粘性项算出的解再作一次反扩散处理，从而获得较好的数值结果.

7.10 人工压缩法

为了防止接触间断的铺宽和激波过渡区的压缩，Harten (1974, 1977, 1978) 提出了人工压缩法，其主要点是不直接计算 (7.1)，而计算下列方程组（其中假设 $n=1$）

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\bar U}{\partial t}+\dfrac{\partial\bar F}{\partial x}(\bar U,t)=0, & -\infty<x<\infty,\ t>0,\\ \bar U(x,0)=U_0(x), & -\infty<x<\infty,\end{cases}\tag{7.77}$$

其中 $\bar F(\bar U,t)=F(\bar U)+G(\bar U,t)$, $G(\bar U,t)$ 被称为人工压缩流量，它满足下列条件

$$\begin{cases}G(\bar U,t)\operatorname{sign}(\bar U^+-\bar U^-)>0, & \text{当 } \bar U \text{是 } \bar U^+,\ \bar U^- \text{ 间值},\\ G(\bar U,t)=0, & \text{否则}.\end{cases}$$

假设 (7.1) 有激波或接触间断，它的速度是 s，当它通过间断时，U 值从 U^- 跳到 U^+，并在 t 时刻，$U(x,t)$ 不取 U^- 和 U^+ 之间的值. 可以证明，(7.1) 的解仍为 (7.77) 的间断解. 事实上，因为 U 不取 U^- 和 U^+ 之间的值，故 $\bar F(U,t)=F(U)$，即流量是相同的.

又由定义可知 $G(U^-,t)=G(U^+,t)=0$，所以

$$\begin{aligned}\bar F(U^+,t)-\bar F(U^-,t)&=F(U^+)-F(U^-)\\&=s(U^+-U^-),\end{aligned}$$

从而它对 (7.77) 也满足 Hugoniot 条件，并且间断的传播速度也

相同.

最后令 $\bar{\phi}(U) = \bar{F}(U) - sU$, 则对 U^- 和 U^+ 间的一切值 z, 有

$$
\begin{aligned}
&(\bar{\phi}(z) - \bar{\phi}(U^-))\operatorname{sign}(U^+ - U^-) \\
&\quad = (\phi(z) - \phi(U^-))\operatorname{sign}(U^+ - U^-) \\
&\qquad + G(z, t)\operatorname{sign}(U^+ - U^-) > 0,
\end{aligned}
$$

因此对 (7.77) 也满足激波的熵条件.

虽然, (7.1) 与 (7.77) 具有相同的解, 但它的数值解则不相同. 例如当采用例 7.4 中的人工粘性法计算时, 数值解的间断过渡区宽度为

$$
\xi(U^+) - \xi(U^-) = \varepsilon \int_{U^-}^{U^+} \frac{B(\bar{U})d\bar{U}}{\bar{\phi}(\bar{U}) - \bar{\phi}(U^-)},
$$

由于被积函数的分母增大了,所以过渡区的宽度也随之减小.

例7.6 设 $n = 1$, 计算 (7.1) 的一个格式为

$$
u_j^{k+1} = \frac{1}{2} u_{j+1}^k + \frac{1}{2} u_{j-1}^k - \frac{r}{2}(F_{j+1}^k - F_{j-1}^k)
$$

$$
- \frac{\alpha r}{2}(G_{j+1}^k - G_{j-1}^k),
$$

其中 α 是正参数,

$$
G(z) = \begin{cases} \dfrac{(z - U^-)(U^+ - z)}{U^+ - U^-}, & \text{当 } z \text{ 在 } U^-, U^+ \text{ 之间}, \\[2ex] 0, & \text{否则}. \end{cases}
$$

在实际计算中,往往分两步进行. 如果 u_j^k 已经得到,那末先用通常的方法,计算 (7.1) 在时刻 t_{k+1} 的近似解, 记为 $u_j^{k+\frac{1}{2}}$, 然后再求下列问题在 t_{k+1} 时刻的近似解

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} + \dfrac{\partial G(U)}{\partial x} = 0, & -\infty < x < \infty, t > t_k, \\[2ex] U(x, t_k) = \bar{u}(x, t_{k+\frac{1}{2}}) & -\infty < x < \infty, \end{cases}
$$

其中 $\bar{u}(x_j, t_{k+\frac{1}{2}}) = u_j^{k+\frac{1}{2}}$.

人工压缩法只适用于间断的过渡区域, 所以具体应用时还要

结合混合开关方法.

7.11 特征型格式和隐式格式

特征线方法的出发点是将 (7.1) 化为特征形式，并沿着特征线建立相应的差分格式，而在间断处，则应用间断条件来处理. Жуков (1960) 最早成功地把特征线方法应用于空气动力学方程组的间断解问题.

近年来，人们又提出了各种新的特征型格式. 当 $\lambda_l(A)$ 不变号时， Warming, Beam (1976) 提出了一种二阶逼近精度的逆风格式. 例如若所有的 $\lambda_l(A)\geqslant 0$，则

$$\begin{cases} u_j^{k+\frac{1}{2}}=u_j^k-r(F_j^k-F_{j-1}^k), \\ u_j^{k+1}=\dfrac{1}{2}(u_j^k+u_j^{k+\frac{1}{2}})-\dfrac{r}{2}(F_j^{k+\frac{1}{2}}-F_{j-1}^{k+\frac{1}{2}}) \\ \qquad -\dfrac{r}{2}(F_j^k-2F_{j-1}^k+F_{j-2}^k). \end{cases}$$

这个格式的稳定性条件是 $r|\lambda_l(A)|_{max}\leqslant 2$.

对于 $\lambda_l(A)$ 变号的情况，朱幼兰，钟锡昌，陈炳木，张作民(1980) 采用了另一种二阶逼近精度的差分格式. 例如考虑下列问题

$$\frac{\partial U}{\partial t}+A\frac{\partial U}{\partial x}=0,$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

那末，

$$u_{l,j}^{k+\frac{1}{2}}=\begin{cases}\left(1-\dfrac{r|\lambda_{l,j}^k|}{2}\right)u_{l,j}^k+\dfrac{r|\lambda_{l,j}^k|}{2}u_{l,j-1}^k, & 若\ \lambda_{l,j}^k\geqslant 0, \\ \left(1-\dfrac{r|\lambda_{l,j}^k|}{2}\right)u_{l,j}^k+\dfrac{r|\lambda_{l,j}^k|}{2}u_{l,j+1}^k, & 若\ \lambda_{l,j}^k<0,\end{cases}$$

$$u_{l,j}^{k+1}=(1-B_{l,j}^k)\Big[u_{l,j+1}^k-\Big(\frac{r}{2}\lambda_{l,j}^{k+\frac{1}{2}}+\frac{r}{2}\lambda_{l,j+1}^{k+\frac{1}{2}}+1\Big)$$

$$\times(u_{l,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - u_{l,j}^{k+\frac{1}{2}})\Big] + B_{l,j}^{k}\Big[u_{l,j-1}^{k} - \left(\frac{r}{2}\lambda_{l,j}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{r}{2}\lambda_{l,j-1}^{k+\frac{1}{2}} - 1\right)$$

$$\times(u_{l,j}^{k+\frac{1}{2}} - u_{l,j-1}^{k+\frac{1}{2}})\Big],$$

其中 $0 \leqslant B_{l,j}^{k} \leqslant 1$。

不过，计算结果表明，应用上述两个格式计算时，通常会把激波或切向间断抹平，或者在间断附近出现振荡或过头现象。

Steger, Warming (1981) 基于特征概念提出了矢量分裂法。粗略地说，即把 A 写成 $A = A_+ + A_-$，其中 A_+（或 A_-）的全部特征值非负（或非正），然后对相应的 $\frac{\partial F_+}{\partial x}\left(\text{或} \frac{\partial F_-}{\partial x}\right)$ 采用向后（或向前）差商来逼近，这样得到的格式比较稳定。当然，A 的分裂方法不是唯一的，为了获得较好的结果，一般附加一些条件，详见 Van Leer (1982)。此外，Roe (1980) 所提出的通量差分分裂法也是基于特征的概念。

前面所介绍的方法的差分格式都是显式的，它们便于计算，但对 r 的限制一般太严格.因此，近年来又提出了许多隐式格式，例如

$$u_j^{k+1} = u_j^k - \frac{\alpha r}{2}(F_{j+1}^k - F_{j-1}^k) - \frac{r(1-\alpha)}{2}(F_{j+1}^{k+1} - F_{j-1}^{k+1}), \tag{7.78}$$

其中 $0 \leqslant \alpha < 1$。近年，Harten, Tal-Ezer(1981) 把 $\alpha = \frac{1}{2}$ 的 (7.78) 修正为

$$\left(1 + \frac{\delta^2}{6}\right)u_j^{k+1} + \frac{r}{2}\mu\delta F_j^{k+1} = \left(1 + \frac{\delta^2}{6}\right)u_j^k - \frac{r}{2}\mu\delta F_j^k,$$

其中 δ 和 μ 的定义见 § 7.6. 这个格式具有四阶逼近精度，且无条件稳定。但在具体计算时需要求解非线性代数方程组. 通常先对它作线性近似处理，然后再具体计算.

另一类格式是 Box 格式，例如

$$\frac{1}{2}(u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}) + \frac{r}{2}(F_j^{k+1} - F_{j-1}^{k+1})$$

$$= \frac{1}{2}(u_i^k + u_{i-1}^k) - \frac{\nu}{2}(F_i^k - F_{i-1}^k).$$

朱幼兰,钟锡昌,陈炳木,张作民 (1980) 也构造了另一些隐式格式.

7.12 质点法和涡团法

如前所述，可分别用 Lagrange 坐标和 Euler 坐标表达流体力学方程组. 前者的守恒律表达形式比较简单，亦便于表达多种介质并存的运动. Kolsky (1955) 关于二维流动的最早计算就是从 Lagrange 坐标开始的. 但当运动中有大变形时，介质元的相对位置可以有很大的,甚至拓扑性质的变化,此时就难以处理. 一般采用重分网格,三角形网格等方法来克服它，例如可见 Browne (1966), Growley (1970) 和 Fritts, Boris (1979) 等工作. Euler 坐标所表达的守恒律比较复杂,但不受变形大小的影响,故可计算大变形问题,例如 *FLIC* 方法(见 Gentry, Martin, Daly (1966)). 质点法是把流体看作连续介质的模型退回到离散粒子模型的结果,即把质点的运动视为粒子与相应的自洽场交互作用的结果,其中场量提供粒子的驱动力,而粒子运动又影响场量. 在质点法中，对粒子采用 Lagrange 座标,而对场则采用 Euler 座标,从而兼有两者的优点. 这种思想最早出现于四十年代(见 Von Neumann (1963)). Harlow, Evans (1955) 发展了这种思.想六十年代以来则进入实用阶段,例如 Harlow (1964) 关于计算多重介质冲击波的 *PIC* 方法. 又例如计算带有自由表面或内部接触面的不可压缩流体的 *MAC* 方法 (见可 Harlow, Welch (1965), Welch, Harlow, Shannon, Daly (1966), Amdsen, Harlow (1970)) 以及 Amdsen (1966) 关于可压缩流体的计算. 质点法还应用于等离子体方程和电磁场计算 (见 Yu, Kooyers (1965), Hockney (1970)). 关于质点法的理论探讨则还不很多,可见 Dushane (1973), Raviart (1985) 等

下面以电子与正交电场交互作用的二维问题为例来说明这个

方法．用$\tilde{\rho}$表示电子密度，$U=(U_1, U_2)$ 表示速度，$E=(E_1, E_2)$ 表示电场．Φ是电势，B是已知的正交磁场．略去电子运动对磁场的反作用后则得到

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho U)=0,\\
\dfrac{\partial}{\partial t}(\rho U)+\nabla\cdot(\rho U)=-\dfrac{e_0}{m}\rho\left(E+\dfrac{1}{4\pi c}U\times B\right),\\
\Delta\Phi=-4\pi\rho,\\
E=-\nabla\Phi,
\end{cases}
\tag{7.79}
$$

其中c是光速，$\dfrac{e^0}{m}$是电子的电荷质量比．第一个方程表示电荷守恒，第二个方程是运动方程，第三个方程是自洽电场方程．

现在把N个粒子的座标与速度分别记为 $X^{(l)}(t)=(X_1^{(l)}(t), X_2^{(l)}(t))^T$，$U^{(l)}(t)=(U_1^{(l)}(t), U_2^{(l)}(t))^T$，$1\leqslant l\leqslant N$，则把运动方程简化为每个粒子的运动方程

$$
\frac{dX^{(l)}}{dt}=-\frac{e^0}{m}\left(E+\frac{1}{4\pi c}U^{(l)}\times B\right). \tag{7.80}
$$

用h表示网格步长，$Q_h(\xi)$ 表示以网格点 $\xi=(\xi_1, \xi_2)^T$ 为中心，边长为h的正方形．$x^{(l)k}$，$u^{(l)k}$，$e^k(\xi)$，$\varphi^k(\xi)$ 分别表示 $X^{(l)}(t_k)$，$U^{(l)}(t_k)$，$E(\xi, t_k)$ 和 $\Phi(\xi, t_k)$ 的近似值．把 t_k 时刻落在 $Q_h(\xi)$ 内的粒子总数乘以粒子电荷再除以 h^2，即得到 $Q_h(\xi)$ 内的平均电荷密度．把自洽场方程离散化为

$$
\begin{cases}
\Delta_h\varphi^k(\xi)=-4\pi\rho^k(Q_h(\xi)),\\
e_1^k(\xi)=-\varphi_{\xi_1}^k(\xi),\\
e_2^k(\xi)=-\varphi_{\xi_2}^k(\xi),
\end{cases}
\tag{7.81}
$$

而落在 $Q_h(\xi)$ 内粒子的运动方程则离散化为

$$
u_t^{(l)k}=\frac{-e^0}{m}\left(e^k+\frac{1}{4\pi c}u^{(l)}\times B\right),\quad 1\leqslant l\leqslant N, \tag{7.82}
$$

和

$$
X_t^{(l)k}=u^{(l)k}, \qquad 1\leqslant l\leqslant N. \tag{7.83}
$$

在具体计算时，先用统计方法计算 $\rho^k(Q_h(\xi))$，然后用快速

Fourier 方法由 (7.81) 计算 $\varphi^k(\xi)$，接着计算 $\sigma^k(\xi)$，最后由 (7.82)，(7.83) 计算出 $u^{(l)k}$ 和 $x^{(l)k}$。在目前的机器条件下，一般每个 $Q_k(\xi)$ 中取几十个模拟粒子，故每个模拟粒子大约代表 10^6 个真粒子.

关于用混合坐标方法计算的程序安排还可见 Amsden, Hirt (1973)。

涡团法可视为一种基于特征概念的特殊质点法. 用 $H(x,t)$ 表示涡度，$U(x,t)$ 表示速度，并考虑二维无粘流的涡度方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial t} + (U\cdot\nabla)H = 0, & |x| < \infty,\ t > 0, \\ \Delta\Phi + H = 0, & |x| < \infty,\ t \geqslant 0, \\ H(x,0) = H_0(x), & |x| < \infty, \end{cases} \tag{7.84}$$

其中

$$U_1 = \frac{\partial\Phi}{\partial x_2},\quad U_2 = -\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}.$$

记

$$G(x) = -\frac{1}{2\pi}\ln|x|,$$

则

$$\begin{aligned} U_1(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_2}\int G(x-y)H(y,t)dy, \\ U_2(x,t) &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}\int G(x-y)H(y,t)dy. \end{aligned} \tag{7.85}$$

此外，沿着特征方向 $H(x,t)$ 为常数.

Rosenhead (1931) 提出了涡点法，即把 H 的近似值表达为

$$\eta(x,t) = \sum_{l=1}^{N} \eta_l \delta(x - x^{(l)}(t)),$$

其中 δ 是 Dirac 函数，$x^{(l)}(t)$ 表示第 l 个涡点在 t 时刻的位置，相应地有

$$\begin{cases} u_1(x,t) = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\displaystyle\sum_{l=1}^{N}\eta_l G(x - x^{(l)}(t))\right), \\ u_2(x,t) = -\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\displaystyle\sum_{l=1}^{N}\eta_l G(x - x^{(l)}(t))\right). \end{cases}$$

关键是如何计算 $x^{(l)}(t)$。在上式中取 $x=x^{(m)}(t)$，于是得到下列 Hamilton 形式的常微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1^{(m)}}{dt}=\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\sum\limits_{l=1}^{N}\eta_l G(x^{(m)}(t)-x^{(l)}(t))\right),\\ \dfrac{dx_2^{(m)}}{dt}=-\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\sum\limits_{l=1}^{N}\eta_l G(x^{(m)}(t)-x^{(l)}(t))\right).\end{cases} \tag{7.86}$$

Chorin (1973) 和 Kuwahara, Takami (1973) 把涡点法推广为涡团法，即设 γ 是一个具有小支集的函数，并把 H 的近似表达式取为

$$\eta(x,t)=\sum_{l=1}^{N}\eta_l\gamma(x-x^{(l)}(t)),$$

从而可以推出一个与(7.86)相类似的常微分方程组. 关键是如何选取 $\gamma(x)$，例如可取 $\varepsilon>0$，

$$\gamma(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon}, & |x|\leqslant\varepsilon,\\ 0, & |x|>\varepsilon.\end{cases}$$

Chorin (1973) 把这个方法成功地应用于绕流问题. 这个方法的优点是模拟了涡团的相互作用，在计算中没有虚假的数值粘性. 但计算量较大，大致为 $O(N^2)$ 级.

Hald (1979) 和 Beale, Majda (1982a, b) 还证明了涡团法的收敛性. 有关的资料可见 Leonard (1980) 和 Marchioro, Pulvirent (1984) 等.

§8 一阶双曲型方程组的初、边值问题

原则上讲，前两节中的各种格式都可用于初、边值问题，但是必须合理地处理边值条件. 在本节中将介绍四个基本的方法. 我们用能量方法证明满足耗散边界条件的对称线性双曲型方程组的初、边值问题解的存在性，用冻结系数法研究了一般线性双曲型方程初、边值问题的差分方法. 还讨论了守恒型方程初、边值问题的

弱解. 最后以激波反射问题为例, 介绍了不定边界问题和激波分离方法.

8.1 对称线性双曲型方程组, 解的存在性

本节考虑下列对称双曲型方程组

$$\begin{cases} A\dfrac{\partial U}{\partial t} + B\dfrac{\partial U}{\partial x} + CU = 0, & 0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant T, \\ U(x, 0) = U_0(x), & 0 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{8.1}$$

其中 U 是 n 维向量, 其分量为 U_l, $A = A(x, t)$ 是 n 阶对称正定阵, $B = B_1 - B_2$,

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{(p 个 1, $n-p$ 个 0)}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(p 个 0, q 个 1, $n-p-q$ 个 0)}$$

我们假定 A 和 C 具有对 x, t 的二阶连续导数, $U_0(x) \in C^2$. 为方便计, 尚假设在 $x = 0, 1$ 附近的适当小邻域内, $U_0(x) \equiv 0$. 在边界上 $U(x, t)$ 满足下列条件:

$$U_l(0, t) = \sum_{m=p+1}^{p+q} L_{l,m}(0) U_m(0, t), \quad 1 \leqslant l \leqslant p,$$

$$U_l(1,t)=\sum_{m=1}^{p}L_{l,m}(1)U_m(1,t),\ p+1\leqslant l\leqslant p+q,$$
$$(8.2)$$

其中 $L_{l,m}$ 是常数，并满足严格耗散条件，即存在正常数 c_0，使得对一切 $w(x)$，都有

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=1}^{p}\Big(\sum_{m=p+1}^{p+q}L_{l,m}(0)w_m(0)\Big)^2-\sum_{l=p+1}^{p+q}w_l^2(0)\\ \displaystyle\qquad<-c_0\sum_{l=p+1}^{p+q}w_l^2(0),\\ \displaystyle\sum_{l=p+1}^{p+q}\Big(\sum_{m=1}^{p}L_{l,m}(1)w_m(1)\Big)^2-\sum_{l=1}^{p}w_l^2(1)\\ \displaystyle\qquad<-c_0\sum_{l=1}^{p}w_l^2(1),\end{cases}\tag{8.3}$$

或简写为

$$\begin{cases}w^*(0)B_1w(0)-w^*(0)B_2w(0)<-c_0w^*(0)B_2w(0),\\ w^*(1)B_2w(1)-w^*(1)B_1w(1)<-c_0w^*(1)B_1w(1).\end{cases}$$

用 h, τ 分别表示 x, t 方向的步长，

$$r=\frac{\tau}{h},\ x_j=jh,\ t_k=k\tau,\ Jh=1,$$

J 是自然数. $\mathscr{I}_h=\{x\,|\,x=x_j,\ 1\leqslant j\leqslant J-1\}$, $\bar{\mathscr{I}}_h=\{x\,|\,x=x_j,\ 0\leqslant j\leqslant J\}$,

$$(w_1,w_2)=h\sum_{j=1}^{J-1}w^*(x_j)w(x_j),\ \|w\|^2=(w,w).$$

用 $u^k(x)$ 表示 $U(x,t_k)$ 的近似值，则得到下列特征型差分格式

$$\begin{cases}A^k(x)u_t^k(x)+B_1u_{\bar{x}}^k(x)-B_2u_x^k(x)+C^k(x)u^k(x)=0,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x\in\mathscr{I}_h,\ k\geqslant 0,\\ u^0(x)=U_0(x),\qquad\qquad\qquad x\in\bar{\mathscr{I}}_h.\end{cases}\tag{8.4}$$

边界条件用下式逼近，

$$
\begin{cases}
u_l^k(0) = \begin{cases} \sum\limits_{m=p+1}^{p+q} L_{l,m}(0)u_m^k(h), & 1 \leqslant l \leqslant p, \\ u_l^k(h), & p+1 \leqslant l \leqslant n, \end{cases} \\
u_l^k(1) = \begin{cases} u_l^k(1-h), & 1 \leqslant l \leqslant p, p+q+1 \leqslant l \leqslant n, \\ \sum\limits_{m=1}^{p} L_{l,m}(1)u_m^k(1-h), & p+1 \leqslant l \leqslant p+q. \end{cases}
\end{cases}
\tag{8.5}
$$

显然，$u^k(x)$ 满足下列条件

$$
\begin{cases}
u^{k*}(0)B_1u^k(0) - u^{k*}(h)B_2u^k(h) \leqslant 0, & k \geqslant 0, \\
u^{k*}(1)B_2u^k(1) - u^{k*}(1-h)B_1u^k(1-h) \leqslant 0, & k \geqslant 0.
\end{cases}
$$

我们将证明，当 $h \to 0$ 时，(8.4)，(8.5) 的解收敛到 (8.1)，(8.2) 的古典解.

引理 8.1 假设 A 是正定对称阵，D 是非负对称阵，$\rho > 0$，$A - \rho D$ 是非负阵，并且

$$
Aw = (A - \rho D)w_1 + \rho D w_2, \tag{8.6}
$$

那末

$$
w^*Aw \leqslant w_1^*(A - \rho D)w_1 + \rho w_2^* D w_2. \tag{8.7}
$$

证明 设 G 是非退化阵，$w = Gv$，$w_1 = Gv_1$，$w_2 = Gv_2$，则 (8.6) 等价于

$$
G^*AGv = G^*(A - \rho D)Gv_1 + \rho G^*DGv_2. \tag{8.8}
$$

因为 $w^*Aw = v^*G^*AGv$，$w_1^*Aw_1 = v_1^*G^*AGv_1$，$w_1^*Dw_1 = v_1^*G^*DGv_1$，$w_2^*Dw_2 = v_2^*G^*DGv_2$，所以 (8.7) 又等价于

$$
v^*G^*AGv \leqslant v_1^*(G^*AG - \rho G^*DG)v_1 + \rho v_2^*G^*DGv_2 \tag{8.9}
$$

因为 A 和 D 是对称阵，A 是正定的，故可选择 G，使得

$$
G^*AG = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix}, \quad G^*DG = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix},
$$

其中 $a_l > 0$，$d_l \geqslant 0$，并且由 $A - \rho D$ 的非负性可得到

$$
a_l \geqslant a_l - \rho d_l \geqslant 0. \tag{8.10}
$$

在上述变换下，(8.9)，等价于

$$\sum_{l=1}^{n} a_l v_l^2 \leqslant \sum_{l=1}^{n} (a_l - \rho d_l)(v_{1,l})^2 + \rho d_l (v_{2,l})^2. \qquad (8.11)$$

又由(8.8)得到

$$\begin{aligned}
v_l^2 &= \left(\left(1-\rho\frac{d_l}{a_l}\right)v_{1,l} + \rho\frac{d_l}{a_l}v_{2,l}\right)^2 \\
&= \left(1-\rho\frac{d_l}{a_l}\right)(v_{1,l})^2 + \rho\frac{d_l}{a_l}(v_{2,l})^2 \\
&\quad - \rho\frac{d_l}{a_l}\left(1-\rho\frac{d_l}{a_l}\right)(v_{1,l}-v_{2,l})^2 \\
&\leqslant \left(1-\rho\frac{d_l}{a_l}\right)(v_{1,l})^2 + \rho\frac{d_l}{a_l}(v_{2,l})^2,
\end{aligned}$$

并由此推得(8.11)。

引理 8.2 如果A是正定对称阵，并且

$$w = \frac{1}{2}(w_1 + w_2), \quad Av = Aw + \tau f,$$

则

$$v^* A v \leqslant \frac{1}{2} w_1^* A w_1 + \frac{1}{2} w_2^* A w_2 + \tau(v^* A v + f^* A^{-1} f).$$

证明 不难验证

$$\begin{aligned}
w^* A w &= \frac{1}{4} w_1^* A w_1 + \frac{1}{4} w_2^* A w_2 + \frac{1}{2} w_1^* A w_2 \\
&\leqslant \frac{1}{2} w_1^* A w_1 + \frac{1}{2} w_2^* A w_2,
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
v^* A v &= (w^* A + \tau f^*)(w + \tau A^{-1} f) = w^* A w \\
&\quad + 2\tau w^* f + \tau^2 f^* A^{-1} f \leqslant w^* A w + 2\tau w^* A A^{-1} f \\
&\quad + 2\tau^2 f^* A^{-1} f = w^* A w + 2\tau (v^* A)(A^{-1} f) \\
&\leqslant w^* A w + 2\tau (v^* A v)^{\frac{1}{2}} (f^* A^{-1} f)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \frac{1}{2} w_1^* A w_1 + \frac{1}{2} w_2^* A w_2 + \tau(v^* A v + f^* A^{-1} f).
\end{aligned}$$

引理 8.3 如果下列条件满足

(i) A 和 $\bar{A}$ 是正定对称阵，B_1 和 B_2 是非负对称阵，

(ii) $h>0$，$0<\tau<1$，$r=\dfrac{\tau}{h}$，且 $A-2rB_1$ 和 $A-2rB_2$ 非负，

(iii) $\dfrac{1}{\tau}A(v-w)+\dfrac{1}{h}B_1(w-w_1)-\dfrac{1}{h}B_2(w_2-w)=f$，

那末

$$
\begin{aligned}
&\frac{v^*\bar{A}v-w^*Aw}{\tau}+\frac{w^*B_1w-w_1^*B_1w_1}{h}\\
&\quad-\frac{w_2^*B_2w_2-w^*B_2w}{h}\\
&\quad\leqslant v^*\bar{A}v+\frac{2}{\tau}|v^*(A-\bar{A})v|+f^*A^{-1}f.
\end{aligned}
$$

证明 由条件 (iii) 得到

$$
\begin{aligned}
Av&=Aw+rB_1(w_1-w)+rB_2(w_2-w)+\tau f\\
&=\frac{1}{2}Av_1+\frac{1}{2}Av_2+\tau f,
\end{aligned}
\tag{8.12}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
Av_1&=(A-2rB_1)w+2rB_1w_1,\\
Av_2&=(A-2rB_2)w+2rB_2w_2.
\end{aligned}
$$

又由引理 8.1 得到

$$
\begin{aligned}
v_1^*Av_1&\leqslant w^*Aw+2r(w_1^*B_1w_1-w^*B_1w),\\
v_2^*Av_2&\leqslant w^*Aw+2r(w_2^*B_2w_2-w^*B_2w),
\end{aligned}
$$

因此由引理 8.2 得到

$$
\begin{aligned}
v^*\bar{A}v&\leqslant v^*Av+|v^*(\bar{A}-A)v|\\
&\leqslant\frac{1}{2}v_1^*Av_1+\frac{1}{2}v_2^*Av_2+\tau(v^*Av+f^*A^{-1}f)\\
&\quad+|v^*(\bar{A}-A)v|\\
&\leqslant w^*Aw+r(w_1^*B_1w_1-w^*B_1w\\
&\quad+w_2^*B_2w_2-w^*B_2w)+\tau(v^*Av+f^*A^{-1}f)\\
&\quad+|v^*(\bar{A}-A)v|.
\end{aligned}
\tag{8.13}
$$

联立

$$v^* A v \leqslant v^* \bar{A} v + |v^*(\bar{A} - A)v|,$$

即由 (8.13) 得到所证的.

根据上述引理，当 τ 适当小时，(8.4) 的解满足

$$\begin{aligned}
&(u^{k*}(x)A^k(x)u^k(x))_t + (u^{k*}(x)B_1u^k(x))_{\bar{x}} \\
&\quad - (u^{k*}(x)B_2u^k(x))_x \\
&\leqslant u^{k+1,*}(x)A^{k+1}(x)u^{k+1}(x) \\
&\quad + u^{k*}(x)C^{k*}(x)(A^k(x))^{-1}C^k(x)u^k(x) \\
&\quad + \frac{2}{\tau}|u^{k+1,*}(x)(A^{k+1}(x) - A^k(x))u^{k+1}(x)|.
\end{aligned}$$

上式对一切 $x = x_i$ 成立，对 i 求和后就得到

$$\begin{aligned}
&(u^k, A^ku^k)_t + (u^k, B_1u^k)_{\bar{x}} - (u^k, B_2u^k)_x \\
&\quad \leqslant c_1(u^{k+1}, A^{k+1}u^{k+1}) + (C^ku^k, (A^k)^{-1}C^ku^k). \qquad (8.14)
\end{aligned}$$

上式左端的第二、三项分别等于

$$hu^{k*}(1-h)B_1u^k(1-h) - hu^{k*}(0)B_1u^k(0),$$

$$-hu^{k*}(1)B_2u^k(1) + hu^{k*}(h)B_2u^k(h),$$

把它们代入 (8.14)，注意到耗散条件后得到

$$(1 - c_1\tau)(u^{k+1}, A^{k+1}u^{k+1}) \leqslant (1 + c_2\tau)(u^k, A^ku^k),$$

并由此推得，对一切 $k\tau \leqslant T$，都有

$$(u^k, A^ku^k) \leqslant c_3(u^0, A^0u^0). \qquad (8.15)$$

令

$$V^k = \sum_{x \in \bar{J}_h} u^{k*}(x)A^k(x)u^k(x).$$

由边界条件得到

$$hu^{k*}(0)A^k(0)u^k(0) \leqslant c_4(u^k, A^ku^k),$$

$$hu^{k*}(1)A^k(1)u^k(1) \leqslant c_4(u^k, A^ku^k),$$

故有

$$(u^k, A^ku^k) \leqslant V^k \leqslant c_5(u^k, A^ku^k),$$

因此由 (8.15) 得到，当 $k\tau \leqslant T$ 时，$V^k \leqslant c_6V^0$. 又因为 A 是正定对称的，所以 $\|u^k\|^2$ 也一致有界.

下面来估计 $\|u_{\bar{x}}^k\|^2$. 对 (8.4) 求差商后得到

$$A^k(x)u^k_{\bar{t}t}(x) + B_1 u^k_{\bar{t}\bar{x}}(x) - B_2 u^k_{\bar{t}x}(x) = f^k_1(x), \quad (8.16)$$

其中

$$f^k_1(x) = -A^k_{\bar{t}}(x)u^{k+1}_{\bar{t}}(x) - C^{k+1}(x)u^k_{\bar{t}}(x) - C^k_{\bar{t}}(x)u^k(x).$$

显然有

$$((A^{-1})^k f^k_1, f^k_1) \leqslant c_7 + c_8\{(A^k u^k_{\bar{t}}, u^k_{\bar{t}}) + (A^{k+1}u^{k+1}_{\bar{t}}, u^{k+1}_{\bar{t}})\}.$$

由于

$$u^k_{l,\bar{t}}(0) = \begin{cases} \sum_{m=p+1}^{p+q} L_{l,m}(0)u^k_{m,\bar{t}}(h), & 1 \leqslant l \leqslant p, \\ u^k_{l,\bar{t}}(h), & p+1 \leqslant l \leqslant n, \end{cases}$$

和

$$u^k_{l,\bar{t}}(1) = \begin{cases} u^k_{l,\bar{t}}(1-h), & 1 \leqslant l \leqslant p \text{ 和 } p+q+1 \leqslant l \leqslant n, \\ \sum_{m=1}^{p} L_{l,m}(1)u^k_{m,\bar{t}}(1-h), & p+1 \leqslant l \leqslant p+q, \end{cases}$$

故仍满足耗散条件.

可根据原方程 (8.4) 来估计 $(u^0_{\bar{t}}, A^0 u^0_{\bar{t}})$. 由于 $B_1 u^0_{\bar{x}}$ 和 $B_2 u^0_x$ 有界,所以它也是有界的,应用前面的方法,即可证明对一切$k\tau \leqslant T$, $\|u^k_{\bar{t}}\|^2$ 对 h 一致有界. 类似地可证明 $\|u^k_{\bar{t}}\|^2$ 也一致有界.

下面来估计 $\|u^k_{\bar{x}}\|^2$. 因为在边界上, $u^k_{\bar{x}}$ 没有定义, 所以先估计 $\|v^k\|^2$,其中

$$v^k(x) = \sigma(x)u^k_{\bar{x}}(x),$$

$$\sigma(x) = \begin{cases} (x-4h)(1-4h-x), & \text{当此式为正,} \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

对 (8.4) 求差商得到

$$A^k(x)u^k_{\bar{x}t}(x) + B_1 u^k_{\bar{x}\bar{x}}(x) - B_2 u^k_{\bar{x}x}(x) + C^k(x)u^k_{\bar{x}}(x) + A^k_{\bar{x}}(x)u^k_t(x-h) + C^k_{\bar{x}}(x)u^k(x-h) = 0.$$

不难验证

$$v^k_{\bar{x}}(x) = \sigma(x)u^k_{\bar{x}\bar{x}}(x) + \sigma_{\bar{x}}(x)u^k_{\bar{x}}(x-h),$$

$$v^k_x(x) = \sigma(x)u^k_{\bar{x}x}(x) + \sigma_{\bar{x}}(x)u^k_{\bar{x}}(x),$$

所以

$$A^k(x)v_t^k(x) + B_1 v_{\bar{x}}^k(x) - B_2 v_x^k(x) + C^k(x)v^k(x)$$
$$= f_2^k(x),$$

其中

$$f_2^k(x) = -\sigma(x)A_{\bar{x}}^k(x)u_t^k(x-h) - \sigma(x)C_{\bar{x}}^k(x)u^k(x-h)$$
$$+ B_1\sigma_{\bar{x}}(x)u_{\bar{x}}^k(x-h) - B_2\sigma_x(x)u_x^k(x),$$

因为在 $x = 0$，1 附近，$v^k(x) \equiv 0$，所以也满足耗散边界条件，故可仿照前面的方法证明 $\|v^k\|^2$ 一致有界，类似地可证明 $\|v_t^k\|^2$ 也对 h 一致有界。

把(8.4)，(8.5)的解，按通常的方法线性插值为连续函数 $U_h(x,t)$。根据前面的估计，$\|U_h\|^2$，$\|U_{h,t}\|^2$，$\|U_{h,tt}\|^2$，$\|V_h\|^2$ 和 $\|V_{h,t}\|^2$ 都一致有界。由引理5.1，在闭区域 $\bar{Q} = \{(x,t)| 4h \leqslant x \leqslant 1-4h, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 内，$\{U_h(x,t)\}$ 和 $\{U_{h,t}(x,t)\}$ 是一致有界和等度连续的。又由原方程(8.4)，$\{B_1U_{h,\bar{x}} - B_2U_{h,x}\}$ 也是一致有界和等度连续的。故由 Arzela 引理，可从 $\{U_h(x,t)\}$ 中选出一个子列，仍记为 $\{U_h(x,t)\}$，使得在开区域 $\{(x,t)| 0 < x < 1, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 中，有

$$U_h(x,t) \to U(x,t),\quad U_{h,t}(x,t) \to U_1(x,t),$$
$$B_1U_{h,\bar{x}}(x,t) - B_2U_{h,x}(x,t) \to BU_2(x,t).$$

这些极限函数都是连续的，并可仿照§5.1中的方法证明，

$$U_1(x,t) = \frac{\partial U(x,t)}{\partial t},$$
$$BU_2(x,t) = B\frac{\partial U}{\partial x}(x,t). \tag{8.17}$$

今在(8.4)中取极限，即知 $U(x,t)$ 满足(8.1)，并且不难验证 $U(x,0) = U_0(x)$。

最后验证 $U(x,t)$ 满足边界条件(8.2)，根据(8.5)，只要证明函数序列 $\{U_h(x,t)\}$ 的分量 $\{U_{h,l}(x,t)\}$，$1 \leqslant l \leqslant p+q$ 在闭区域 $\{(x,t)|0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 内一致收敛到 $U_l(x,t)$。根据前面的证明已经知道，$h\sum_{x\in \bar{J}_h}|U_h(x,t)|^2$ 和 $h\sum_{x\in \bar{J}_h}|U_{h,t}(x,$

$t)|^2$ 一致有界，所以，若能证明

$$h\sum_{l=1}^{p+q}\sum_{j=0}^{J-1}|U_{kl,x}(x_j,t_k)|^2=h\sum_{l=1}^{p+q}\sum_{j=0}^{J-1}|u_{l,x}^k(x_j)|^2 \quad (8.18)$$

是一致有界的，那末由引理 5.1 和 Arzela 引理即得所证的.

事实上，当 $1\leqslant j\leqslant J-1$ 时，根据原方程 (8.4)，可以用 $u^k(x)$ 和 $u_{\bar{t}}^k(x)$ 来表示 $B_1u_{\bar{x}}^k(x)-B_2u^k(x)$，所以

$$\|B_1u_{\bar{x}}^k-B_2u_x^k\|^2=h\sum_{x\in\mathscr{I}_h}\left(\sum_{l=1}^{p}(u_{l,\bar{x}}^k(x,t))^2\right.$$

$$\left.+\sum_{l=p+1}^{p+q}(u_{l,x}^k(x,t)^2)\right)\leqslant c_9.$$

又由边界条件 (8.5) 知

$$u_{l,x}^k(0)=0,\ \text{当}\ p+1\leqslant l\leqslant p+q\ \text{时},$$

$$u_{l,\bar{x}}^k(1)=0,\ \text{当}\ 1\leqslant l\leqslant p+1\ \text{时},$$

因此 (8.18) 一致有界. 这样就证明了方程 (8.1), (8.2) 至少有一个古典解.

下面来证明唯一性. 假设有两个解 $U^{(1)}$ 和 $U^{(2)}$. 记 $W=U^{(1)}-U^{(2)}$，则有

$$\begin{cases}A\dfrac{\partial W}{\partial t}+B\dfrac{\partial W}{\partial x}+CW=0, & 0<x<1,\ 0<t\leqslant T,\\ W=0, & 0\leqslant x\leqslant 1,\ t=0,\\ W_l=\displaystyle\sum_{m=p+1}^{p+q}L_{l,m}(0)W_m, & x=0,\ 0\leqslant t\leqslant T,\ 1\leqslant l\leqslant p,\\ W_l=\displaystyle\sum_{m=1}^{p}L_{l,m}(1)W_m, & x=1,\ 0\leqslant t\leqslant T,\\ & p+1\leqslant l\leqslant p+q.\end{cases} \quad (8.19)$$

把 (8.19) 的第一式与 W 求内积后得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 W^*AWdx+\int_0^1\frac{\partial W^*}{\partial x}BWdx$$

$$=-\int_0^1 W^*CWdx+\frac{1}{2}\int_0^1 W^*\frac{\partial A}{\partial t}Wdx$$

$$\leqslant c_{10} \int_0^1 W^* A W dx. \tag{8.20}$$

又有

$$\int_0^1 \frac{\partial W^*}{\partial x} B_1 W dx - \int_0^1 \frac{\partial W^*}{\partial x} B_1 W dx$$

$$= \frac{1}{2} W^*(1, t) B_1 W(1, t) - \frac{1}{2} W^*(1, t) B_2 W(1, t)$$

$$- \frac{1}{2} W^*(0, t) B_1 W(0, t)$$

$$+ \frac{1}{2} W^*(0, t) B_1 W(0, t),$$

根据耗散条件上式是非负的，因此由 (8.20) 得到

$$\int_0^1 W^* A W dx \leqslant c_{11} \int_0^t \int_0^1 W^* A W dx d\xi,$$

并由此得到，对一切 t,

$$\int_0^1 W_0^* A W dx = 0.$$

由于 A 是正定的，W 又是古典解，故 $W \equiv 0$.

定理 8.1 若 r 适当小，则当 $h \to 0$ 时，(8.4)，(8.5) 的解一致收敛到 (8.1)，(8.2) 的唯一的古典解.

注记 8.1 可以把定理 8.1 推广到 $L_{l,m}(0)$, $L_{l,m}(1)$ 与 t 有关的情况，但此时要求这些系数对 t 具有二阶连续导数. 也可以把上述结果推广到多维问题，详细可见 Самарский (1971a) 和 Годунов (1979). 有关的工作还可见 Thomée(1961).

可以把对称双曲型方程组理论推广到复值函数 $U(x, t)$ 的情况，并且用非特征型格式来计算它. 例如考虑下列问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = P\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) U, & 0 < x < 1, \ 0 \leqslant t \leqslant T, \\ U(x, 0) = U_0(x), & 0 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{8.21}$$

其中

$$P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) U = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}(A(x)U) + A(x)\frac{\partial U}{\partial x}\right)$$
$$+ B(x) U,$$

$A(x)$ 和 $B(x)$ 是 n 阶矩阵，$A(x)$ 是 Hermite 矩阵，A 与 B 对 x 具有二阶连续导数。又在边界上

$$\begin{cases} L(0)U(0,t)=0, & 0\leqslant t\leqslant T, \\ L(1)U(1,t)=0, & 0\leqslant t\leqslant T, \end{cases} \tag{8.22}$$

其中 $L(0)$ 与 $L(1)$ 分别是 $\mu(0)\times n$ 阶阵和 $\mu(1)\times n$ 阶阵，其秩分别是 $\mu(0)$ 和 $\mu(1)$。

如果存在正常数 c_{12}，使得对一切无限光滑函数 $W(x)$ 都有

$$2\mathrm{Re}\int_0^1 W^* P W dx \leqslant c_{12}\int_0^1 |W|^2 dx,$$

则 Kreiss(1960, 1963) 称 P 是半无界的。他还证明，如果下列条件满足，那末 (8.21), (8.22) 是适定的，

(i) $P\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ 是半无界的，

(ii) $\mu(0)$ 等于 $A(0)$ 的负特征值个数，$\mu(1)$ 等于 $A(1)$ 的正特征值个数，

(iii) 若 $W(x)$ 满足

$$\begin{cases} L(0)W(0)=0, \\ L(1)W(1)=0, \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} W^*(0)A(0)W(0)\geqslant 0, \\ W^*(1)A(1)W(1)\leqslant 0. \end{cases}$$

今用差分算子 P_h 逼近 P，并用下式计算 (8.21)

$$\begin{cases} (I-\alpha\tau P_h)u^{k+1}(x)=(I+\tau(1-\alpha)P_h)u^k(x), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x\in\mathscr{I}_h, \quad k\geqslant 0, \\ u^0(x)=U_0(x), \qquad\qquad x\in\mathscr{I}_h, \end{cases} \tag{8.23}$$

其中 $\dfrac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1$，边界条件是

$$\begin{cases} L(0)u^k(0)=0, & k>0, \\ L(1)u^k(1)=0, & k>0. \end{cases} \tag{8.24}$$

今后用 $\mathscr{N}$ 表示满足条件 (8.24) 的网格函数类。

定理 8.2 如果存在正常数 c_{13}，使得对一切 $w\in\mathscr{N}$ 和充分小的 h 都成立

$$\operatorname{Re}(w,P_hw)\leqslant c_{13}\|w\|^2,$$

那末，当 $\tau<\dfrac{1}{4c_{13}}$ 时，(8.23)，(8.24) 的解由 $U_0(x)$ 所唯一确定，并且对初值按 l^2 范数稳定。

证明 设 $w\in\mathscr{N}$，并考虑下列 $n(J-1)$ 阶非齐次线性代数方程组，

$$(I-\alpha\tau P_h)w(x)=f(x),\quad x\in\mathscr{I}_h. \tag{8.25}$$

由于

$$\begin{aligned}\|f\|^2&=\|(I-\alpha\tau P_h)w\|^2\geqslant\|w\|^2-2\alpha\tau\operatorname{Re}(w,P_hw)\\&\geqslant(1-2\alpha c_{13}\tau)\|w\|^2\geqslant\frac{1}{2}\|w\|^2,\end{aligned}$$

故当 $f(x)\equiv0$ 时，$w(x)=0$，从而 w 由 f 所唯一确定。因为在每一时刻 t_k，可把 (8.23) 改写成 (8.25) 形式，其中 f 只与 u^k 有关，所以可以由 $U_0(x)$ 递推地决定全部 $u^k(x)$ 的值。

下面来证明稳定性。令

$$w^{k+1}(x)=\alpha u^{k+1}(x)+(1-\alpha)u^k(x),$$

则可把 (8.23) 改写成

$$u^{k+1}(x)-u^k(x)=\tau P_hw^{k+1}(x). \tag{8.26}$$

把上式对 w^{k+1} 求内积后得到

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}(w^{k+1},u^{k+1}-u^k)\\&\quad=\tau\operatorname{Re}(w^{k+1},P_hw^{k+1})\leqslant c_{13}\tau\|w^{k+1}\|^2\\&\quad\leqslant c_{13}\tau(\|u^{k+1}\|^2+\|u^k\|^2).\end{aligned} \tag{8.27}$$

因为上式左边等于

$$\begin{aligned}&\alpha\|u^{k+1}\|^2-(2\alpha-1)\operatorname{Re}(u^{k+1},u^k)-(1-\alpha)\|u^k\|^2\\&\quad\geqslant\left(\alpha-\frac{1}{2}(2\alpha-1)\right)\|u^{k+1}\|^2\\&\qquad-\left(1-\alpha+\frac{1}{2}(2\alpha-1)\right)\|u^k\|^2\\&\quad=\frac{1}{2}\|u^{k+1}\|^2-\frac{1}{2}\|u^k\|^2,\end{aligned}$$

所以得到

$$\|u^{k+1}\|^2 - \|u^k\|^2 \leqslant 2c_{13}\tau(\|u^{k+1}\|^2 + \|u^k\|^2),$$

以及

$$\|u^{k+1}\|^2 \leqslant \left(\frac{1 + 2c_{13}\tau}{1 - 2c_{13}\tau}\right)^{k+1} \|u^0\|^2.$$

例 8.2 考虑下列方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = a(x)\dfrac{\partial U}{\partial x}, & 0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant T, \\ U(0, t) = 0, & 0 \leqslant t \leqslant T, \\ U(x, 0) = U_0(x), & 0 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{8.28}$$

其中 $a(x) < 0$ 是满足 Lipschitz 条件的实值函数.

今用下列格式解 (8.28),

$$\begin{cases} \left(1 - \dfrac{\tau}{2} P_h\right) u^{k+1}(x) = \left(1 + \dfrac{\tau}{2} P_h\right) u^k(x), & x \in \mathscr{I}_h,\ k \geqslant 0, \\ u^k(0) = 0, & k \geqslant 1, \\ u^k(1) = u^k(1 - h), & k \geqslant 1, \\ u^0(x) = U_0(x), & x \in \mathscr{I}_h. \end{cases} \tag{8.29}$$

其中

$$P_h u^k(x) = a(x) u_{\hat{x}}^k(x).$$

不难证明对一切网格函数 $w(x)$,

$$|(w, a w_{\hat{x}}) - (w, (aw)_{\hat{x}})| \leqslant c_{14}\|w\|(\|w\|^2 + h w^2(0) + h w^2(1))^{\frac{1}{2}},$$

其中 c_{14} 是 $a(x)$ 的 Lipschitz 常数. 又由 Abel 公式得到

$$(w_{\hat{x}},\ aw) + (w,\ (aw)_{\hat{x}}) = \frac{1}{2}((a(1) + a(1 - h))w(1)w(1 - h) - (a(0) + a(h))w(0)w(h)),$$

因此若令 $\mathscr{N} = \{w / w(0) = 0,\ w(1) = w(1 - h)\}$, 则对任意 $w \in \mathscr{N}$, 都有

$$2\text{Re}(w,\ P_h w) = (P_h w,\ w) + (w,\ P_h w)$$

$$
\begin{aligned}
&-(aw_{\bar{x}},w)+(w,aw_{\bar{x}})\leqslant(aw_{\bar{x}},w)\\
&\quad+(w,(aw)_{\bar{x}})+|(w,(aw)_{\bar{x}})-(w,aw_{\bar{x}})|\\
&\leqslant\frac{1}{2}(a(1)+a(1-h))w^2(1-h)\\
&\quad+2c_{15}\|w\|^2\leqslant 2c_{15}\|w\|^2.
\end{aligned}
\tag{8.30}
$$

因此，根据定理 8.2，当 $\tau<\dfrac{1}{4c_{15}}$ 时，格式(8.29) 是对初值按 l^2 范数稳定的.

8.2 一般线性双曲型方程组的能量方法

朱幼兰(1979,1982)把能量法和冻结系数法相结合，研究了线性双曲型方程组差分格式的稳定性. 为叙述简单，这里只介绍与下列对角型方程组有关的结果，

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial t}+\Lambda(x,t)\dfrac{\partial U}{\partial x}=0, & 0<x<1,\ 0<t\leqslant T,\\
L(0,t)U(0,t)=G_0(t), & 0<t\leqslant T,\\
L(1,t)U(1,t)=G_1(t), & 0<t\leqslant T,\\
U(x,0)=U_0(x), & 0\leqslant x\leqslant 1,
\end{cases}
\tag{8.31}
$$

其中 $U=(U_1,U_2,\cdots,U_n)^*$，$\Lambda(x,t)$是对角阵，

$$
\Lambda(x,t)=\begin{pmatrix}\lambda_1(x,t) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n(x,t)\end{pmatrix},
$$

并且对一切 $0<t\leqslant T$，

$$
\lambda_1(0,t)\geqslant\lambda_2(0,t)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{n-p}(0,t)>0, \tag{8.32}
$$

$$
\lambda_n(1,t)\leqslant\lambda_{n-1}(1,t)\leqslant\cdots\leqslant\lambda_{q+1}(1,t)<0, \tag{8.33}
$$

因此需要求出 $U_l(0,t)(1\leqslant l\leqslant n-p)$ 和 $U_l(1,t)(q+1\leqslant l\leqslant n)$ 的值. 为简单计，不妨假定

$$
L(0,t)=\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & *\\
0 & 1 & \cdots & 0 & * & \cdots & *\\
 & & \cdots & & & \cdots & \\
0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & *
\end{pmatrix},
$$

其中前 $n-p$ 个列，后 p 个列（$\underbrace{\qquad}_{n-p\text{个}}\ \underbrace{\qquad}_{p\text{个}}$）.

$$
L(1, t) = \begin{pmatrix} * \cdots * & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * \cdots * & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \cdots & \\ \underbrace{* \cdots *}_{q\text{个}} & \underbrace{0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1}_{n-q\text{个}} \end{pmatrix},
$$

而 $G_0(t)$ 和 $G_1(t)$ 分别为 $n-p$ 维向量和 $n-q$ 维向量,其分量分别为 $G_{0,l}(t)$ 和 $G_{1,l}(t)$.

又假定 $\lambda_l(x, t)$, $U_0(x)$, $G_0(t)$ 和 $G_1(t)$ 对各变量满足一定的光滑性条件, $U_0(x)$ 还满足 (8.31) 中的第二, 三式, 即它是相容的.

记 $w_j^k = w(x_j, t_k)$, 并定义

$F_0=(1, 2, \cdots, n-p)$, $\bar{F}_0=(n-p+1, n-p+2, \cdots, n)$,

$F_1 = (q+1, \cdots, n)$, $\bar{F}_1 = (1,2, \cdots, q)$,

$$
\delta_0(l) = \begin{cases} 1, & \text{当 } l \in F_0 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } l \in \bar{F}_0 \text{ 时}, \end{cases}
$$

$$
\delta_1(l) = \begin{cases} 1, & \text{当 } l \in F_1 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } l \in \bar{F}_1 \text{ 时}, \end{cases}
$$

$$
F(l) = \{\delta_0(l), \delta_0(l) + 1, \cdots, J - \delta_1(l)\}.
$$

解 (8.31) 的一类格式如下

$$
\begin{cases} \sum_{m=M_1(l,j,k)}^{M_2(l,j,k)} a_{l,j,m}^k u_{l,j+m}^{k+1} = \sum_{m=M_1(l,j,k)}^{M_2(l,j,k)} b_{l,j,m}^k u_{l,j+m}^k, j \in F(l), k \geq 0, \\ L^k(0) u_0^k = G_0^k, \ k > 0, \\ L^k(1) u_J^k = G_1^k, \ k > 0, \\ u_j^0 = U_0(x_j), \quad 0 \leq j \leq J, \end{cases} \tag{8.34}
$$

其中 $M_1(l, j, k) \leq 0$, $M_2(l, j, k) \geq 0$,

$$
0 \leq j + M_1(l, j, k) \leq j + M_2(l, j, k) \leq J,
$$

$a_{l,j,m}^k$ 和 $b_{l,j,m}^k$ 为实数, 它们依赖于 h 和 τ. 当 $h = \tau = 0$ 时, 记

$$
a_{l,j,m}^k = a_{l,j,m}'^k, b_{l,j,m}^k = b_{l,j,m}'^k.
$$

不失一般性,还假定

$$\sum_{m=M_1(l,j,k)}^{M_2(l,j,k)} a_{l,j,m}^{k} - \sum_{m=M_1(l,j,k)}^{M_2(l,j,k)} b_{l,j,m}^{k} = 1.$$

若对一切 $m \neq 0$ 有 $a_{l,j,m}^{k} = 0$，则 (8.34) 是显式格式，否则是隐式格式。若 $M_2(l, j, k) - M_1(l, j, k) \leqslant M - 1$，其中 M 是正整数，则称 (8.34) 是 x 方向 M 点格式。

下面假定 (8.34) 还满足下列条件：

(i) 局部 Von Neumann 条件，即对一切 l，j，k，

$$a_{l,j}^{k*}(\theta)a_{l,j}^{k}(\theta) - b_{l,j}^{k*}(\theta)b_{l,j}^{k}(\theta) \geqslant 0, \tag{8.35}$$

其中

$$a_{l,j}^{k}(\theta) = \sum_{m=M_1(l,j,k)}^{M_2(l,j,k)} a_{l,j,m}^{\prime k} e^{im\theta},$$

$$b_{l,j}^{k}(\theta) = \sum_{m=M_1(l,j,k)}^{M_2(l,j,k)} b_{l,j,m}^{\prime k} e^{im\theta};$$

(ii) 对隐式格式，还存在正常数 c_0，使得

$$a_{l,j}^{k*}(\theta)a_{l,j}^{k}(\theta) \geqslant c_0; \tag{8.36}$$

(iii) 存在正常数 c_1，使得

$$\begin{cases} |a_{l,j+1,m}^{k} - a_{l,j,m}^{k}| \leqslant c_1 h, \\ |a_{l,j,m}^{k+1} - a_{l,j,m}^{k}| \leqslant c_1 \tau, \\ |b_{l,j+1,m}^{k} - b_{l,j,m}^{k}| \leqslant c_1 h, \\ |b_{l,j,m}^{k+1} - b_{l,j,m}^{k}| \leqslant c_1 \tau, \end{cases} \tag{8.37}$$

和

$$\begin{cases} |a_{l,j,m}^{k} - a_{l,j,m}^{\prime k}| \leqslant c_1(h + \tau), \\ |b_{l,j,m}^{k} - b_{l,j,m}^{\prime k}| \leqslant c_1(h + \tau); \end{cases} \tag{8.38}$$

(iv) 存在正常数 c_2，使得

$$\begin{aligned} &\sum_{l \in F_0} |u_{l,0}^{k}|^2 \leqslant c_2 \Big(\sum_{l \in \bar{F}_0} |\lambda_{l,0}^{k}|\,|u_{l,0}^{k}|^2 + |G_0^{k}|^2 \Big), \\ &\sum_{l \in F_1} |u_{l,J}^{k}|^2 \leqslant c_2 \Big(\sum_{l \in \bar{F}_1} |\lambda_{l,J}^{k}|\,|u_{l,J}^{k}|^2 + |G_1^{k}|^2 \Big), \end{aligned} \tag{8.39}$$

其中

$$|G_0^{k}|^2 = \sum_{l=1}^{n-p} |G_{0,l}^{k}|^2,$$

$$|G_1^k|^2 = \sum_{l=1}^{n-q} |G_{1,l}^k|^2.$$

注记 8.2　用 $L_{\alpha,l}(0, t)$ 和 $L_{\alpha,l}(1, t)$ 分别表示 $L(0, t)$ 和 $L(1, t)$ 的第 α 行第 l 列元素，则当 $\alpha \in F_0$ 时，

$$u_{\alpha,0}^k = -\sum_{l \in \bar{F}_0} L_{\alpha,l}^k(0) u_{l,0}^k + G_{0,\alpha}^k.$$

如果存在正常数 c_2'，使得

$$\begin{aligned} |L_{\alpha,l}(0, t)|^2 &\leqslant c_2' |\lambda_l(0, t)|, \quad \alpha \in F_0, \quad l \in \bar{F}_0, \\ |L_{\alpha,l}(1, t)|^2 &\leqslant C_2' |\lambda_l(1, t)|, \quad \alpha \in F_1, \quad l \in \bar{F}_1, \end{aligned} \tag{8.40}$$

则有

$$|u_{\alpha,0}^k|^2 \leqslant (n+1)\left(c_2' \sum_{l \in \bar{F}_0} |\lambda_{l,0}^k| |u_{l,0}^k|^2 + |G_{0,\alpha}^k|^2\right),$$

即满足 (8.39) 的第一式．类似地可推得第二式．

特别，若在边界上 $|\lambda_l| \geqslant \varepsilon > 0$，且 $L(0, t)$ 和 $L(1, t)$ 的元素有界，则一定满足 (8.40)．

注记 8.3　若对一切 l，t，都有

$$\begin{cases} |\lambda_l(0, t)| \geqslant \varepsilon > 0 \text{ 或 } \lambda_l(0, t) \equiv 0, \\ |\lambda_l(1, t)| \geqslant \varepsilon > 0 \text{ 或 } \lambda_l(1, t) \equiv 0, \end{cases} \tag{8.41}$$

且与在边界上恒为零的那些特征值 $\lambda_{n-p+1}(0, t), \cdots, \lambda_q(1, t)$，$\lambda_{q-1}(1, t) \cdots$ 相对应的差分格式是

$$\begin{cases} u_{l,0}^{k+1} = u_{l,0}^k, \quad l = n-p+1, n-p+2, \cdots, \\ u_{l,J}^{k+1} = u_{l,J}^k, \quad l = q, q-1, \cdots, \end{cases} \tag{8.42}$$

那末，可把 (8.34) 的第二式改写为

$$(L^k(0) - L^k(0)H^k(0))u_0^k = G_0^k - L^k(0)H^k(0)u_0^k,$$

其中 $H^k(0)$ 是 n 阶对角阵，其对角线元素除去第 $n-p+1$，$n-p+2, \cdots$ 个为 1 外，其余全部是零，亦即 $L^k(0) - L^k(0)H^k(0)$ 的第 $n-p+1$，$n-p+2, \cdots$ 列为零向量，因此满足 (8.40)，从而得到与 (8.39) 相类似的不等式

$$\sum_{l \in F_0} |u_{l,0}^k|^2 \leqslant c_2' \sum_{l \in \bar{F}_0} |\lambda_{l,0}^k| |u_{l,0}^k|^2 + c_2' |L^k(0)H^k(0)U_0(0) - G_0^k|^2.$$

类似地可得到 $j=J$ 时的不等式。

今定义

$$E_l^k = h\sum_{j\in F(l)}\left(\sum_{m=M_1(l,j,k-1)}^{M_2(l,j,k-1)} a_{l,j,m}^{k-1}u_{l,j+m}^k\right)^2,$$

$$E^k = \sum_{l=1}^n E_l^k + h|L^k(0)u_0^k|^2 + h|L^k(1)u_J^k|^2.$$

在本节中还记

$$\|u_l^k\|^2 = h\sum_{j=0}^J |u_{l,j}^k|^2,\quad \|u^k\|^2 = \sum_{l=1}^n \|u_l^k\|^2.$$

若存在正常数 α_1，使得

$$\|u^k\|^2 \leqslant \alpha_1\|E^k\|, \tag{8.43}$$

则称格式 (8.34) 是良态的。

若存在正常数 α_2、α_3，使得

$$\|u^k\|^2 \leqslant \alpha_2\left(e^{\alpha_3 k\tau}\|u^0\|^2 + \tau\sum_{d=0}^{1}\sum_{\beta=0}^{k} e^{\alpha_3\tau(k-\beta)}|G_d^\beta|^2\right), \tag{8.44}$$

则称格式 (8.34) 是对初、边值稳定的。

为了今后证明方便起见，引入一些记号。首先对任意正常数 c_3，定义

$$\bar{u}_{l,j}^k = \begin{cases} c_3^{j/J}u_{l,j}^k, & \text{当 } l\in F_0\cap\bar{F}_1 \text{ 时},\\ c_3^{(1-j/J)}u_{l,j}^k, & \text{当 } l\in\bar{F}_0\cap F_1 \text{ 时},\\ c_3u_{l,j}^k, & \text{当 } l\in\bar{F}_0\cap\bar{F}_1 \text{ 时},\\ u_{l,j}^k, & \text{当 } l\in F_0\cap F_1 \text{ 时}. \end{cases}$$

相应地引入记号 $\|\bar{u}_l^k\|$ 和 $\|\bar{u}^k\|$。显然有

$$\min(1, c_3^2)\|u^k\|^2 \leqslant \|\bar{u}^k\|^2 \leqslant \max(1, c_3^2)\|u^k\|^2. \tag{8.45}$$

又记

$$\bar{E}_l^k = h\sum_{j\in F(l)}\left(\frac{\bar{u}_{l,j}^k}{u_{l,j}^k}\sum_{m=M_1(l,j,k-1)}^{M_2(l,j,k-1)} a_{l,j,m}^{k-1}u_{l,j+m}^k\right)^2$$

$$= h\sum_{j\in F(l)}\left(\sum_{m=M_1(l,j,k-1)}^{M_2(l,j,k-1)} \bar{a}_{l,j,m}^{k-1}\bar{u}_{l,j+m}^k\right)^2,$$

$$\bar{E}^k = \sum_{l=1}^n \bar{E}_l^k + c_4^2h(|L^k(0)u_0^k|^2 + |L^k(1)u_J^k|^2),$$

其中 c_4 是正常数，

$$\bar{a}_{l,j,m}^{k-1}=\frac{\bar{u}_{l,j}^{k}}{u_{l,j}^{k}}\frac{u_{l,j+m}^{k}}{\bar{u}_{l,j+m}^{k}}a_{l,j,m}^{k-1}=\left(1+O\left(\frac{c_3}{J}\right)\right)a_{l,j,m}^{k-1}.$$

因为M是有限的，所以

$$\bar{a}_{l,j,m}^{k-1}=\left(1+O\left(\frac{c_3}{J}\right)\right)a_{l,j,m}^{k-1}.$$

显然有

$$\min(1,c_3^2,c_4^2)E^k\leqslant\bar{E}^k\leqslant\max(1,c_3^2,c_4^2)E^k. \tag{8.46}$$

根据(8.43)，(8.45)和(8.36)，格式(8.34)为良态的充要条件是可以找到正常数 c_3，c_4 和 $\bar{\alpha}_1$，使得

$$\|\bar{u}^k\|^2\leqslant\bar{\alpha}_1\bar{E}^k. \tag{8.47}$$

下面给出两个基本定理.

定理 8.3 如果当 h 适当小时，对一切 l 和有界的 c_3 有

$$\bar{E}_l^k+c_5h\|\bar{u}_l^k\|^2\geqslant-c_6h\delta_0(l)|\bar{u}_{l,0}^k|^2-c_6h\delta_1(l)|\bar{u}_{l,J}^k|^2+c_7h\sum_{j\in F(l)}|\bar{u}_{l,j}^k|^2, \tag{8.48}$$

其中 c_5，c_6，c_7 是与 c_3 无关的正常数，那末(8.34)是良态的.

证明 把(8.48)对 l 求和就得到

$$\sum_{l=1}^{n}\bar{E}_l^k+c_5h\|\bar{u}^k\|^2\geqslant-c_6h\sum_{l\in F_0}|\bar{u}_{l,0}^k|^2-c_6h\sum_{l\in F_1}|\bar{u}_{l,J}^k|^2+c_7h\sum_{l=1}^{n}\sum_{j\in F(l)}|\bar{u}_{l,j}^k|^2, \tag{8.49}$$

又由(8.34)的第二、三两式得到

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{l\in F_0}|u_{l,0}^k|^2\leqslant c_8\sum_{l\in\bar{F}_0}|u_{l,0}^k|^2+c_8|G_0^k|^2,\\ \displaystyle\sum_{l\in F_1}|u_{l,J}^k|^2\leqslant c_8\sum_{l\in\bar{F}_1}|u_{l,J}^k|^2+c_8|G_1^k|^2,\end{cases}$$

因此

$$\begin{cases}\displaystyle|G_0^k|^2\geqslant\frac{1}{c_8}\sum_{l\in F_0}|\bar{u}_{l,0}^k|^2-\frac{1}{c_3^2}\sum_{l\in\bar{F}_0}|\bar{u}_{l,0}^k|^2,\\ \displaystyle|G_1^k|^2\geqslant\frac{1}{c_8}\sum_{l\in F_1}|\bar{u}_{l,J}^k|^2-\frac{1}{c_3^2}\sum_{l\in\bar{F}_1}|\bar{u}_{l,J}^k|^2.\end{cases}$$

把上式代入 (8.49) 后得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{n} \bar{E}_l^k + c_4^2 h |L^k(0) u_0^k|^2 + c_4^2 h |L^k(1) u_J^k|^2 + c_5 h \|\bar{u}^k\|^2 \\
&\quad \geqslant c_7 h \sum_{l=1}^{n} \sum_{i \in F(l)} |\bar{u}_{l,i}^k|^2 + \left(\frac{c_4^2 h}{c_8} - c_6 h \right) \\
&\quad\quad \times \left(\sum_{l \in F_0} |\bar{u}_{l,0}^k|^2 + \sum_{l \in F_1} |\bar{u}_{l,J}^k|^2 \right) \\
&\quad\quad - \frac{c_4^2 h}{c_3^2} \left(\sum_{l \in F_0} |\bar{u}_{l,0}^k|^2 + \sum_{l \in F_1} |\bar{u}_{l,J}^k|^2 \right).
\end{aligned} \tag{8.50}$$

令 $\frac{c_4^2}{c_8} - c_6 \geqslant \frac{c_7}{2}$，$\frac{c_4^2}{c_3^2} \leqslant \frac{c_7}{2}$，则由上式得到

$$\bar{E}^k + c_5 h \|\bar{u}^k\|^2 \geqslant \frac{c_7 h}{2} \|\bar{u}^k\|^2.$$

再取 $\frac{c_7}{4} \geqslant c_5$，$a = \frac{4}{c_7}$，就得到了 (8.47).

定理 8.4 如果当 h 适当小时，对一切 l 和有界的 c_3 都成立 (8.48)，并存在与 c_3 无关的正常数 c_9，c_{10} 和 c_{11}，使得

$$\begin{aligned}
\bar{E}_l^{k+1} - \bar{E}_l^k &\leqslant h[c_9 \delta_0(l) - r c_{10} |\lambda_{l,0}^k| (1 - \delta_0(l))] |\bar{u}_{l,0}^k|^2 \\
&\quad + h[c_9 \delta_1(l) - r c_{10} |\lambda_{l,J}^k| (1 - \delta_1(l))] |\bar{u}_{l,J}^k|^2 \\
&\quad + c_{11} h \|\bar{u}_l^k\|^2,
\end{aligned} \tag{8.51}$$

那末，只要 (8.39) 成立，格式 (8.34) 就是对初、边值稳定的.

证明 由 (8.51) 得到

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n} \bar{E}_l^{k+1} - \sum_{l=1}^{n} \bar{E}_l^k &\leqslant c_9 h \sum_{l \in F_0} |\bar{u}_{l,0}^k|^2 + c_9 h \sum_{l \in F_1} |\bar{u}_{l,J}^k|^2 \\
&\quad - r c_{10} h \left(\sum_{l \in F_0} |\lambda_{l,0}^k| |\bar{u}_{l,0}^k|^2 + \sum_{l \in F_1} |\lambda_{l,J}^k| |\bar{u}_{l,J}^k|^2 \right) \\
&\quad + c_{11} h \|\bar{u}^k\|^2.
\end{aligned}$$

因为当 $l \in F_0$ 时，$\bar{u}_{l,0}^k = u_{l,0}^k$，当 $l \in F_1$ 时，$\bar{u}_{l,J}^k = u_{l,J}^k$，所以由 (8.34) 的第二、三式得到

$$\begin{aligned}
\bar{E}^{k+1} - \bar{E}^k &\leqslant c_9 h \left(\sum_{l \in F_0} |u_{l,0}^k|^2 + \sum_{l \in F_1} |u_{l,J}^k|^2 \right) \\
&\quad - r h c_{10} c_3^2 \left(\sum_{l \in F_0} |\lambda_{l,0}^k| |u_{l,0}^k|^2 + \sum_{l \in F_1} |\lambda_{l,J}^k| |u_{l,J}^k|^2 \right)
\end{aligned}$$

$$+hc_4^2(|G_0^{k+1}|^2-|G_0^k|^2+|G_1^{k+1}|^2-|G_1^k|^2)$$
$$+c_{11}h\|\bar{u}^k\|^2. \tag{8.52}$$

又由 (8.39) 得到

$$\begin{cases} c_2c_9h|G_0^k|^2 \geqslant c_9h\sum\limits_{l\in F_0}|u_{l,0}^k|^2-c_2c_9h\sum\limits_{l\in F_0}|\lambda_{l,0}^k||u_{l,0}^k|^2, \\ c_2c_9h|G_1^k|^2 \geqslant c_9h\sum\limits_{l\in F_1}|u_{l,J}^k|^2-c_2c_9h\sum\limits_{l\in F_1}|\lambda_{l,J}^k||u_{l,J}^k|^2. \end{cases}$$

今取 $c_3^2 \geqslant \frac{c_2c_9}{c_{10}\tau}$，则由 (8.52) 得到

$$\bar{E}^{k+1}-\bar{E}^k \leqslant c_2c_9h(|G_0^k|^2+|G_1^k|^2)+hc_4^2(|G_0^{k+1}|^2-|G_0^k|^2$$
$$+|G_1^{k+1}|^2-|G_1^k|^2)+c_{11}h\|\bar{u}^k\|^2.$$

又由定理 8.3，存在 $\alpha_4>0$，使得

$$\bar{E}^{k+1}\leqslant(1+\alpha_4\tau)\bar{E}^k+h\sum_{d=0}^{1}\{c_2c_9|G_d^k|^2$$
$$+c_4^2(|G_d^{k+1}|^2-|G_d^k|^2)\}.$$

依此递推下去即得到

$$\bar{E}^{k+1}\leqslant(1+\alpha_4\tau)^k\bar{E}^1+c_2c_9h\sum_{d=0}^{1}\sum_{\beta=0}^{k-1}(1+\alpha_4\tau)^\beta|G_d^{k-\beta}|^2$$
$$+c_4^2h\sum_{d=0}^{1}\sum_{\beta=0}^{k-1}(1+\alpha_4\tau)^\beta(|G_d^{k-\beta+1}|^2-|G_d^{k-\beta}|^2)$$
$$\leqslant e^{\alpha_4\tau k}\bar{E}^1+c_2c_9h\sum_{d=0}^{1}\sum_{\beta=0}^{k-1}(1+\alpha_4\tau)^\beta|G_d^{k-\beta}|^2$$
$$+c_4^2h\sum_{d=0}^{1}\Big\{|G_d^{k+1}|^2+\alpha_4\tau\sum_{\beta=0}^{k-2}(1+\alpha_4\tau)^\beta|G_d^{k-\beta}|^2$$
$$-(1+\alpha_4\tau)^{k-1}|G_d^1|^2\Big\}\leqslant e^{\alpha_4\tau k}\bar{E}^1+h\max(c_2c_9,c_4^2)$$
$$\times\sum_{d=0}^{1}\sum_{\beta=1}^{k+1}(1+\alpha_4\tau)^{k-\beta+1}|G_d^\beta|^2.$$

取 $c_{12}=\frac{1}{\tau}\max(c_2c_9,c_4^2)$，则由上式推得

$$\bar{E}^{k+1}\leqslant e^{\alpha_4\tau k}\bar{E}^1+c_{12}\tau\sum_{d=0}^{1}\sum_{\beta=1}^{k+1}e^{\alpha_4\tau(k-\beta+1)}|G_d^\beta|^2. \tag{8.53}$$

又由定理 8.3 得到

$$\|u^{k+1}\|^2 \leqslant \frac{\|\bar{u}^{k+1}\|^2}{\min(1, c_3^2)} \leqslant \frac{\alpha_1 \bar{E}^{k+1}}{\min(1, c_3^2)},$$

以及

$$\bar{E}^1 \leqslant \max(1, c_3^2, c_4^2) E^1 \leqslant c_{13} \max(1, c_3^2, c_4^2) \|u^0\|^2,$$

这里 c_{13} 为一正常数，故可由 (8.53) 推得 (8.44).

注记 8.4 格式 (8.34) 可改写为

$$\sum_{m=M_1(l,j,k)}^{M_2(l,j,k)} \bar{a}_{l,j,m}^k \bar{u}_{l,j+m}^{k+1} = \sum_{m=M_1(l,j,k)}^{M_2(l,j,k)} \bar{b}_{l,j,m}^k \bar{u}_{l,j+m}^k,$$

其中

$$\frac{\bar{a}_{l,j,m}^k}{a_{l,j,m}^k} = \frac{\bar{b}_{l,j,m}^k}{b_{l,j,m}^k} = \frac{\bar{u}_{l,j}^k}{u_{l,j}^k} \times \frac{u_{l,j+m}^{k+1}}{\bar{u}_{l,j+m}^{k+1}}$$

$$= \frac{\bar{u}_{l,j}^k}{u_{l,j}^k} \times \frac{u_{l,j+m}^k}{\bar{u}_{l,j+m}^k},$$

并且

$$\left| \frac{\bar{u}_{l,j}^k}{u_{l,j}^k} \times \frac{u_{l,j+m}^k}{\bar{u}_{l,j+m}^k} - 1 \right| = O(h),$$

因此

$$\bar{E}_l^{k+1} = h \sum_{j \in F(l)} \left(\sum_{m=M_1(l,j,k)}^{M_2(l,j,k)} \bar{a}_{l,j,m}^k \bar{u}_{l,j+m}^{k+1} \right)^2$$

$$= h \sum_{j \in F(l)} \left(\sum_{m=M_1(l,j,k)}^{M_2(l,j,k)} \bar{b}_{l,j,m}^k \bar{u}_{l,j+m}^k \right)^2$$

记

$$A_{l,j}^k = (a'^k_{l,j,M_1(l,j,k)}, \cdots, a'^k_{l,j,M_2(l,j,k)}),$$
$$B_{l,j}^k = (b'^k_{l,j,M_1(l,j,k)}, \cdots, b'^k_{l,j,M_2(l,j,k)}),$$

则有

$$\bar{E}_l^{k+1} = h \sum_{j \in F(l)} (\bar{u}^* B^* B \bar{u})_{l,j}^k + O(h) \|\bar{u}_l^k\|^2, \tag{8.54}$$

$$\bar{E}_l^k = h \sum_{j \in F(l)} (\bar{u}^* A^* A \bar{u})_{l,j}^k + O(h) \|\bar{u}_l^k\|^2, \tag{8.55}$$

其中

$$(\bar{u}^* Z \bar{u})^k_{l,j} = \sum_{\alpha=1}^{M_2-M_1+1} \sum_{\beta=1}^{M_2-M_1+1} (Z^k_{l,j})_{\alpha\beta}$$

$$\times \bar{u}^k_{l,j+M_1-1+\alpha} \bar{u}^k_{l,j+M_1-1+\beta},$$

$(Z^k_{l,j})_{\alpha\beta}$ 表示矩阵 $Z^k_{l,j}$ 的第 α 行第 β 列元素。

根据定理 8.3 和 8.4，为了证明格式 (8.34) 是良态的和稳定的，只要对每一个 l 证明 (8.39)，(8.48) 和 (8.51) 成立。由注记 8.4，又把问题归结为对 $a^{l,k}_{l,j,m}$ 和 $b^{l,k}_{l,j,m}$ 及其所组成的矩阵的性质的研究。下面先证明两个引理。

引理 8.4 设

$$D_s = (d_{s,M_1}, \cdots, d_{s,M_2}),$$

$$d_s(\theta) = \sum_{m=M_1}^{M_2} d_{s,m} e^{im\theta}.$$

$M_3(s) = 0$ 或 1，那末当

$$\sum_s (-1)^{M_3(s)} d_s^*(\theta) d_s(\theta) = 0$$

时，矩阵

$$Q = \sum_s (-1)^{M_3(s)} D_s^* D_s$$

的每条对角线上的元素的和为零，即为准零矩阵。

证明 由条件得到

$$\sum_s (-1)^{M_3(s)} \left(\sum_{m=M_1}^{M_2} d_{s,m} e^{im\theta} \right)^* \left(\sum_{m=M_1}^{M_2} d_{s,m} e^{im\theta} \right)$$

$$= \sum_s (-1)^{M_3(s)} \sum_{m=M_1-M_2}^{M_2-M_1} \left(\sum_\alpha d^*_{s,\alpha} d_{s,\alpha+m} \right) e^{im\theta}$$

$$= \sum_{m=M_1-M_2}^{M_2-M_1} \left(\sum_s (-1)^{M_3(s)} \sum_\alpha d^*_{s,\alpha} d_{s,\alpha+m} \right) e^{im\theta} = 0,$$

其中对 α 的求和是对一切满足 $M_1 \leqslant \alpha \leqslant M_2$，$M_1 \leqslant \alpha+m \leqslant M_2$ 的 α 进行的，因此

$$\sum_s (-1)^{M_3(s)} \sum_\alpha d^*_{s,\alpha} d_{s,\alpha+m} = 0.$$

另一方面

$$Q = \sum_{s} (-1)^{M_3(s)} \begin{pmatrix} d^*_{s,M_1} d_{s,M_1} & d^*_{s,M_1} d_{s,M_1+1} & \cdots d^*_{s,M_1} d_{s,M_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \quad \cdots \\ d^*_{s,M_2} d_{s,M_1} & \cdots & \cdots d^*_{s,M_2} d_{s,M_2} \end{pmatrix},$$

其第 m 条对角线上元素的和恰为

$$\sum_{s} (-1)^{M_3(s)} \sum_{a} d^*_{s,a} d_{s,a+m},$$

这里，当 $m > 0$ 时表示上对角线，当 $m < 0$ 时表示下对角线，于是引理得证.

引理 8.5 若

$$d_1^*(\theta) d_1(\theta) - d_2^*(\theta) d_2(\theta) \geqslant 0,$$

则矩阵 $D_1^* D_1 - D_2^* D_2$ 可以表示为一个非负矩阵 Z 和准零矩阵 Q 的和.

证明 由 Fejer-Riesz 定理，存在 $d_3(\theta)$，使得

$$d_1^*(\theta) d_1(\theta) - d_2^*(\theta) d_2(\theta) = d_3^*(\theta) d_3(\theta).$$

由引理 8.4，$Q = D_1^* D_1 - D_2^* D_2 - D_3^* D_3$ 是准零矩阵，其中

$$D_j = (d_{j,M_1}, \cdots, d_{j,M_2}),\quad j = 1, 2, 3.$$

显然 $D_3^* D_3$ 是非负矩阵.

命题 8.1 对于 x 方向 M 点格式，可以有表达式

$$a^{k*}_{l,j}(\theta) a^{k}_{l,j}(\theta) = 1 + \sum_{m=1}^{M-1} a''^{k}_{l,j,m} \sin^{2m} \frac{\theta}{2}, \tag{8.56}$$

$$b^{k*}_{l,j}(\theta) b^{k}_{l,j}(\theta) = 1 + \sum_{m=1}^{M-1} b''^{k}_{l,j,m} \sin^{2m} \frac{\theta}{2}, \tag{8.57}$$

其中 $a''^{k}_{l,j,m}$ 和 $b''^{k}_{l,j,m}$ 是常数，从而 (8.35) 等价于

$$\sum_{m=1}^{M-1} c^{k}_{l,j,m} \sin^{2m} \frac{\theta}{2} \geqslant 0,$$

其中

$$c^{k}_{l,j,m} = a''^{k}_{l,j,m} - b''^{k}_{l,j,m}.$$

证明 我们有

$$a^{k*}_{l,j}(\theta) a^{k}_{l,j}(\theta) = \sum_{m=M_1}^{M_2} \sum_{m_1=M_1}^{M_2} a'^{k}_{l,j,m} a'^{k}_{l,j,m_1} e^{I(m_1-m)\theta}$$

$$= \sum_{m_1=-M+1}^{M-1} \sum_{M_1 \leqslant m, m+m_1 \leqslant M_2} a'^{k}_{l,j;m} a'^{k}_{l,j;m+m_1} e^{im_1\theta}$$

$$= \sum_{m=M_1}^{M_2} (a'^{k}_{l,j;m})^2 + 2\sum_{m_1=1}^{M-1} \sum_{M_1 \leqslant m < m+m_1 \leqslant M_2}$$

$$\times\, a'^{k}_{l,j;m} a'^{k}_{l,j;m+m_1} \cos m_1\theta. \tag{8.58}$$

注意到

$$\cos m_1\theta = 1 + \sum_{\alpha=1}^{m_1} d_{m_1,\alpha} \sin^{2\alpha}\frac{\theta}{2},$$

和

$$\sum_{m=M_1}^{M_2} (a'^{k}_{l,j;m})^2 + 2\sum_{m_1=1}^{M-1} \sum_{M_1 \leqslant m < m+m_1 \leqslant M_2} a'^{k}_{l,j;m} a'^{k}_{l,j;m+m_1}$$

$$= \left(\sum_{m=M_1}^{M_2} a'^{k}_{l,j;m}\right)^2 = 1,$$

即由 (8.58) 推出 (8.56). 类似地可证明 (8.57).

下面详细讨论 $M = 2$ 的情况. 此时有

$$A^{k}_{l,j} = (a'^{k}_{l,j;M_1},\ a'^{k}_{l,j;M_1+1}),\quad B^{k}_{l,j} = (b'^{k}_{l,j;M_1},\ b'^{k}_{l,j;M_1+1}),$$

因此

$$a^{k*}_{l,j}(\theta) a^{k}_{l,j}(\theta) = (a'^{k}_{l,j;M_1} + a'^{k}_{l,j;M_1+1} e^{i\theta})^*(a'^{k}_{l,j;M_1} + a'^{k}_{l,j;M_1+1} e^{i\theta})$$

$$= (a'^{k}_{l,j;M_1})^2 + (a'^{k}_{l,j;M_1+1})^2 + 2a'^{k}_{l,j;M_1} a'^{k}_{l,j;M_1+1} \cos\theta$$

$$= (a'^{k}_{l,j;M_1} + a'^{k}_{l,j;M_1+1})^2 - 4a'^{k}_{l,j;M_1} a'^{k}_{l,j;M_1+1} \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$= 1 - 4a'^{k}_{l,j;M_1} a'^{k}_{l,j;M_1+1} \sin^2\frac{\theta}{2}, \tag{8.59}$$

亦即

$$a''^{k}_{l,j;1} = -4a'^{k}_{l,j;M_1} a'^{k}_{l,j;M_1+1},$$

$$b''^{k}_{l,j;1} = -4b'^{k}_{l,j;M_1} b'^{k}_{l,j;M_1+1}.$$

根据上式和命题 8.1, 此时条件 (8.35) 等价于

$$c^{k}_{l,j;1} = 4(b'^{k}_{l,j;M_1} b'^{k}_{l,j;M_1+1} - a'^{k}_{l,j;M_1} a'^{k}_{l,j;M_1+1}) \geqslant 0. \tag{8.60}$$

由于

$$c^{k}_{l,j;1} \sin^2\frac{\theta}{2} = \left[\left(\frac{c^{k}_{l,j;1}}{4}\right)^{\frac{1}{2}} (1 - e^{i\theta})^*\right]$$

$$\times \left[\left(\frac{c^{k}_{l,j\pm 1}}{4} \right)^{\frac{1}{2}} (1 - e^{i\theta}) \right],$$

故可以在引理 8.5 中令

$$D_1 = A^{k}_{l,j}, \quad D_2 = B^{k}_{l,j} \quad D_3 = \left(\frac{c^{k}_{l,j\pm 1}}{4} \right)^{\frac{1}{2}} (1, -1),$$

从而得到

$$A^{k*}_{l,j} A^{k}_{l,j} - B^{k*}_{l,j} B^{k}_{l,j} = Q^{k}_{l,j} + R^{k}_{l,j}, \tag{8.61}$$

其中 $R^{k}_{l,j}$ 是非负矩阵 $D_3^* D_3$，$Q^{k}_{l,j}$ 是准零矩阵，并经计算得到

$$Q^{k}_{l,j} = \begin{pmatrix} r^{k}_{l,j} & 0 \\ 0 & -r^{k}_{l,j} \end{pmatrix},$$

$$r^{k}_{l,j} = (a'^{k}_{l,j,M_1})^2 - (b'^{k}_{l,j,M_1})^2 + a'^{k}_{l,j,M_1} a'^{k}_{l,j,M_1+1} - b'^{k}_{l,j,M_1} b'^{k}_{l,j,M_1+1}.$$

命题 8.2 如果 x 方向两点差分格式 (8.34) 对 (8.31) 的逼近是相容的，并且满足 (8.35) 和 (8.36)，那末

$$\begin{cases} a'^{k}_{l,j,0} \geqslant \dfrac{1}{2} + \varepsilon, & \text{若 } M_1(l,j,k) = 0, \text{ 且 } \lambda^{k}_{l,j} < 0, \\ & \text{或者 } M_1(l,j,k) = -1, \text{ 且 } \lambda^{k}_{l,j} > 0, \\ a'^{k}_{l,j,0} \leqslant \dfrac{1}{2} - \varepsilon, & \text{若 } M_1(l,j,k) = 0, \text{ 且 } \lambda^{k}_{l,j} > 0, \\ & \text{或者 } M_1(l,j,k) = -1, \text{ 且 } \lambda^{k}_{l,j} < 0, \end{cases}$$

其中 $\varepsilon \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{c_0}$.

证明 (8.34) 可改写为

$$a^{k}_{l,j,0} u^{k+1}_{l,j} + a^{k}_{l,j,\pm 1} u^{k+1}_{l,j\pm 1} = b^{k}_{l,j,0} u^{k}_{l,j} \pm b^{k}_{l,j,\pm 1} u^{k}_{l,j\pm 1},$$

其中"+"与"−"号分别对应于 $M_1(l,j,k) = 0$ 和 -1 的情况，因此把光滑解 $U(x,t)$ 代入上式后得到

$$a^{k}_{l,j,0} \left(U_l + \tau \frac{\partial U_l}{\partial t} \right)^k_j + a^{k}_{l,j,\pm 1} \left(U_l + \tau \frac{\partial U_l}{\partial x} \pm h \frac{\partial U_l}{\partial x} \right)^k_j$$
$$= b^{k}_{l,j,0} U^{k}_{l,j} + b^{k}_{l,j,\pm 1} \left(U_l \pm h \frac{\partial U_l}{\partial x} \right)^k_j + O(h^2). \tag{8.62}$$

把 $\dfrac{\partial U_l}{\partial t} = -\lambda_l \dfrac{\partial U_l}{\partial x}$ 代入上式，令 $h \to 0$ 后得到

$$\begin{cases} a'^k_{l,j,0} + a'^k_{l,j,\pm1} = b'^k_{l,j,0} + b'^k_{l,j,\pm1} = 1, \\ -r\lambda^k_{l,j} a'^k_{l,j,0} + a'^k_{l,j,\pm1}(-r\lambda^k_{l,j} \pm 1) = \pm b'^k_{l,j,\pm1}, \end{cases}$$

并由此得到

$$\begin{cases} a'^k_{l,j,\pm1} = 1 - a'^k_{l,j,0}, \\ b'^k_{l,j,0} = a'^k_{l,j,0} \pm r\lambda^k_{l,j}, \\ b'^k_{l,j,\pm1} = 1 - (a'^k_{l,j,0} \pm r\lambda^k_{l,j}), \end{cases} \tag{8.63}$$

代入 (8.60)，即知此时条件 (8.35) 等价于

$$\frac{c^k_{l,j,\pm1}}{4} = (a'^k_{l,j,0} \pm r\lambda^k_{l,j}) - (a'^k_{l,j,0} \pm r\lambda^k_{l,j})^2 - a'^k_{l,j,0}(1 - a'^k_{l,j,0})$$

$$= \pm r\lambda^k_{l,j}(1 - 2a'^k_{l,j,0}) - (r\lambda^k_{l,j})^2 \geqslant 0. \tag{8.64}$$

又根据 (8.59) 知道，此时条件 (8.36) 等价于

$$1 - 4a'^k_{l,j,0}(1 - a'^k_{l,j,0})\sin^2\frac{\theta}{2} \geqslant c_0 > 0. \tag{8.65}$$

令 $\theta = \pi$，由上式得到

$$4(a'^k_{l,j,0})^2 - 4a'^k_{l,j,0} + 1 \geqslant c_0,$$

亦即

$$a'^k_{l,j,0} \leqslant \frac{1}{2} - \varepsilon \quad 或者 \quad a'^k_{l,j,0} \geqslant \frac{1}{2} + \varepsilon. \tag{8.66}$$

若 $M_1(l, j, k) = 0$，$\lambda^k_{l,j} < 0$，为使 (8.64) 成立，必须

$$a'^k_{l,j,0} \geqslant \frac{1}{2}.$$

但为使 (8.66) 同时成立，则必有

$$a'^k_{l,j,0} \geqslant \frac{1}{2} + \varepsilon.$$

类似地可证明其它三个结论.

定理 8.5 如果逼近 (8.31) 的 x 方向的两点格式 (8.34) 是相容的，条件 (8.35)—(8.38) 满足，并且满足条件 (8.40) 或 (8.41) 和 (8.42)，那末它一定是良态和稳定的.

证明 先分三步证明，当 $l \in F_0 \cap \bar{F}_1$ 时，(8.48) 成立.

首先，此时必有 $M_1(l, 1, k) = M_1(l, J, k) = -1$，并且总有

$$a_{l,j,0}'^{k} \geqslant \frac{1}{2} + \varepsilon.$$

事实上，

$$0 \leqslant j + M_1(l, j, k) \leqslant j + M_2(l, j, k) \leqslant J,$$

但是

$$M_2(l, j, k) = M_1(l, j, k) + 1,$$

因此

$$J + M_1(l, J, k) + 1 \leqslant J,$$

所以

$$M_1(l, J, k) = -1.$$

现在用反证法证明 $M_1(l, 1, k) = -1$. 若不然，则存在 $\bar{j}$，使得 $M_1(l, \bar{j}, k) = 0$，而 $M_1(l, \bar{j}+1, k) = -1$，从而

$$a_{l,\bar{j},-1}^{k} = 0,\ a_{l,\bar{j}+1,1}^{k} = 0,$$

故由 (8.37) 得到 $a_{l,\bar{j},1}^{k} = O(h)$，$a_{l,\bar{j}+1,-1}^{k} = O(h)$，并由此得到 $a_{l,\bar{j},0}'^{k} = 1 - O(h)$。从命题 8.2 的证明过程可知，此时条件 (8.36) 归结为

$$a_{l,\bar{j},0}'^{k} \leqslant \frac{1}{2} - \varepsilon \text{ 或 } a_{l,\bar{j},0}'^{k} \geqslant \frac{1}{2} + \varepsilon,$$

由于 $a_{l,j,0}'^{k}$ 对 x 满足 Lipschitz 条件，它的值不会突变，因此或者全部

$$a_{l,j,0}'^{k} \geqslant \frac{1}{2} + \varepsilon,$$

或者全部

$$a_{l,j,0}'^{k} \leqslant \frac{1}{2} - \varepsilon.$$

事实上，由于 $a_{l,\bar{j},0}'^{k} = 1 - O(h)$，所以全部 $a_{l,j,0}'^{k} \geqslant \frac{1}{2} + \varepsilon$. 又当 $l \in F_0$ 时，$\lambda_{l,1}^{k} > 0$，所以由命题 8.2 推得

$$a_{l,1,0}'^{k} \leqslant \frac{1}{2} - \varepsilon,$$

而这是与前面的结论相矛盾的，所以一定有 $M_1(l, 1, k) = -1$，

并由此推得全部 $a'^{k}_{l,j,0}\geqslant\frac{1}{2}+\varepsilon$。

其次证明，若 $l\in F_0\cap\bar{F}_1$ 且 $M_1(l,j,k)$ 恒为 -1，则 (8.48) 成立. 事实上，此时 (8.36) 可改写为

$$a^{k*}_{l,j}(\theta)a^{k}_{l,j}(\theta)-\frac{c_0}{2}$$
$$=1-4a'^{k}_{l,j,0}(1-a'^{k}_{l,j,0})\sin^2\frac{\theta}{2}-\frac{c_0}{2}>0.$$

其中 $c_0\leqslant 1$. 又令

$$\begin{cases} f^{k}_{l,j}=\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{c_0}{2}}-\sqrt{w^{k}_{l,j}}}{2}, \\ g^{k}_{l,j}=\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{c_0}{2}}+\sqrt{w^{k}_{l,j}}}{2}, \\ w^{k}_{l,j}=(2a'^{k}_{l,j,0}-1)^2-\dfrac{c_0}{2}, \end{cases}$$

则有

$$a^{k*}_{l,j}(\theta)a^{k}_{l,j}(\theta)=\frac{c_0}{2}+(f^{k}_{l,j}e^{-i\theta}+g^{k}_{l,j})^*(f^{k}_{l,j}e^{-i\theta}+g^{k}_{l,j}),$$

所以可以根据引理 8.5 构造如下的准零矩阵

$$Q^{k}_{l,j}=A^{k*}_{l,j}A^{k}_{l,j}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \dfrac{c_0}{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}(f^{k}_{l,j})^2 & f^{k}_{l,j}g^{k}_{l,j}\\ f^{k}_{l,j}g^{k}_{l,j} & (g^{k}_{l,j})^2\end{pmatrix}$$
$$-\begin{pmatrix}(a'^{k}_{l,j,-1})^2-(f^{k}_{l,j})^2 & 0\\ 0 & (a'^{k}_{l,j,0})^2-(g^{k}_{l,j})^2-\dfrac{c_0}{2}\end{pmatrix}.$$

由于 $w^{k}_{l,j}\geqslant\frac{c_0}{2}$，所以 $Q^{k}_{l,j}$ 的各元素对 x 满足 Lipschitz 条件，从而由准零矩阵性质得到

$$h\sum_{j=1}^{J}(\bar{u}^*A^*A\bar{u})^{k}_{l,j}\geqslant\frac{c_0h}{2}\sum_{j=1}^{J}|\bar{u}^{k}_{l,j}|^2+h\sum_{j=1}^{J}(\bar{u}^*Q\bar{u})^{k}_{l,j}$$

$$\geqslant \frac{c_0 h}{2}\sum_{j=1}^{J}|\bar{u}_{l,j}^{k}|^2+h((a_{l,1,-1}^{\prime k})^2-(f_{l,1}^{k})^2)|\bar{u}_{l,0}^{k}|^2$$

$$+h((a_{l,J,0}^{\prime k})^2-\frac{c_0}{2}-(g_{l,J}^{k})^2)|\bar{u}_{l,J}^{k}|^2-O(h)\|\bar{u}_{l}^{k}\|^2$$

$$\geqslant c_{13}h\sum_{j=1}^{J}|\bar{u}_{l,j}^{k}|^2-c_{14}h|\bar{u}_{l,0}^{k}|^2-O(h)\|\bar{u}_{l}^{k}\|^2, \quad (8.67)$$

其中 $c_{13}=\min\left(\frac{c_0}{2},(a_{l,J,0}^{\prime k})^2-(g_{l,J}^{k})^2\right)$, $c_{14}>|(a_{l,1,-1}^{\prime k})^2-(f_{l,1}^{k})^2|$。我们不难验证

$$\frac{\partial(g_{l,j}^{k})^2}{\partial c_0}=\frac{-(g_{l,j}^{k})^2}{2\sqrt{1-\frac{c_0}{2}\sqrt{w_{l,j}^{k}}}}<0,$$

并且当 $c_0=0$ 时，$(a_{l,j,0}^{\prime k})^2-(g_{l,j}^{k})^2=0$，所以 $c_{13}>0$. 又由于此时 $\delta_0(l)=1,\delta_1(l)=0$，故由 (8.55)，(8.67)推得 (8.48)。

第三步考虑 $M_1(l,j,k)$ 不恒为 -1 的情况．注意到

$$M_1(l,1,k)=M_1(l,J,k)=-1,$$

以及下列事实：

(i) 当 $M_1(l,j,k)=0$ 时，可构造准零矩阵 $\bar{Q}_{l,j}^{k}$,

$$\bar{Q}_{l,j}^{k}=A_{l,j}^{k*}A_{l,j}^{k}-\begin{pmatrix}\frac{c_0}{2} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}(f_{l,j}^{k})^2 & f_{l,j}^{k}g_{l,j}^{k}\\ f_{l,j}^{k}g_{l,j}^{k} & (g_{l,j}^{k})^2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(a_{l,j,0}^{\prime k})^2-(g_{l,j}^{k})^2-\frac{c_0}{2} & 0\\ 0 & (a_{l,j,1}^{\prime k})^2-(f_{l,j}^{k})^2\end{pmatrix}.$$

(ii) 在 $M_1(l,j,k)$ 发生变化的地方总有

$$a_{l,j,1}^{\prime k}=O(h),\ a_{l,j,-1}^{\prime k}=O(h),$$

因此 $a_{l,j,0}^{\prime k}=1+O(h)$，并由此知道 $\bar{Q}_{l,j}^{k}$ 的对角线元素是 $O(h)$ 的，所以 $Q_{l,j}^{k}$ 和 $\bar{Q}_{l,j}^{k}$ 都是 $O(h)$ 的，从而可仿照前面的方法证明(8.48) 成立.

类似地可证明当 $l\in F_0\cap F_1$, $l\in\bar{F}_0\cap\bar{F}_1$ 和 $l\in\bar{F}_0\cap F_1$ 时,

(8.48) 也成立.

下面分两步证明,当 $l\in F_0\cap\bar{F}_1$ 时,(8.51) 成立.

首先考虑 $M_1(l,j,k)$ 恒为 -1 的情况. 此时 (8.61) 成立,并根据 (8.63), 经计算得到其中的 $r_{l,j}^k=b_{l,j,0}^{\prime k}-a_{l,j,0}^{\prime k}$, 所以

$$
\begin{aligned}
h\sum_{j=1}^{J}(\bar{u}^*(B^*B-A^*A)\bar{u})_{l,j}^k &\leqslant -h\sum_{j=1}^{J}(\bar{u}^*Q\bar{u})_{l,j}^k \\
&\leqslant h(a_{l,0,0}^{\prime k}-b_{l,0,0}^{\prime k})|\bar{u}_{l,0}^k|^2-h(a_{l,J,0}^{\prime k}-b_{l,J,0}^{\prime k})|\bar{u}_{l,J}^k|^2 \\
&\quad+O(h)\|\bar{u}_l^k\|^2. \qquad (8.68)
\end{aligned}
$$

因为由 (8.63) 得到 $a_{l,j,0}^{\prime k}-b_{l,j,0}^{\prime k}=r\lambda_{l,j}^k$, 故由 (8.54), (8.55) 和上式得到

$$
\bar{E}_l^{k+1}-\bar{E}_l^k\leqslant rh\lambda_{l,0}^k|\bar{u}_{l,0}^k|^2-rh\lambda_{l,J}^k|\bar{u}_{l,J}^k|^2+O(h)\|\bar{u}_l^k\|^2.
$$

注意到 $\delta_0(l)=1$, $\delta_1(l)=0$, $\lambda_{l,J}^k\geqslant 0$, 就可由上式推出 (8.51).

第二步考虑 $M_1(l,j,k)$ 不恒为 -1 的情况. 其证明方法与前相仿,不同之处在于,当 $M_1(l,j,k)$ 发生变化时, 是由那里的 $a_{l,j,0}^{\prime k}=1+O(h)$, $b_{l,j,0}^{\prime k}=1+O(h)$ 来保证 (8.68) 的右端的 $|\bar{u}_{l,j}^k|^2(1\leqslant j\leqslant J-1)$ 项的系数为 $O(h^2)$.

类似地可证明,当 $l\in F_0\cap F_1$, $l\in\bar{F}_0\cap\bar{F}_1$ 和 $l\in\bar{F}_0\cap F_1$ 时,(8.51) 也成立.

由于 (8.48) 对任何情况都成立,因此根据定理 8.3, 8.4, 便可证明 (8.34) 是良态且稳定的.

可以把上述结果推广到更一般线性双曲型方程组, 详见朱幼兰 (1982). 此外,朱幼兰 (1979), 朱幼兰, 钟锡昌, 陈炳木,张作民 (1980) 还研究过 x 方向多点差分格式的稳定性,给出了若干高精度,良态且稳定的格式,并成功地应用其中的一些格式计算了复杂的无粘超音绕流问题.

例 8.2 假定 (8.31) 中的 $\lambda_l(x,t)$ 关于 x, t 都满足 Lipschitz 条件,而 (8.34) 是下列格式

$$
u_{l,j}^{k+1}+\alpha r\lambda_{l,j}^kDu_{l,j}^{k+1}=u_{l,j}^k-r(1-\alpha)\lambda_{l,j}^kDu_{l,j}^k, \qquad (8.69)
$$

其中

$$
Du_{l,j}^k=\begin{cases}\partial_x u_{l,j}^k, & 当\ \lambda_{l,j}^k\leqslant 0,\\ \bar{\partial}_x u_{l,j}^k, & 当\ \lambda_{l,j}^k>0,\end{cases}
$$

$$r|\lambda_{l,j}^k| \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{1-2\alpha}, & \text{当 } -\infty < \alpha < \dfrac{1}{2}, \\ \infty, & \text{当 } \dfrac{1}{2} \leqslant \alpha < \infty. \end{cases} \tag{8.70}$$

显然，(8.69) 可改写为

$$(1 + \alpha r|\lambda_{l,j}^k|)u_{l,j}^{k+1} - \alpha r|\lambda_{l,j}^k|u_{l,j\mp1}^{k+1}$$
$$= (1 - r(1-\alpha)|\lambda_{l,j}^k|)u_{l,j}^k + r(1-\alpha)|\lambda_{l,j}^k|u_{l,j\mp1}^k,$$

其中当 $\lambda_{l,j}^k > 0$ 时，在 $u_{l,j\mp1}^k$ 中取"一"号，否则取"十"号，因此

$$\begin{cases} a_{l,j,0}^{\prime k} = 1 + \alpha r|\lambda_{l,j}^k|, \\ a_{l,j,\mp1}^{\prime k} = -\alpha r|\lambda_{l,j}^k|, \\ b_{l,j,0}^{\prime k} = 1 - r(1-\alpha)|\lambda_{l,j}^k|, \\ b_{l,j,\mp1}^{\prime k} = r(1-\alpha)|\lambda_{l,j}^k|. \end{cases}$$

根据 (8.60)，条件 (8.35) 等价于

$$4r|\lambda_{l,j}^k|(1 + r(2\alpha - 1)|\lambda_{l,j}^k|) \geqslant 0. \tag{8.71}$$

而条件 (8.70) 保证了上式成立. 又由 (8.59)，条件 (8.36) 等价于

$$1 + 4\alpha r|\lambda_{l,j}^k|(1 + \alpha r|\lambda_{l,j}^k|)\sin^2\frac{\theta}{2} \geqslant c_0 > 0.$$

当 $\theta = 0$ 时，上式显然成立. 当 $\theta = \pi$ 时，上式等价于

$$(1 + 2\alpha r|\lambda_{l,j}^k|)^2 \geqslant c_0 > 0,$$

而条件 (8.71) 保证了上式成立. 此外，条件 (8.37)，(8.38) 显然是满足的，而且当 $\lambda_{l,j}^k = 0$ 时，格式 (8.69) 退化为 $u_{l,j}^{k+1} = u_{l,j}^k$，即满足 (8.42). 综合上面所述，格式 (8.69) 是良态且稳定的.

Keller, Thomée(1962) 也研究过此类格式.

8.3 非线性方程初边值问题的弱解，解的存在性

前两节中所介绍的能量方法都可推广到求非线性双曲型方程组的初，边值问题的小范围古典解上. 本节则以下列简单例子说明怎样处理弱解，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} + \dfrac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, & 0 < x < \infty, \ 0 < t \leqslant T, \\ U(x, 0) = U_0(x), & 0 \leqslant x < \infty, \end{cases} \tag{8.72}$$

其中 $F'(U)$ 连续，$U_0(x)\in BV$，并记

$$\mathscr{I}=[\inf_{0\leqslant x<\infty} U_0(x),\ \sup_{0\leqslant x<\infty} U_0(x)],\ |\bar{F}'|=\sup_{U\in\mathscr{I}}|F'(U)|.$$

在 $x=0$ 处的边界条件提法与 $F'(U)$ 的值有关。若

$$F'(U)|_{x=0}>0,$$

则需要给出边界条件 $U(0,t)=G(t)$。若 $F'(U)|_{x=0}\leqslant 0$，则不应该给出边界值，但要在边界上构造合理的差分格式。为了证明简便起见，本节中总假定 $F'(U)\leqslant 0$。

计算 (8.72) 的差分格式如同 §7.3。为方便计，设 $m=1$，于是得到下列格式

$$\begin{aligned}u_j^{k+1}=&au_{j+1}^k+(1-2a)u_j^k+au_{j-1}^k-\frac{r}{2}\{(b+1)F_{j+1}^k\\&-2bF_j^k+(b-1)F_{j-1}^k\}-r\{g(u_{j+1}^k,u_j^k)\\&-g(u_j^k,u_{j-1}^k)\},\end{aligned}$$

其中 a，b 是参数，g 是连续可微函数，$F_j^k=F(u_j^k)$。上式可改写为

$$\begin{aligned}u_j^{k+1}=&au_{j+1}^k+(1-2a)u_j^k+au_{j-1}^k-\frac{r}{2}(F_{j+1}^k-F_{j-1}^k)\\&-r\left[\frac{b}{2}(F_{j+1}^k-F_j^k)+g(u_{j+1}^k,u_j^k)\right]\\&+r\left[\frac{b}{2}(F_j^k-F_{j-1}^k)+g(u_j^k,u_{j-1}^k)\right].\end{aligned}$$

把后两项分别记为 $g(u_{j+1}^k,u_j^k)$ 和 $g(u_j^k,u_{j-1}^k)$，则得到下列格式

$$\begin{aligned}u_j^{k+1}=&au_{j+1}^k+(1-2a)u_j^k+au_{j-1}^k-\Big\{\frac{r}{2}(F_{j+1}^k-F_{j-1}^k)\\&+rg(u_{j+1}^k,u_j^k)-rg(u_j^k,u_{j-1}^k)\Big\},\end{aligned}\tag{8.73}$$

显然，它是守恒型格式。我们假定存在正常数 c_0 和 γ_0，使得

$$|g(y_1,y_0)|\leqslant c_0|y_1-y_0|,\tag{8.74}$$

$$a-rg_1\geqslant\frac{1}{2}\gamma_0,\quad a+rg_0\geqslant\frac{1}{2}\gamma_0,$$

$$1-2a-rg_0+rg_1\geqslant 0, \tag{8.75}$$

并由此得到

$$1-a-rg_0\geqslant \frac{1}{2}\gamma_0,$$

其中

$$g_l=\frac{\partial g}{\partial y_l}(y_1,y_0),\quad l=0,1,$$

$$\bar{g}_l=\sup_{(y_1,y_0)\in\mathscr{I}} g_l(y_1,y_0),\quad \underline{g}_l=\inf_{(y_1,y_0)\in\mathscr{I}} g_l(y_1,y_0).$$

记 $z_{j+\frac{1}{2}}^k=(u_{j+1}^k,u_j^k)^*$，$g_{l\,[j+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}]}^k$ 表示 g_l 取与 $z_{j+\frac{1}{2}}^k$ 和 $z_{j-\frac{1}{2}}^k$ 有关的中间值. 在边界上则补充简单的插值公式

$$u_0^{k+1}=u_0^k-r(F_1^k-F_0^k). \tag{8.76}$$

命题 8.3 如果

$$r|\bar{F}'|<\min(1,\gamma_0), \tag{8.77}$$

则对一切 j,k，都有 $u_j^k\in\mathscr{I}$.

证明 假设 $u_j^k\in\mathscr{I}$. 若 $j\geqslant 1$，则由 (8.73) 和中值定理得到

$$\begin{aligned}u_j^{k+1}=&\left(a-rg_{1\,[j+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}]}^k-\frac{r}{2}\tilde{F}'^k_{j+1,j-1}\right)u_{j+1}^k\\&+(1-2a-rg_{0\,[j+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}]}^k+rg_{1\,[j+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}]}^k)u_j^k\\&+\left(a+rg_{0\,[j+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}]}^k+\frac{r}{2}\tilde{F}'^k_{j+1,j-1}\right)u_{j-1}^k,\end{aligned} \tag{8.78}$$

其中

$$\tilde{F}'^k_{j+1,j-1}=F'(\theta u_{j+1}^k+(1-\theta)u_{j-1}^k),\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

根据 (8.75) 和 (8.77)，不难验证上式右端各项的系数非负且总和为 1，所以 $u_j^{k+1}\leqslant\sup u_j^k$. 同理可证 $u_j^{k+1}\geqslant\inf u_j^k$.

当 $j=0$ 时，则由 (8.76) 得到

$$u_0^{k+1}=(1+r\tilde{F}'^k_{1/2})u_0^k-r\tilde{F}'^k_{1/2}u_1^k, \tag{8.79}$$

其中

$$\tilde{F}'^k_{1/2}=F'(\theta u_0^k+(1-\theta)u_1^k),\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

根据条件 (8.77) 和 $F'(U)\leqslant 0$，可知上式右端系数非负，从而 $u_0^{k+1}\in\mathscr{I}$.

命题 8.4 若条件 (8.77) 满足，则有

$$\sum_{i=1}^{\infty}|u_i^k - u_{i-1}^k| \leqslant \operatorname*{Var}_{0<x<\infty} U_0(x).$$

证明 由 (8.73) 得到

$$\begin{aligned}u_1^{k+1} = {} & a(u_2^k - u_1^k) - a(u_1^k - u_0^k) + u_1^k - \frac{r}{2}\tilde{F}'^k_{3/2}(u_2^k - u_1^k) \\ & - \frac{r}{2}\tilde{F}'^k_{1/2}(u_1^k - u_0^k) - r g^k_{1[\frac{3}{2},\frac{1}{2}]}(u_2^k - u_1^k) \\ & - r g^k_{0[\frac{3}{2},\frac{1}{2}]}(u_1^k - u_0^k).\end{aligned}$$

把上式与 (8.79) 相减得到

$$\begin{aligned}u_1^{k+1} - u_0^{k+1} = {} & \left(a - r g^k_{1[\frac{3}{2},\frac{1}{2}]} - \frac{r}{2}\tilde{F}'^k_{3/2}\right)(u_2^k - u_1^k) \\ & + \left(1 - a - r g^k_{0[\frac{3}{2},\frac{1}{2}]} + \frac{r}{2}\tilde{F}'^k_{1/2}\right)(u_1^k - u_0^k),\end{aligned}$$

而条件 (8.75), (8.77) 保证了上式右端各项系数非负.

当 $i \geqslant 2$ 时，则由 (8.73) 得到

$$\begin{aligned}u_i^{k+1} - u_{i-1}^{k+1} = {} & \left(a - r g^k_{1[i+\frac{1}{2},i-\frac{1}{2}]} - \frac{r}{2}\tilde{F}'^k_{i+\frac{1}{2}}\right)(u_{i+1}^k - u_i^k) \\ & + (1 - 2a - r g^k_{0[i+\frac{1}{2},i-\frac{1}{2}]} + r g^k_{1[i-\frac{1}{2},i-\frac{3}{2}]})(u_i^k - u_{i-1}^k) \\ & + \left(a + r g^k_{0[i-\frac{1}{2},i-\frac{3}{2}]} + \frac{r}{2}\tilde{F}'^k_{i-\frac{1}{2}}\right)(u_{i-1}^k - u_{i-2}^k),\end{aligned}$$

而条件 (8.75) 和 (8.77) 也保证了上式右端各项系数非负.

把上面两式相加后得到

$$\begin{aligned}& \sum_{i=1}^{J}|u_i^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}| \\ & \leqslant (1 + r\tilde{F}'^k_{1/2})|u_1^k - u_0^k| + \sum_{i=2}^{J-1}|u_i^k - u_{i-1}^k| \\ & \quad + \left(1 - a + r g^k_{0[J+\frac{1}{2},J-\frac{1}{2}]} - \frac{r}{2}\tilde{F}'^k_{J-\frac{1}{2}}\right)|u_J^k - u_{J-1}^k| \\ & \quad + \left(a - r g^k_{1[J+\frac{1}{2},J-\frac{1}{2}]} - \frac{r}{2}\tilde{F}'^k_{J+\frac{1}{2}}\right)|u_{J+1}^k - u_J^k|. \qquad (8.80)\end{aligned}$$

假定 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|u_j^k-u_{j-1}^k|<\infty$，则当 $J\to\infty$ 时，$|u_J^k-u_{J-1}^k|\to 0$. 在 (8.80) 中令 $J\to\infty$，即得到

$$\sum_{j=1}^{\infty}|u_j^{k+1}-u_{j-1}^{k+1}|\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}|u_j^k-u_{j-1}^k|\leqslant\cdots$$
$$\leqslant\operatorname*{Var}_{0\leqslant x<\infty}U_0(x).$$

命题 8.5 若条件 (8.77) 成立，则

$$u_j^{k+s}=\begin{cases}\sum\limits_{\sigma=-s}^{s}\alpha_{j,\sigma}^k u_{j+\sigma}^k, & 当\ j\geqslant s,\\ \sum\limits_{\sigma=-j}^{s}\alpha_{j,\sigma}'^k u_{j+\sigma}^k, & 当\ j<s,\end{cases}$$

其中 $\alpha_{j,\sigma}^k\geqslant 0$，$\alpha_{j,\sigma}'^k\geqslant 0$，$\sum\limits_{\sigma=-s}^{s}\alpha_{j,\sigma}^k=1$，$\sum\limits_{\sigma=-j}^{s}\alpha_{j,\sigma}'^k=1$.

证明 应用归纳法来证明. 先设 $s=1$. 若 $j\geqslant 1$，则表达式 (8.78) 成立，其右端各项系数即为 $\alpha_{j,\sigma}^k$，它们是非负的且总和为 1. 若 $j=0$，则有表达式 (8.79)，同样的结论成立.

现在假定命题对 s 成立. 若 $j\geqslant s+1$，则可仿照证明命题 7.3 的方法来证明结论成立. 若 $j<s+1$，则有

$$u_j^{k+s+1}=\sum_{\sigma=-j}^{s}\alpha_{j,\sigma}'^{k+1}u_{j+\sigma}^{k+1},$$

其中 $\alpha_{j,\sigma}'^{k+1}\geqslant 0$，且 $\sum\limits_{\sigma=-j}^{s}\alpha_{j,\sigma}'^{k+1}=1$. 把 (8.78)，(8.79) 代人上式后得到

$$\begin{aligned}u_j^{k+s+1}=&\alpha_{j,-j}'^{k+1}((1+r\tilde F_{1/2}'^k)u_0^k-r\tilde F_{1/2}'^k u_1^k)\\&+\sum_{\sigma=-j+1}^{s}\alpha_{j,\sigma}'^{k+1}\Big[\Big(a-rg_{1(j+\frac12,j-\frac12)}^k\\&-\frac{r}{2}\tilde F_{j+\sigma+1,j+\sigma-1}'^k\Big)u_{j+\sigma+1}^k\\&+(1-2a-rg_{0(j+\frac12,j-\frac12)}^k+rg_{1(j+\frac12,j-\frac12)}^k)u_{j+\sigma}^k\\&+\Big(a+rg_{0(j+\frac12,j-\frac12)}^k+\frac{r}{2}\tilde F_{j+\sigma+1,j+\sigma-1}'^k\Big)u_{j+\sigma-1}^k\Big],\end{aligned}\tag{8.81}$$

合并同类项后即得到

$$u_j^{k+s+1}=\sum_{\sigma=-j}^{s+1}\alpha_{j,\sigma}^{s,k}u_{j+\sigma}^{k},$$

并由 (8.75), (8.77) 保证 $\alpha_{j,\sigma}^{s,k}\geqslant 0$. 最后令 $u_{j+\sigma}^{k}\equiv 1$, 并比较 (8.81) 与上式右端的系数,即得 $\sum\limits_{\sigma=-j}^{s+1}\alpha_{j,\sigma}^{s,k}=1$.

现在把 u_j^k 线性插值为连续函数 $U_h(x,t)$, 于是可仿照命题 7.4 得到下面的结果.

命题 8.6 若 (8.77) 成立,则对任意的 $t>0$, $t'>0$, 都有

$$\int_0^\infty |U_h(x,t)-U_h(x,t')|dx$$

$$\leqslant\left(\frac{2}{\tau}|t-t'|+4h\right)\operatorname*{Var}_{0\leqslant x<\infty}U_h(x,0).$$

定理 8.6 若 $F'(U)$ 连续且非正,则问题 (8.72) 存在弱解 $U(x,t)$, 并且 $U(x,t)\in\mathscr{I}$, $\operatorname*{Var}\limits_{0\leqslant x<\infty}U(x,t)\leqslant\operatorname*{Var}\limits_{0\leqslant x<\infty}U_0(x)$.

证明 根据命题 8.3 和 8.4, $\{U_h(x,t)\}$ 是一致有界且有有界变差. 仿照定理 7.1 的证明方法,可从中选取一个子列,仍记为 $\{U_h(x,t)\}$, 使得它在 $\{(x,t)|0<x<\infty,t\geqslant 0\}$ 中按 L^1 范数一致收敛到 $U(x,t)$. 下面来证明 $U(x,t)$ 满足 (8.72). 设 $\phi(x,t)$ 是有界支集的 C^∞ 类函数,并且对一切 t, $\phi(0,t)\equiv 0$, 现在用 $h\tau\phi_j^k$ 乘 (8.73), 求和后得到

$$h\tau\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\phi_j^k\left\{\frac{u_j^{k+1}-au_{j+1}^k-(1-2a)u_j^k-au_{j-1}^k}{\tau}\right.$$
$$\left.+\frac{F_{j+1}^k-F_{j-1}^k}{2h}+\frac{g(z_{j+\frac12}^k)-g(z_{j-\frac12}^k)}{h}\right\}=0,$$

其中 $z_{j+\frac12}^k=(u_{j+1}^k,u_j^k)$. 注意到

$$-\sum_{j=1}^{\infty}\phi_j^k\frac{F_{j+1}^k-F_{j-1}^k}{2h}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\phi_{j+1}^k-\phi_{j-1}^k}{2h}F_j^k+\frac{1}{2h}\phi_1^kF_0^k,$$

$$-\sum_{j=1}^{\infty}\phi_j^k\frac{g(z_{j+\frac12}^k)-g(z_{j-\frac12}^k)}{h}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\phi_{j+1}^k-\phi_j^k}{h}g(z_{j+\frac12}^k)$$

$$+\frac{1}{h}\phi_1^k g(z_{1/2}^k),$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\phi_j^k\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\phi_j^k-\phi_j^{k-1}}{\tau}u_j^k+\frac{1}{\tau}\phi_j^0u_j^0,$$

$$\frac{a}{\tau}\sum_{j=1}^{\infty}\phi_j^k(u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k)$$

$$=\frac{a}{\tau}\Big\{\sum_{j=1}^{\infty}(\phi_{j+1}^k-2\phi_j^k+\phi_{j-1}^k)u_j^k$$

$$+\phi_1^k(u_0^k-u_1^k)-(\phi_0^k-\phi_1^k)u_1^k\Big\},$$

就得到

$$h\tau\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a\phi_{j+1}^k+(1-2a)\phi_j^k+a\phi_{j-1}^k-\phi_j^{k-1}}{\tau}u_j^k$$

$$+h\tau\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\phi_{j+1}^k-\phi_{j-1}^k}{2h}F_j^k+h\sum_{j=1}^{\infty}(a\phi_{j+1}^0$$

$$+(1-2a)\phi_j^0+a\phi_{j-1}^0)u_j^0=-h\tau\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\phi_{j+1}^k-\phi_j^k}{h}$$

$$\times g(z_{j+\frac{1}{2}}^k)-\tau\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\phi_1^kF_0^k+\phi_1^kg(z_{1/2}^k)\right)$$

$$-ah\sum_{k=0}^{\infty}(\phi_1^k(u_0^k-u_1^k)-(\phi_0^k-\phi_1^k)u_1^k).$$

因为 $\phi_0^k=0$，ϕ 是有界支集函数，而且 g 满足条件 (8.74)，所以上式右端为 $O(h)$，令 $h\to 0$，就得到

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}U+\frac{\partial\phi}{\partial x}F(U)\right)dx\,dt$$

$$+\int_0^{\infty}\phi(x,0)U_0(x)dx=0.$$

注记 8.5　在 (8.73) 中选择不同的 a 值和 g，就可以得到许多熟知的格式．例如取 $a=\frac{1}{2}$，$g\equiv 0$，则它即为 Lax 格式．

Олейник(1957)，Nishida，Smoller(1977) 等都研究了双曲型方程初、边值问题的弱解．

8.4 不定边界问题

关于激波的计算大致有两类方法. § 7 中的方法(除特征型格式外)和 § 8.3 中的方法都是穿行法，或称为激波捕捉法. 另一种方法是激波拟合法，即用 Hugoniot 条件或其它方法确定激波位置，然后在解的光滑区域内用通常的差分方法求解. 后一类方法通常导致内边界问题或不定边界问题，下面用一个简单的例子来说明它,详见王能超 (1965) 和许梦杰,沈玮熙，王尊正 (1965) 的论文. 假设在 $x=0$ 处有一个固壁，当 $t=0$ 时从 $x=b>0$ 发出一个向左传播的平面激波,并在 t_0 时刻到达这个固壁，然后发生反射,见图 8.1. 用 U, ρ, P 和 E 分别表示反射后的速度，密度,压力和比内能,则在解的光滑区域内，它们满足下列方程组

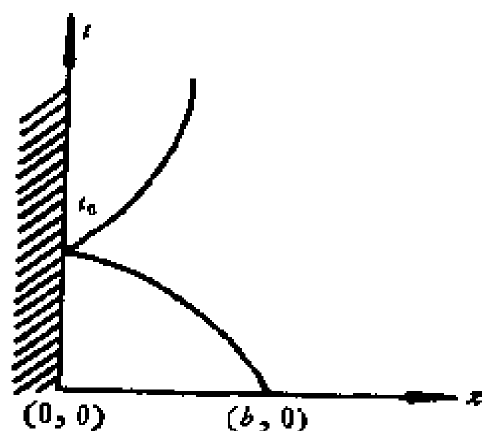


图 8.1

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho U)}{\partial x}=0, \\
\dfrac{\partial(\rho U)}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}(\rho U^2+P)=0, \\
\dfrac{\partial\left(\dfrac{\rho U^2}{2}+\rho E\right)}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\rho U\left(\dfrac{U^2}{2}+E\right)+PU\right)=0, \\
P=f(\rho,E),
\end{cases}
\tag{8.82}
$$

其中 $f(\rho, E)$ 是状态函数.

当 $t=t_0$ 时，U, ρ 和 P 是已知的. 又在固壁处 $U(0,t)=0$.

用 $x=\widetilde{X}(t)$ 表示激波反射线的位置，于是在其上解发生间断。用 $[z]$ 表示 z 的跃度，则由 Hugoniot 条件得到

$$\begin{cases}[\rho U]=[\rho]\dfrac{d\widetilde{X}}{dt}, \\ [\rho U^2+P]=[\rho U]\dfrac{d\widetilde{X}}{dt}, \\ \left[\rho U\left(\dfrac{U^2}{2}+E\right)+PU\right]=\left[\dfrac{\rho U^2}{2}+\rho E\right]\dfrac{d\widetilde{X}}{dt},\end{cases} \tag{8.83}$$

其中第一式可确定激波线，把它代入第二，三式即得到

$$\begin{cases}[\rho U]^2=[\rho][\rho U^2+P], \\ \left[\rho\left(\dfrac{U^2}{2}+E\right)\right][\rho U]=[\rho]\left[\rho U+\left(\dfrac{U^2}{2}+E\right)+PU\right],\end{cases}$$

它们表示活动边界上的边界条件，这样就构成了一个完整的问题。

方程组 (8.82) 具有特征值 $\lambda_1=U+a$，$\lambda_2=U$，$\lambda_3=U-a$，其中 a 是声速．对于亚声速流动，恒有 $\lambda_1>0$，$\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3$ 和 $\lambda_3<0$。又当 $x=0$ 时，$\lambda_2=0$，因此固定边界是特征线。最后还可把原方程简化为对角型方程组，从而转化为考虑下列问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U_l}{\partial t}+\lambda_l(x,t,U)\dfrac{\partial U_l}{\partial x}=d_l(x,t,U), & 1\leqslant l\leqslant 3, \\ \qquad\qquad 0\leqslant x\leqslant\widetilde{X}(t),\ 0\leqslant t\leqslant\delta, & \\ U_l(0,0)=0, & 1\leqslant l\leqslant 3, \\ U_1(0,t)=G_1(t,U_2,U_3), & t\geqslant 0, \\ U_2(\widetilde{X},t)=G_2(\widetilde{X},t,U_1), & t\geqslant 0, \\ U_3(\widetilde{X},t)=G_3(\widetilde{X},t,U_1), & t\geqslant 0, \\ \dfrac{d\widetilde{X}}{dt}=\mu(\widetilde{X},t,U), & t>0, \\ \widetilde{X}(0)=0,\end{cases} \tag{8.84}$$

其中 $U=(U_1,U_2,U_3)^*$，μ 是已知函数，并且假定存在适当小的正数 δ，γ 和 ε，使得在 $D=\{(x,t,U)|0\leqslant x\leqslant\gamma,\ 0\leqslant t\leqslant\delta,\ |U|<\varepsilon\}$ 上，满足下列条件：

(i) 可微性条件，即 λ_l，d_l，G_l 和 μ 都对变量满足 Lipschitz 条件。

(ii) 定向性条件，即存在正常数 M_l，使得

$$M_5 \leqslant \lambda_3 \leqslant M_4 \leqslant 0 < M_3 \leqslant \mu \leqslant M_2 \leqslant \lambda_1 \leqslant M_1,$$
$$M_4 \leqslant \lambda_2 \leqslant M_3,$$

详见图 8.2，其中 M_l 表示直线 $\frac{dx}{dt} = M_l$。

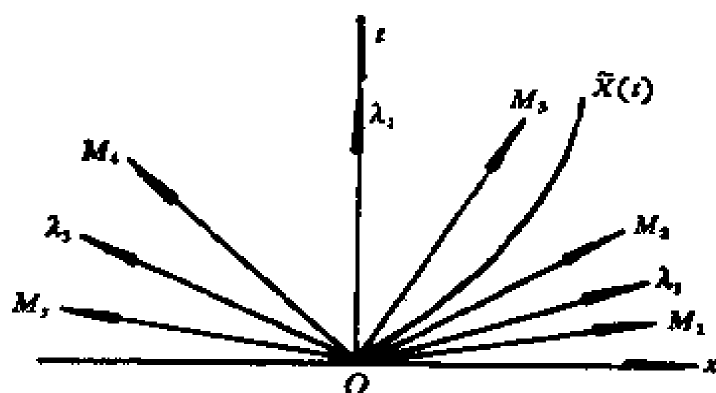


图 8.2

为了保证固定边界 $x = 0$ 是特征线，还假定由边界条件可推得 $\lambda_2(0, t, U) = 0$，从而由原方程得到

$$\left.\frac{dU_2}{dt}\right|_{x=0} = d_2(0, t, U).$$

(iii) 收敛性条件，即

$$\theta = \max\{L_1^{(2)}, L_1^{(3)}, L_2^{(1)}, L_3^{(1)}\} < 1,$$

其中 $L_l^{(p)}$ 表示 G_l 对 U_p 的 Lipschitz 常数。

为了计算不定边界问题，首先必须构造合适的差分网格。取 t 方向的网格步长为固定正数 τ，用 x_j 表示 x 方向的第 j 个格点，$h_j = x_{j+1} - x_j$。用 u_j^k 和 $\tilde{x}_k$ 表示 $U(x_j, t_k)$ 和 $\tilde{X}(t_k)$ 的近似值，$\mu_k = (\tilde{x}_k, t_k, u_k^k)$。显然有 $\tilde{x}_0 = 0$，$u_0^0 = 0$。又由不定边界方程得到

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_0 + \tau\mu(0, 0, 0),$$

从而 $h_0 = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_0 = \tilde{x}_1 = \tau\mu(0, 0, 0)$。假定 t_k 时刻的网格点及全部 u_j^k 都已确定，则定义

$$\begin{cases}\tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_k + \tau\mu_k, & k \geqslant 0, \\ h_k = \tilde{x}_{k+1} - \tilde{x}_k, & k \geqslant 0.\end{cases} \tag{8.85}$$

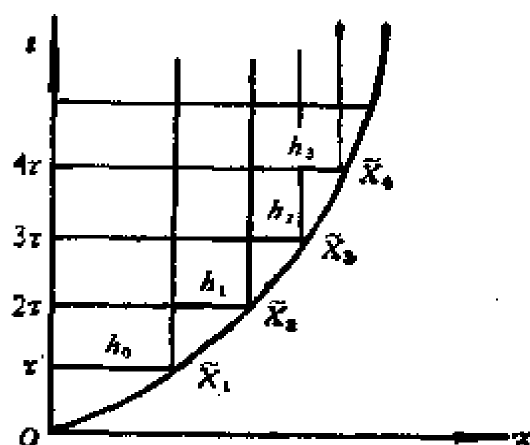


图 8.3

这样就构造了活动网格，它与近似的不定边界 $x=\tilde{x}(t_k)$ 相吻合，见图 8.3.

下面来建立差分格式. 假设点 R, P, Q, Q', Q'' 和 S 的位置及其座标如图 8.4 所示. 首先过 P 点作第一族特征线的近似直线 $\mathscr{L}_1$:

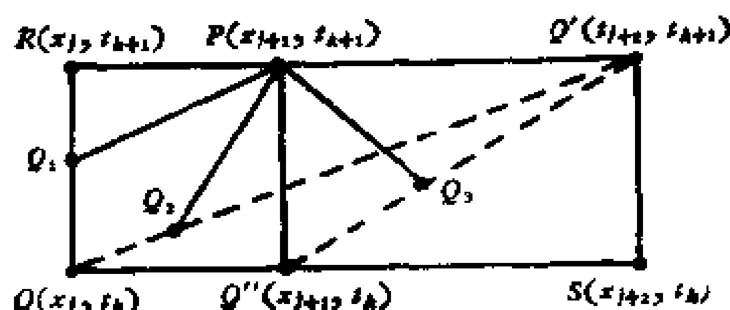


图 8.4

$$\frac{dx}{dt}=\lambda_1(Q, u(Q)).$$

由 (8.85), P, Q 两点间的斜率为

$$\mu_j=\frac{\tilde{x}_{j+1}-\tilde{x}_j}{\tau}.$$

根据定向性条件，$\mu_j\leqslant\lambda_1(Q)$，所以 $\mathscr{L}_1$ 与 R, Q 两点的连线交于一点 Q_1，而 R 与 Q_1 两点间连线的长度

$$\overline{RQ_1}=\tilde{\tau}_1<\tau.$$

类似地，过 P 点作第二族特征线的近似直线 $\mathscr{L}_2$:

$$\frac{dx}{dt}=\lambda_2(Q,u(Q)),$$

它与 Q，Q' 两点的连线交于一点 Q_2。又过 P 点作第三族特征线的近似直线 $\mathscr{L}_3$:

$$\frac{dx}{dt}=\lambda_3(Q,u(Q)).$$

则它与 Q'，Q'' 两点的连线交于一点 Q_3.

其次,沿着 $\mathscr{L}_l$ 建立差分格式,例如在 $\mathscr{L}_1$ 上,

$$\frac{u_1(P)-u_1(Q_1)}{\tilde{\tau}_1}=d_1(Q,u(Q)). \qquad (8.86)$$

但 Q_1 不是网格点,故要用插值方法来计算 $u_1(Q_1)$. 下面记

$$\lambda_{l,j}^k=\lambda_l(x_j,t_k,u_j^k), \quad d_{l,j}^k=d_l(x_j,t_k,u_j^k),$$

则由网格的构造方法和 $\mathscr{L}_1$ 的定义得到

$$\frac{\overline{PR}}{\tau}=\mu_j, \qquad \frac{\overline{PR}}{\tilde{\tau}_1}=\lambda_{1,j}^k,$$

即

$$\tilde{\tau}_1=\frac{\tau\mu_j}{\lambda_{1,j}^k}. \qquad (8.87)$$

今取

$$u_1(Q_1)=\frac{\mu_j}{\lambda_{1,j}^k}u_1(Q)+\left(1-\frac{\mu_j}{\lambda_{1,j}^k}\right)u_1(R), \qquad (8.88)$$

并把它和(8.87)代入(8.86),经整理后得到

$$u_1(P)=\left(1-\frac{\mu_j}{\lambda_{1,j}^k}\right)u_1(R)+\frac{\mu_j}{\lambda_{1,j}^k}u_1(Q)+\frac{\tau\mu_j}{\lambda_{1,j}^k}d_1(Q,u(Q)).$$

记 $\alpha_{1,j}^k=\frac{\mu_j}{\lambda_{1,j}^k}$，并用 j 代替上式中的 $j+1$，则得到

$$u_{1,j}^{k+1}=(1-\alpha_{1,j-1}^k)u_{1,j-1}^{k+1}+\alpha_{1,j-1}^k u_{1,j-1}^k+\tau\alpha_{1,j-1}^k d_{1,j-1}^k,$$
$$1\leqslant j\leqslant k+1,\ k\geqslant 0. \qquad (8.89)$$

同理可得到

$$\begin{cases} u_{2,j}^{k+1}=(1-\alpha_{2,j}^k)u_{2,j+1}^{k+1}+\alpha_{2,j}^k u_{2,j-1}^k+\tau\alpha_{2,j}^k d_{2,j}^k, \\ \qquad\qquad 1\leqslant j\leqslant k,\ k\geqslant 0, \\ \alpha_{2,j}^k=\dfrac{\mu_j}{\mu_j+\mu_{j-1}-\lambda_{2,j}^k}, \end{cases} \qquad (8.90)$$

和

$$\begin{cases} u_{3,j}^{k+1} = (1-\alpha_{3,j}^k)u_{3,j+1}^{k+1} + \alpha_{3,j}^k u_{3,j}^k + \tau\alpha_{3,j}^k d_{3,j}^k, \\ \qquad\qquad 0 \leqslant j \leqslant k,\ k \geqslant 0, \\ \alpha_{3,j}^k = \dfrac{\mu_j}{\mu_j - \lambda_{3,j}^k}, \end{cases} \tag{8.91}$$

初值条件是

$$u_0^0 = 0. \tag{8.92}$$

边界条件则由下式所逼近

$$\begin{cases} u_{1,0}^{k+1} = G_1(t_{k+1},\ u_{2,0}^k, u_{3,0}^k), & k \geqslant 0, \\ u_{2,0}^{k+1} = \tau d_{2,0}^k + u_{2,0}^k, & k \geqslant 0, \\ u_{2,k+1}^{k+1} = G_2(\tilde{x}_{k+1},\ t_{k+1},\ u_{1,k}^k), & k \geqslant 0, \\ u_{3,k+1}^{k+1} = G_3(\tilde{x}_{k+1},\ t_{k+1},\ u_{1,k}^k), & k \geqslant 0. \end{cases} \tag{8.93}$$

在具体求解时，先由 u_j^k, $\tilde{x}_k$ 和 (8.85) 确定 $\tilde{x}_{k+1}$，再由 (8.93) 确定 u_j^{k+1} 的边界值，最后由 (8.89)—(8.91)，并应用单方向的递推公式算出全部 u_j^{k+1} 的值.

下面来证明上述格式的收敛性. 假定原问题 (8.84) 在区域 $\{(x, t)/0 \leqslant x \leqslant \tilde{x}(t),\ 0 \leqslant t \leqslant \delta\}$ 上具有解 $(U, \tilde{X})$, 它的一阶导数满足一致 Lipschitz 条件，并且 $|\tilde{X}(t)| < \gamma$, $|U| < \varepsilon$, 于是 $(U, \tilde{X})$ 满足下列关系式.

$$\begin{cases} U_{1,j}^{k+1} = (1-\bar{\alpha}_{1,j-1}^k)U_{1,j-1}^{k+1} + \bar{\alpha}_{1,j-1}^k U_{1,j-1}^k + \tau\bar{\alpha}_{1,j-1}^k \bar{d}_{1,j-1}^k + O(\tau^2), \\ U_{2,j}^{k+1} = (1-\bar{\alpha}_{2,j}^k)U_{2,j+1}^{k+1} + \bar{\alpha}_{2,j}^k U_{2,j-1}^k + \tau\bar{\alpha}_{2,j}^k \bar{d}_{2,j}^k + O(\tau^2), \\ U_{3,j}^{k+1} = (1-\bar{\alpha}_{3,j}^k)U_{3,j+1}^{k+1} + \bar{\alpha}_{3,j}^k U_{3,j}^k + \tau\bar{\alpha}_{3,j}^k \bar{d}_{3,j}^k + O(\tau^2), \end{cases} \tag{8.94}$$

其中

$$\bar{\mu}_j = (\tilde{X}_j,\ t_j,\ U_j^j),\quad \bar{\lambda}_{i,j}^k = \lambda_i(x_j,\ t_k,\ U_j^k),$$

$$\bar{d}_{i,j}^k = d_i(x_j,\ t_k, U_j^k),\quad \bar{\alpha}_{1,j}^k = \frac{\bar{\mu}_j}{\bar{\lambda}_{1,j}^k},$$

$$\bar{\alpha}_{2,j}^k = \frac{\bar{\mu}_j}{\bar{\mu}_j + \bar{\mu}_{j-1} - \bar{\lambda}_{2,j}^k},\quad \bar{\alpha}_{3,j}^k = \frac{\bar{\mu}_j}{\bar{\mu}_j - \bar{\lambda}_{3,j}^k},$$

以及

$$
\begin{cases}
U_0^0 = 0, \\
U_{1,0}^{k+1} = G_1(t_{k+1}, U_{2,0}^k, U_{3,0}^k) + O(\tau), \\
U_{2,0}^{k+1} = \tau d_2(O, t_k, U_0^k) + U_{2,0}^k + O(\tau^2), \\
U_{2,k+1}^{k+1} = G_2(\widetilde{X}_{k+1}, t_{k+1}, U_{1,k}^k) + O(\tau), \\
U_{3,k+1}^{k+1} = G_3(\widetilde{X}_{k+1}, t_{k+1}, U_{1,k}^k) + O(\tau), \\
\widetilde{X}_{k+1} = \widetilde{X}_k + \tau \bar{\mu}_k + O(\tau^2).
\end{cases}
\tag{8.95}
$$

记 $v_i^k = u_i^k - U_i^k$, $y_k = \tilde{x}_k - \widetilde{X}_k$, 由 (8.85), (8.89)—(8.95) 得到

$$
\begin{cases}
v_{1,j}^{k+1} = (1 - \alpha_{1,j-1}^k) v_{1,j-1}^{k+1} + \alpha_{1,j-1}^k v_{1,j-1}^k + g_{1,j-1}^k, \\
\qquad 1 \leqslant j \leqslant k+1, \ k \geqslant 0, \\
v_{2,j}^{k+1} = (1 - \alpha_{2,j}^k) v_{2,j+1}^{k+1} + \alpha_{2,j}^k v_{2,j-1}^k + g_{2,j}^k, \\
\qquad 1 \leqslant j \leqslant k, \ k \geqslant 0, \\
v_{3,j}^{k+1} = (1 - \alpha_{3,j}^k) v_{3,j+1}^{k+1} + \alpha_{3,j}^k v_{3,j}^k + g_{3,j}^k, \\
\qquad 0 \leqslant j \leqslant k, \ k \geqslant 0,
\end{cases}
\tag{8.96}
$$

其中

$$
\begin{cases}
g_{1,j-1}^k = \tau(\alpha_{1,j-1}^k d_{1,j-1}^k - \bar{\alpha}_{1,j-1}^k \bar{d}_{1,j-1}^k) + (\bar{\alpha}_{1,j-1}^k \\
\qquad - \alpha_{1,j-1}^k)(U_{1,j-1}^{k+1} - U_{1,j-1}^k) + O(\tau^2), \\
g_{2,j}^k = \tau(\alpha_{2,j}^k d_{2,j}^k - \bar{\alpha}_{2,j}^k \bar{d}_{2,j}^k) + (\bar{\alpha}_{2,j}^k - \alpha_{2,j}^k)(U_{2,j+1}^{k+1} \\
\qquad - U_{2,j-1}^k) + O(\tau^2), \\
g_{3,j}^k = \tau(\alpha_{3,j}^k d_{3,j}^k - \bar{\alpha}_{3,j}^k \bar{d}_{3,j}^k) + (\bar{\alpha}_{3,j}^k - \alpha_{3,j}^k)(U_{3,j+1}^{k+1} \\
\qquad - U_{3,j}^k) + O(\tau^2),
\end{cases}
$$

以及

$$
\begin{cases}
v_0^0 = 0, \\
v_{1,0}^{k+1} = G^1(t_{k+1}, u_{2,0}^k, u_{3,0}^k) - G_1(t_{k+1}, U_{2,0}^k, U_{3,0}^k) + O(\tau), \\
v_{2,0}^{k+1} = v_{2,0}^k + g_{2,0}^k, \\
g_{2,0}^k = \tau d_{2,0}^k - \tau \bar{d}_{2,0}^k + O(\tau^2), \\
v_{2,k+1}^{k+1} = G_2(\tilde{x}_{k+1}, t_{k+1}, u_{1,k}^k) - G_2(\widetilde{X}_{k+1}, t_{k+1}, U_{1,k}^k) \\
\qquad + O(\tau), \\
v_{3,k+1}^{k+1} = G_3(\tilde{x}_{k+1}, t_{k+1}, u_{1,k}^k) - G_3(\widetilde{X}_{k+1}, t_{k+1}, U_{1,k}^k) \\
\qquad + O(\tau).
\end{cases}
\tag{8.97}
$$

和

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + v_k, \\ v_k = \tau(\mu_k - \bar{\mu}_k) + O(\tau^2), \\ y_0 = 0. \end{cases} \tag{8.98}$$

今后将应用下列两个引理。

引理 8.6 设 c_1 和 c_2 是非负常数，$a^k \geqslant 0$，并且

$$a^{k+1} \leqslant a^k + c_1\tau(a^k + c_2),\ k \geqslant 0,$$

那末，当 $k\tau \leqslant \delta$ 时，

$$a^k \leqslant e^{c_1\delta}a^0 + (e^{c_1\delta} - 1)c_2.$$

证明

$$a^k + c_2 = (a^{k-1} + c_2)(1 + c_1\tau) \leqslant \cdots$$
$$\leqslant (1 + c_1\tau)^k(a^0 + c_2),$$

从而当 $k\tau \leqslant \delta$ 时

$$a^k \leqslant e^{c_1\delta}(a^0 + c_2) - c_2 = e^{c_1\delta}a^0 + (e^{c_1\delta} - 1)c_2.$$

下面记 $\|w^k\|_\infty = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant k+1} |w_j^k|$.

引理 8.7 若 $0 < \beta < \beta_j^k \leqslant 1$，则下列结论成立:

(i) 如果

$$w_j^{k+1} = (1 - \beta_{j-1}^k)w_{j-1}^{k+1} + \beta_{j-1}^k w_{j-1}^k + g_{j-1}^k,$$
$$1 \leqslant j \leqslant k + 1,$$

则

$$\|w^{k+1}\|_\infty \leqslant \max\left(|w_0^{k+1}|,\ \|w^k\|_\infty + \frac{1}{\beta}\|g^k\|_\infty\right);$$

(ii) 如果

$$w_j^{k+1} = (1 - \beta_j^k)w_{j+1}^{k+1} + \beta_j^k w_{j-1}^k + g_j^k,\ 1 \leqslant j \leqslant k,$$

则

$$\|w^{k+1}\|_\infty \leqslant \max\left(|w_0^{k+1}|, |w_{k+1}^{k+1}|,\ \|w^k\|_\infty + \frac{1}{\beta}\|g^k\|_\infty\right);$$

(iii) 如果

$$w_j^{k+1} = (1 - \beta_j^k)w_{j+1}^{k+1} + \beta_j^k w_j^k + g_j^k,\ 0 \leqslant j \leqslant k,$$

则

$$\|w^{k+1}\|_\infty \leqslant \max\left(|w_{k+1}^{k+1}|, \|w^k\|_\infty + \frac{1}{\beta}\|g^k\|_\infty\right).$$

证明 只证明结论 (i)，并假定 $|w_{i_0}^{k+1}| = \|w^{k+1}\|_\infty$. 若 $i_0 = 0$，则结论自明，否则有

$$|w_{i_0}^{k+1}| \leqslant (1-\beta_{i_0-1}^k)|w_{i_0-1}^{k+1}| + \beta_{i_0-1}^k|w_{i_0-1}^k| + |g_{i_0-1}^k|,$$

从而

$$\|w^{k+1}\|_\infty \leqslant \|w^k\|_\infty + \frac{1}{\beta}\|g^k\|_\infty.$$

下面记

$$\|v_l^k\|_\infty = \max_{0\leqslant j\leqslant k+1} |v_{l,j}^k|, \quad |||v_l|||_k = \max_{0\leqslant \xi\leqslant k} \|v_l^\xi\|_\infty,$$

$$\|v^k\|_\infty = \max_{1\leqslant l\leqslant 3} \|v_l^k\|_\infty, \quad |||v|||_k = \max_{1\leqslant l\leqslant 3}|||v_l|||_k,$$

$$|||y|||_k = \max_{0\leqslant \xi\leqslant k} |y_\xi|.$$

定理 8.7 在本节所述的条件下，存在适当小的正数 τ_0 和 δ_0，使得当 $\tau \leqslant \tau_0$, $k\tau \leqslant \delta_0$ 时，

$$|||y_k||| = O(\tau), \quad |||v|||_k = O(\tau).$$

证明 采用归纳法. 显然，由初始条件得到

$$|||y|||_0 = |||v|||_0 = 0.$$

假设定理已对 k 成立. 由于 $\mu(x, t, U)$ 满足 Lipschitz 条件，因此存在正常数 c_3，使得

$$|\nu_k| \leqslant c_3\tau(|y_k| + \|v^k\| + \tau).$$

因为 $|||v|||_k \leqslant c_4\tau$，所以由 (8.98) 得到

$$|y_{k+1}| \leqslant |y_k| + c_3\tau(c_4+1)(|y_k| + \tau).$$

根据引理 8.6，当 $(k+1)\tau \leqslant \delta$ 时，

$$|y_{k+1}| \leqslant \tau(e^{c_3(c_4+1)\delta} - 1).$$

今取 δ 适当小，使得 $e^{c_3(c_4+1)\delta} < 2$，则 $|y_{k+1}| < \tau$，从而

$$|\tilde{x}_{k+1}| \leqslant |y_{k+1}| + |\tilde{X}_{k+1}| < \gamma.$$

根据定向性条件

$$0 < \frac{M_3}{M_1} \leqslant \alpha_{1,j}^k \leqslant 1, \quad 0 < \frac{M_3}{2M_2 - M_4} \leqslant \alpha_{2,j}^k \leqslant 1,$$

$$0 < \frac{M_3}{M_2 - M_5} \leqslant \alpha_{3,j}^k \leqslant 1,$$

所以由引理 8.7 和 (8.96) 得到

$$\|v_1^{k+1}\|_\infty \leqslant \max(|v_{1,0}^{k+1}|, \|v_1^k\|_\infty + c_5\|g_1^k\|_\infty),$$

$$\|v_2^{k+1}\|_\infty \leqslant \max(|v_{2,0}^{k+1}|, |v_{2,k+1}^{k+1}|, \|v_2^k\|_\infty + c_5\|g_2^k\|_\infty),$$

$$\|v_3^{k+1}\|_\infty \leqslant \max(|v_{3,k+1}^{k+1}|, \|v_3^{k+1}\|_\infty + c_5\|g_3^k\|_\infty).$$

因此最后只要估计 $|v_{1,0}^{k+1}|$, $|v_{2,0}^{k+1}|$, $|v_{2,k+1}^{k+1}|$, $|v_{3,k+1}^{k+1}|$ 和 $\|g_i^k\|$.
例如根据 $g_{2,j}^k$ 的表达式及可微性条件可得到

$$\|g_2^k\|_\infty \leqslant c_6\tau(|||v|||_k + \tau).$$

又由 (8.97) 中的第三,四两式和收敛性条件得到

$$|v_{2,0}^{k+1}| \leqslant |||v_2|||_k + c_6\tau(|||v|||_k + \tau),$$

$$|v_{2,k+1}^{k+1}| \leqslant \theta_1|||v|||_k + c_6\tau,\ 0 \leqslant \theta_1 \leqslant 1.$$

因此

$$\|v_2^{k+1}\|_\infty \leqslant \max\{\theta_1|||v|||_k + c_6\tau,\ |||v|||_k + c_6\tau(|||v|||_k + \tau)\}.$$

同理可证明

$$\|v_1^{k+1}\|_\infty \leqslant \max\{\theta_1|||v|||_k + c_6\tau, |||v|||_k + c_6\tau(|||v|||_k + \tau)\}.$$

$$\|v_3^{k+1}\|_\infty \leqslant \max\{\theta_1|||v|||_k + c_6\tau, |||v|||_k + c_6\tau(|||v|||_k + \tau)\}.$$

于是

$$|||v|||_{k+1} \leqslant \max\left\{\frac{c_6\tau}{1-\theta_1},\ |||v|||_k + c_6\tau(|||v|||_k + \tau)\right\},$$

由此就可推得 $|||v|||_{k+1} = O(\tau)$.

朱幼兰,钟锡昌,陈炳木,张作民 (1980) 分离多个激波, 然后在解的每个光滑区域内,用 §8.2 中的方法来计算.

§9 高阶双曲型方程和非线性波动方程

原则上说,高阶双曲型方程都可化为一阶双曲型方程组,所以本节只介绍一些直接处理高阶方程的方法. 首先用 Fourier 方法讨论常系数方程的差分格式,其次叙述了非线性问题的能量方法. 本节着重介绍一些解非线性波动方程的数值方法,例如求解 Korteweg de-Vries 方程, RLW 方程, Klein-Gordon 方程, Sine-Gordon 方程, Schrödinger 方程和 Dirac 方程等.虽然它们并不完

全是双曲型方程，但具有许多共同的特点，例如守恒律和在一定条件下存在着孤波解，因此在这里一起加以研究。

9.1 常系数高阶方程的 Fourier 方法

最简单的问题是下列弦振动方程的周期解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, & -\infty < x < \infty,\ 0 < t \leqslant T, \\ \dfrac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = U_1(x), & -\infty < x < \infty, \\ U(x, 0) = U_0(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases} \tag{9.1}$$

假定 $U_0(x) \in C^2$，$U_1(x) \in C^1$，且都以 π 为周期，于是

$$\begin{cases} U_0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin mx, \\ U_1(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mx, \end{cases} \tag{9.2}$$

这里

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi U_0(x) \sin mx\, dx,$$

$$b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi U_1(x) \sin mx\, dx.$$

由 D'Alembert 公式得到

$$U(x, t) = \frac{1}{2}\left[U_0(x+t) + U_0(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} U_1(\xi) d\xi \right]. \tag{9.3}$$

上式表示 $U(x_0, t_0)$ 依赖于经过点 (x_0, t_0) 的两条特征线

$$x + t = c_1,\ x - t = c_2$$

在 x 轴上所截下的线段的初始值，这个线段被称为 $U(x_0, t_0)$的依赖区间。反之，解受点 x_0 处的初值影响的点的集合是界于特征线

$$x + t = x_0,\ x - t = x_0$$

之间的扇形，这个扇形被称为点 x_0 的影响区域。

现在用 h 和 τ 分别表示 x 和 t 的步长，

$$r = \frac{\tau}{h},\ x_j = jh,\ t_k = k\tau,\ u^k(x) = u(x, t_k),$$

那末解 (9.1) 的最简单的差分格式是

$$\begin{cases} u^k_{t\bar{t}}(x) - u^k_{x\bar{x}}(x) = 0, & -\infty < x < \infty,\ k \geqslant 1, \\ u^0_t(x) = U_1(x), & -\infty < x < \infty, \\ u^0(x) = U_0(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases} \tag{9.4}$$

显然，$u^k(x)$ 只依赖于线段 $[x - kh, x + kh]$ 上的初始值，这个线段被称为 $u^k(x)$ 的依赖区间. 反之，解受点 x_0 处的初始值影响的点集是界于直线 $x + \frac{t}{r} = x_0$ 和 $x - \frac{t}{r} = x_0$ 之间的扇形中的网格点，它被称为 x_0 点的影响区域. 差分格式 (9.4) 的收敛性与解的依赖区间大小，即 r 的大小密切相关.

定理 9.1 若 $r > 1$，则存在无限多个初始值 $U_0(x)$ 和 $U_1(x)$，使得 $u^k(x)$ 不收敛到相应的 $U^k(x)$.

证明 $u^k(x)$ 只与区间 $\left[x - \frac{t_k}{r},\ x + \frac{t_k}{r}\right]$ 上的初值有关，而这个区间被包含在区间 $[x - t_k,\ x + t_k]$ 之内. 如果 $U_0(x)$ 和 $U_1(x)$ 决定了 (9.1) 的解 $U(x, t)$，则总可改变 $U_0(x)$ 和 $U_1(x)$ 在 $\left[x - t_k,\ x - \frac{t_k}{r}\right]$ 和 $\left[x + \frac{t_k}{r},\ x + t_k\right]$ 上的值，从而得到新的解 $\bar{U}^k(x)$，但与此相对应的差分解 $\bar{u}^k(x)$ 却不改变，因此 $\bar{u}^k(x)$ 不收敛到 $\bar{U}^k(x)$.

注记 9.1 当 $r > 1$ 时，却存在一些特殊的初值，对于它来说，格式 (9.4) 是收敛的. 例如 Dahlquist (1954) 指出，如果初值是解析函数，则至少在某个子区间$\{x|a < x < b\}$上，由格式(9.4)得到的解收敛到相应的连续问题的解.

下面来推导 $r < 1$ 时格式 (9.4) 的解的表达式，为此先考虑下列问题的解

$$\begin{cases} v^k_{t\bar{t}}(x) - v^k_{x\bar{x}}(x) = 0, & -\infty < x < \infty,\ k \geqslant 1, \\ v^0_t(x) = 0, & -\infty < x < \infty, \\ v^0(x) = U_0(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases} \tag{9.5}$$

令 $v^k(x)=\varphi(x)\psi^k$，将它代入上式后即得到

$$\begin{cases}\varphi_{x\bar{x}}(x)=c\varphi(x),\\ \psi^k_{t\bar{t}}=c\psi^k,\end{cases}\tag{9.6}$$

其中 c 是常数. 因为

$$(\sin mx)_{x\bar{x}}=-\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{mh}{2}\sin mx,$$

所以，若 $c=c_m=-\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{mh}{2}$，则 $\sin mx$ 恰为 (9.6) 第一式的解，并由第二式得到

$$\psi^k_{t\bar{t}}=-\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{mh}{2}\psi^k.$$

由于

$$(\sin\mu k\tau)_{t\bar{t}}=-\frac{4}{\tau^2}\sin^2\frac{\mu\tau}{2}\sin\mu k\tau,$$

因此，若 $\sin\frac{mh}{2}\neq 0$，并且

$$\sin\frac{\mu_m\tau}{2}=r\sin\frac{mh}{2},\tag{9.7}$$

则 $\sin\mu_m k\tau$ 恰为 (9.6) 第二式的解. 由于 $r<1$，(9.7) 的全部解 μ_m 都是实的，且可假定 $-\pi<\frac{\mu_m\tau}{2}<\pi$. 类似地可证明 $\cos\mu_m k\tau$ 也是(9.6)第二式的解，从而 $\psi^k_m=c_m\cos\mu_m k\tau+d_m\sin\mu_m k\tau$ 也是它的解. 又因为 $\psi^0_m=1$，$\psi^1_{m,t}=0$，因此

$$\begin{cases}c_m=1,\\ c_m\cos\mu_m\tau+d_m\sin\mu_m\tau=1,\end{cases}$$

并由此得到

$$d_m=\frac{1-\cos\mu_m\tau}{\sin\mu_m\tau}=\frac{\sin\frac{\mu_m\tau}{2}}{\cos\frac{\mu_m\tau}{2}},$$

和

$$\phi_m^k = \frac{\cos\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)\mu_m\tau\right]}{\cos\frac{\mu_m\tau}{2}}.$$

若 $\sin\frac{mh}{2}=0$，则可取 $\phi_m^k=1$.

如果下列级数收敛，则它显然是 (9.5) 的解，

$$v^k(x)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m\phi_m^k\sin mx. \tag{9.8}$$

因为 $\sum_{m=1}^{\infty}|a_m|$ 是收敛的，并且当 $r<1$ 时，可以由 (9.7) 得到

$$|\phi_m^k|\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\mu_m\tau}{2}}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-r^2}},$$

所以 (9.8) 确实收敛.

其次考虑下列问题的解

$$\begin{cases}w_{\bar{t}t}^k(x)-w_{\bar{x}x}^k(x)=0, & -\infty<x<\infty,\ k\geqslant 1,\\ w_{\bar{t}}^1(x)=U_1(x), & -\infty<x<\infty,\\ w^0(x)=0, & -\infty<x<\infty.\end{cases} \tag{9.9}$$

假设 $w^k(x)$ 是 (9.9) 的解. 令 $w^{-k}(x)=-w^k(x)$，则 (9.9) 对 $k<0$ 也有意义，而 $z^k(x)=w^k(x)-w^{k-1}(x)$ 也满足同样的方程. 因为

$$z^0(x)=w^0(x)-w^{-1}(x)=w^0(x)+w^1(x)=\tau U_1(x),$$

所以由 (9.5) 和 (9.8) 得到

$$z^k(x)=\tau\sum_{m=1}^{\infty}b_m\phi_m^k\sin mx.$$

从而

$$w^k(x)=\sum_{\sigma=0}^{k-1}z^{k-\sigma}(x)=\tau\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\sigma=1}^{k}b_m\phi_m^\sigma\sin mx, \tag{9.10}$$

只要这个级数是收敛的. 由于当 $\sum_{m=1}^{\infty}|b_m|$ 收敛及 $r<1$ 时，

$$\left|\tau\sum_{\sigma=1}^{k}\psi_m^{\sigma}\sin mx\right|\leqslant\frac{k\tau}{\sqrt{1-r^2}},$$

因此 (9.10) 确实是收敛的。

最后，(9.4) 的解是

$$u^k(x)=v^k(x)+w^k(x). \tag{9.11}$$

下面来证明近似解的收敛性. 由 (9.7) 知道，对于固定的 m，当 $h\to 0$ 时 $\mu_m\to m$，从而 $\phi_m^k\to\cos mk\tau$，故由 (9.8) 的一致收敛性得到

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}v^k(x)&=\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos mk\tau\sin mx\\&=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}a_m\sin m(x+k\tau)+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}a_m\sin m(x-k\tau)\\&=\frac{1}{2}U_0(x+k\tau)+\frac{1}{2}U_0(x-k\tau).\end{aligned}$$

又对固定的 m 以及 $1\leqslant\sigma\leqslant k$，当 $h\to 0$ 时，ψ_m^{σ} 一致收敛到 $\cos m\sigma\tau$，所以有

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}w^k(x)&=\lim_{\tau\to 0}\tau\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\sigma=1}^{k}b_m\cos m\sigma\tau\sin mx\\&=\frac{1}{2}\int_0^{k\tau}\left[\sum_{m=1}^{\infty}b_m\sin m(x+\xi)+\sum_{m=1}^{\infty}b_m\sin m(x-\xi)\right]d\xi\\&=\frac{1}{2}\int_0^{k\tau}(U_1(x+\xi)+U_1(x-\xi))d\xi\\&=\frac{1}{2}\int_{x-k\tau}^{x+k\tau}U_1(\xi)d\xi,\end{aligned}$$

因此由 (9.11) 得到

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}u^k(x)=&\frac{1}{2}(U_0(x+k\tau)+U_0(x-k\tau))\\&+\frac{1}{2}\int_{x-k\tau}^{x+k\tau}U_1(\xi)d\xi.\end{aligned} \tag{9.12}$$

由于 $U_0(x)\in C^2$，$U_1(x)\in C^1$，故可直接验证上式右端恰为 (9.1) 的解.

当 $r=1$ 时，则可用 Courant, Friedrichs Lewy (1928) 的方法来分析。此时由 (9.4) 得到

$$u^{k+1}(x)-u^{k}(x-h)=u^{k}(x+h)-u^{k-1}(x)=\cdots$$
$$=u^{1}(x+kh)-u^{0}(x+kh-h).$$

沿着特征线对上式求和后得到

$$\begin{aligned}u^{k+1}(x)&=U_0(x-kh-h)+\sum_{\sigma=0}^{k}(u^{1}(x-kh+2\sigma h)\\&\qquad-u^{0}(x-kh-h+2\sigma h))\\&=U_0(x-kh-h)+\sum_{\sigma=0}^{k}\{hU_1(x-kh+2\sigma h)\\&\qquad+U_0(x-kh+2\sigma h)-U_0(x-kh-h+2\sigma h)\}.\end{aligned}$$

由于 $U_0\in C^2$, $U_1\in C^1$, 所以当 $h\to 0$ 时,上式右端趋向于

$$\begin{aligned}&U_0(x-kh)+\frac{1}{2}\int_0^{2kh}U_1(x-kh+\xi)d\xi\\&\qquad+\frac{1}{2}\int_0^{2kh}\frac{\partial U_0}{\partial x}(x-kh+\xi)d\xi\\&=\frac{1}{2}\int_{x-kh}^{x+kh}U_1(\xi)d\xi+\frac{1}{2}(U_0(x+kh)+U_0(x-kh)),\end{aligned}$$

从而得到与 (9.12) 同样的结果.

综合上面的分析,就得到下面的结果.

定理 9.2 若 $U_0(x)\in C^2$, $U_1(x)\in C^1$, $r\leqslant 1$, 则当 $h\to 0$ 时, (9.4) 的解收敛到 (9.1) 的解.

O'Brien, Hyman, Kaplan (1951) 最早用 Fourier 方法分析 (9.4) 的稳定性，Douglas (1956a) 还指出了它与收敛性的关系,但都与所选取的范数有关. 当 $r\leqslant 1$ 时,格式 (9.4) 的解是点点收敛的,当然按 $\|u^k\|_{L^2}$ 范数收敛,从而由 Lax 定理，格式也按此范数稳定。但若引入

$$v^k(x)=\frac{u^k(x)-u^{k-1}(x)}{\tau},$$

$$w^k\left(x-\frac{h}{2}\right)=\frac{u^k(x)-u^k(x-h)}{h},$$

则 (9.4) 等价于

$$
\begin{cases}
\dfrac{v^{k+1}(x)-v^{k}(x)}{\tau}=\dfrac{w^{k}\left(x+\dfrac{h}{2}\right)-w^{k}\left(x-\dfrac{h}{2}\right)}{h}, \\
\dfrac{w^{k+1}\left(x-\dfrac{h}{2}\right)-w^{k}\left(x-\dfrac{h}{2}\right)}{\tau}=\dfrac{v^{k+1}(x)-v^{k+1}(x-h)}{h}.
\end{cases}
\tag{9.13}
$$

把第一式中的 $v^{k+1}(x)$ 代入第二式，然后应用分离变量法得到增长矩阵

$$
G(\beta,\tau)=\begin{pmatrix} 1 & ia \\ ia & 1-a^2 \end{pmatrix},
$$

其中 $a=2r\sin\dfrac{\beta h}{2}$. 当 $r\leqslant 1$ 时，$G(\beta,\tau)$ 的特征值是

$$
\begin{cases}
\lambda^{(1)}(G)=\dfrac{2-a^2+ia\sqrt{4-a^2}}{2}, \\
\lambda^{(2)}(G)=\dfrac{2-a^2-ia\sqrt{4-a^2}}{2}.
\end{cases}
\tag{9.14}
$$

显然，$|\lambda^{(1)}(G)|=|\lambda^{(2)}(G)|=1$，故满足 Von Neumann 条件。

因为当 $r<1$ 及 $0<\beta h<2\pi$ 时，$\lambda^{(1)}\neq\lambda^{(2)}$，而当 $r<1$，$\beta h=0$ 或 2π 时，$G(\beta,\tau)$ 是单位矩阵，所以总有两个线性无关的特征向量，规范化后即得到

$$
\eta^{(1)}=\frac{1}{\sqrt{2}\,a}\begin{pmatrix} ia \\ \lambda^{(1)}-1 \end{pmatrix},\quad \eta^{(2)}=\frac{1}{\sqrt{2}\,a}\begin{pmatrix} ia \\ \lambda^{(2)}-1 \end{pmatrix},
$$

其 Gram 行列式为

$$
\frac{1}{2a^2}\begin{vmatrix} ia & \lambda^{(1)}-1 \\ ia & \lambda^{(2)}-1 \end{vmatrix}=\frac{i}{2a}(\lambda^{(2)}-\lambda^{(1)})=\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}\geqslant\varepsilon>0,
$$

故由定理 4.6，格式 (9.4) 是稳定的。

若 $r=1$，则当 $\beta h=\pi$ 时，$a=2$，所以 $\lambda^{(1)}=\lambda^{(2)}=-1$，并且 $G(\beta,\tau)$ 的初等因子的次数为 2，因此存在相似变换 S，使得

$$G(\beta, \tau) = S\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} S^{-1},$$

从而

$$G^k(\beta, \tau) = S[G(\beta, \tau)]^k S^{-1} = S\begin{pmatrix} (-1)^k & (-1)^{k-1}k \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix} S^{-1}.$$

显然，$G^k(\beta, \tau)$ 不一致有界，因此 (9.4) 是按范数 $\|v^k\|_{L^2}$，$\|w^k\|_{L^2}$ 不稳定的.

定理 9.3 格式 (9.13) 对任意初值按范数 $\|v^k\|_{L^2}$，$\|w^k\|_{L^2}$ 稳定的充要条件是 $r < 1$.

9.2 非线性格式的能量方法

研究高阶双曲型方程差分格式的另一个重要方法是能量法. Less (1960b) 等最早把能量法应用于线性方程，后来推广到一些特殊的非线性方程. 郭本瑜 (1982a) 等则把它应用到更一般的非线性问题. 本节考虑下列特殊的非线性问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = F\left(x, t, U, \dfrac{\partial U}{\partial t}, \dfrac{\partial U}{\partial x}\right), \\ \qquad\qquad -\infty < x < \infty,\ 0 < t \leqslant T, \\ U(x, t) = U(x+1, t),\ -\infty < x < \infty,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \\ \dfrac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = U_1(x),\ -\infty < x < \infty, \\ U(x, 0) = U_0(x),\ -\infty < x < \infty. \end{cases} \tag{9.15}$$

假定 (9.15) 有唯一的古典解，并且存在正常数 c_0，使得对一切 x，t 和 l，都有

$$\left|\frac{\partial F(x, t, y_1, y_2, y_3)}{\partial y_l}\right| \leqslant c_0,\ l = 1, 2, 3, \tag{9.16}$$

记 $\mathscr{I}_h = \{x | x = jh,\ 1 \leqslant j \leqslant J-1,\ Jh = 1 + h\}$，并采用 § 4.3 中的记号. 今用下列显式格式解 (9.15)，

$$\begin{cases} u^k_{t\bar{t}}(x) - u^k_{x\bar{x}}(x) = F(x, t_k, u^k(x), u^k_{\hat{t}}(x), u^k_{\hat{x}}(x)), \\ \qquad\qquad\qquad x \in \mathscr{I}_h,\ k \geqslant 1, \\ u^k(x) = u^k(x+1), \qquad x \in \mathscr{I}_h,\ k \geqslant 0, \end{cases} \tag{9.17}$$

$$\begin{cases} u_t^0(x) = U_1(x), & x \in \mathscr{J}_h, \\ u^0(x) = U_0(x), & x \in \mathscr{J}_h. \end{cases}$$

假定 $u^0(x)$，$u_t^0(x)$ 和右端计算发生了误差 $\tilde{u}^0(x)$，$\tilde{u}_t^0(x)$ 和 $\tilde{f}^k(x)$，则 $u^k(x)$ 的误差 $\tilde{u}^k(x)$ 满足下列方程

$$\begin{cases} \tilde{u}_{t\bar{t}}^k(x) - \tilde{u}_{x\bar{x}}^k(x) = \tilde{F}^k(x) + \tilde{f}^k(x), & x \in \mathscr{J}_h,\ k \geqslant 1, \\ \tilde{u}^k(x) = \tilde{u}^k(x+1), & x \in \mathscr{J}_h,\ k \geqslant 0, \end{cases} \tag{9.18}$$

其中

$$\tilde{F}^k(x) = F(x, t_k, u^k(x) + \tilde{u}^k(x), u_{\hat{x}}^k(x) + \tilde{u}_{\hat{x}}^k(x),$$
$$u_{\hat{t}}^k(x) + \tilde{u}_{\hat{t}}^k(x)) - F(x, t_k, u^k(x), u_{\hat{x}}^k(x), u_{\hat{t}}^k(x)),$$

并由 (9.16) 得到

$$|\tilde{F}^k(x)| \leqslant c_0(|\tilde{u}^k(x)| + |\tilde{u}_{\hat{x}}^k(x)| + |\tilde{u}_{\hat{t}}^k(x)|). \tag{9.19}$$

下面来建立关于误差的能量不等式，把 (9.18) 对 $2\tilde{u}_{\hat{t}}^k(x)$ 求内积，则由引理 4.12 和 4.15 得到

$$\|\tilde{u}_t^k\|_{\bar{t}}^2 + |\tilde{u}^k|_{1,t}^2 - \frac{\tau^2}{2}|\tilde{u}_t^k|_{1,\bar{t}}^2 = 2(\tilde{F}^k + \tilde{f}^k, \tilde{u}_{\hat{t}}^k).$$

把上式对 $t = \tau, 2\tau, \cdots, (k-1)\tau$ 求和，即有

$$\|\tilde{u}_t^{k-1}\|^2 + \frac{1}{2}|\tilde{u}^k|_1^2 + \frac{1}{2}|\tilde{u}^{k-1}|_1^2 - \frac{\tau^2}{2}|\tilde{u}_t^{k-1}|_1^2$$
$$= \|\tilde{u}_t^0\|^2 + \frac{1}{2}|\tilde{u}^1|_1^2 + \frac{1}{2}|\tilde{u}^0|_1^2 - \frac{\tau^2}{2}|\tilde{u}_t^0|_1^2$$
$$+ 2\tau\sum_{\xi=1}^{k-1}(\tilde{F}^\xi + \tilde{f}^\xi, \tilde{u}_{\hat{t}}^\xi). \tag{9.20}$$

对任意的 $a > 0$，都有

$$\frac{\tau^2}{2}|\tilde{u}_t^{k-1}|_1^2 = \frac{\tau^2(1-a)}{4}|\tilde{u}_t^{k-1}|_1^2 + \frac{\tau^2(1+a)}{4}|\tilde{u}_t^{k-1}|_1^2.$$

显然

$$\frac{\tau^2}{4}|\tilde{u}_t^{k-1}|_1^2 \leqslant \frac{1}{2}|\tilde{u}^k|_1^2 + \frac{1}{2}|\tilde{u}^{k-1}|_1^2.$$

又当 $r \leqslant \sqrt{\frac{r_0}{1+a}}$，$r_0 < 1$ 时，

$$\frac{\tau^2}{4}(1+a)|\tilde{u}_t^{k-1}|_1^2 \leqslant r^2(1+a)\|\tilde{u}_t^{k-1}\|^2 \leqslant r_0\|\tilde{u}_t^{k-1}\|^2,$$

所以

$$\frac{\tau^2}{2}|\tilde{u}_t^{k-1}|_1^2 \leqslant \frac{1-a}{2}|\tilde{u}^k|_1^2 + \frac{1-a}{2}|\tilde{u}^{k-1}|_1^2 + r_0\|\tilde{u}_t^{k-1}\|^2. \tag{9.21}$$

此外，根据 (9.19)，存在正常数 c_1，使得

$$|2(\tilde{F}^\xi + \tilde{f}^\xi, \tilde{u}_t^\xi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|\tilde{u}_t^\xi\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|\tilde{u}_t^{\xi-1}\|^2 + \frac{c_1}{\varepsilon}(\|\tilde{u}^\xi\|^2 + \|\tilde{u}_t^{\xi-1}\|^2 + |\tilde{u}^\xi|_1^2 + \|\tilde{f}^\xi\|^2). \tag{9.22}$$

因为

$$\tilde{u}^k(x) = \tau\sum_{\xi=0}^{k-1}\tilde{u}_t^\xi(x) + \tilde{u}^0(x),$$

所以

$$(\tilde{u}^k(x))^2 \leqslant 2(\tilde{u}^0(x))^2 + 2k\tau^2\sum_{\xi=0}^{k-1}(\tilde{u}_t^\xi(x))^2,$$

故当 $k\tau \leqslant T$ 时，

$$\|\tilde{u}^k\|^2 \leqslant 2\|\tilde{u}^0\|^2 + 2T\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}\|\tilde{u}_t^\xi\|^2.$$

把上式和 (9.21)，(9.22) 代入 (9.20)，就得到

$$(1-r_0-\varepsilon\tau)\|\tilde{u}_t^{k-1}\|^2 + \frac{a}{2}|\tilde{u}^k|_1^2 + \left(\frac{a}{2} - \frac{\tau c_1}{\varepsilon}\right)|\tilde{u}^{k-1}|_1^2$$

$$\leqslant \frac{2Tc_1}{\varepsilon}\|\tilde{u}^0\|^2 + \frac{1}{2}|\tilde{u}^0|_1^2 + \frac{1}{2}|\tilde{u}^1|_1^2 + \|\tilde{u}_t^0\|^2$$

$$+ c_2\tau\sum_{\xi=0}^{k-2}(\|\tilde{u}_t^\xi\|^2 + |\tilde{u}^{\xi+1}|_1^2 + \|\tilde{f}^{\xi+1}\|^2).$$

令 ε 适当小，$\tau < \frac{\varepsilon a}{2c_1}$，考虑到 $\tilde{u}^1(x) = \tilde{u}^0(x) + \tau\tilde{u}_t^0(x)$，就有

$$(1-r_0-\varepsilon\tau)\|\tilde{u}_t^{k-1}\|^2 + \frac{a}{2}|\tilde{u}^k|_1^2$$

$$\leqslant c_3\left(\|\tilde{u}^0\|^2 + |\tilde{u}^0|_1^2 + \|\tilde{u}_t^0\|^2 + \tau\sum_{\xi=1}^{k-1}\|f^\xi\|^2\right)$$

$$+ c_4\tau\sum_{\xi=0}^{k-2}(\|\tilde{u}_t^\xi\|^2 + |\tilde{u}^{\xi+1}|_1^2).$$

记

$$\tilde{E}^k = (1 - r_0 - \varepsilon\tau)\|\tilde{u}_t^{k-1}\|^2 + \frac{a}{2}|\tilde{u}^k|_1^2,$$

$$\tilde{\rho}(k\tau) = c_3\left(\|\tilde{u}^0\|^2 + |\tilde{u}^0|_1^2 + \|\tilde{u}_t^0\|^2 + \tau\sum_{\xi=1}^{k-1}\|\tilde{f}^\xi\|^2\right),$$

则由上式得到

$$\tilde{E}^k \leqslant \tilde{\rho}(k\tau) + c_5\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}\tilde{E}^\xi.$$

最后在注记 4.10 中令 $E^k = \tilde{E}^k$, $\omega(k\tau) = \tilde{\rho}(k\tau)$，即得到下列结果：

定理 9.4 若 $r < \sqrt{\frac{r_0}{1+a}}$, $a > 0$, $r_0 < 1$，则对一切 $k\tau \leqslant T$，都有

$$\tilde{E}^k \leqslant \tilde{\rho}(k\tau)e^{c_6 k\tau}.$$

下面来考虑收敛性．假设 $U(x, t)$ 充分光滑，

$$\tilde{u}^k(x) = u^k(x) - U^k(x),$$

则有

$$\begin{cases} \tilde{u}_{t\bar{t}}^k(x) - \tilde{u}_{x\bar{x}}^k(x) = \tilde{F}^k(x) + \tilde{f}^k(x), & x \in \mathscr{J}_h, \quad k \geqslant 1, \\ \tilde{u}^k(x) = \tilde{u}^k(x+1), & x \in \mathscr{J}_h, \quad k \geqslant 0, \\ \tilde{u}_t^0(x) = \tilde{f}^0(x), & x \in \mathscr{J}_h, \\ \tilde{u}^0(x) = 0, & x \in \mathscr{J}_h, \end{cases}$$

其中 $\tilde{f}^k(x)$ 是逼近误差，$|\tilde{f}^k(x)| = O(h)$,

$$\tilde{F}^k(x) = F(x, t_k, u^k(x), u_{\bar{x}}^k(x), u_{\hat{x}}^k(x))$$

$$- F(x, t_k, U^k(x), U_{\bar{x}}^k(x), U_{\hat{x}}^k(x)).$$

从而由定理 9.4 得到下面的定理．

定理 9.5 若 $r < \sqrt{\frac{r_0}{1+a}}$, $a > 0$, $r_0 < 1$，则当 $h \to 0$ 时，

$$\|u_t^k - U_t^k\|^2 + |u^k - U^k|_1^2 + \|u^k - U^k\|^2 = O(h^2) \to 0.$$

关于能量法还有许多其它内容，Less (1962) 还用它研究了多维二阶双曲型方程初、边值问题的交替方向法.

9.3 孤波，Korteweg-de Vries 方程的初值问题

前面我们研究过激波和行波的计算方法. 另一类重要的波动是孤波，所谓孤波是指满足一定边界条件的形如 $U(x-\beta t)$ 的解. 如果一个孤波解与别的孤波解相碰撞时，保持速度和形状不变，则称它们是孤立子.

Russell 在 1834 年最早发现了孤波现象 (见 Russell (1844)). 后，Korteweg, de Vries (1895) 研究了下列方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} + U\dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial^3 U}{\partial x^3} = 0, & -\infty < x < \infty,\ 0 < t \leq T \\ U(x, 0) = U_0(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases} \tag{9.23}$$

此方程有孤波解. 例如下列铃状孤波 (见 Bullough, Caudrey (1980))

$$U(x, t) = U(\infty) + a\operatorname{sech}^2\sqrt{\frac{a}{12}}\left(x - U(\infty) - \frac{at}{3}\right),$$

其中 a 是常数.

Zabusky, Kruskal (1965) 最早计算了 (9.23) 的周期解，发现了孤立子的重要性质，并由此开辟了孤立子研究的新时代.

Korteweg-de Vries 方程的另一个重要性质是它的解满足守恒律. Scott, Chu, Mclaughlin (1973) 曾揭示了守恒律与运动稳定性的关系. Lax (1976) 则指出，(9.23) 的解满足无限多个守恒律，例如，若假设 $U(x, t) = U(x+1, t)$，则

$$\int_0^1 U(x, t)\,dx = c_1, \tag{9.24}$$

$$\int_0^1 U^2(x, t)\,dx = c_2, \tag{9.25}$$

$$\int_0^1 \left[U^3(x, t) - 3\left(\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2}\right)^2\right] dx = c_3, \tag{9.26}$$

由于差分解一般不能满足全部类似的守恒律，所以只能模拟其中的几个.

设 $\mathscr{I}_h$ 如前节所示，计算 (9.23) 的周期解的格式为

$$
\begin{cases}
u_t^k(x)+\theta^k\tau u_{t\bar t}^k(x)+J(u^k(x)+\delta\tau u_t^k(x),\ u^k(x)) \\
\qquad +u_{x\bar x\hat x}^k(x)+\sigma\tau u_{tx\bar x\hat x}^k(x)=0, & x\in\mathscr{I}_h,\ k\geqslant 0, \\
u^k(x)=u^k(x+1), & x\in\bar{\mathscr{I}}_h,\ k\geqslant 0, \\
u^0(x)=U_0(x), & x\in\bar{\mathscr{I}}_h,
\end{cases}
\tag{9.27}
$$

其中 $J(v,w)$ 如 (6.27) 所示，$0\leqslant\delta\leqslant 1$，$0\leqslant\sigma\leqslant 1$，$-\frac{1}{2}\leqslant\theta^k\leqslant 0$，但总有 $\theta^0=0$.

若 $\delta=\sigma$，$-\frac{1}{2}<\theta^k\leqslant 0$，那末 (9.27) 即为郭本瑜 (1978) 格式.

下面来分析守恒性，如果 $\delta=\sigma=0$，$\theta^k\equiv 0$，那末

$$u_t^k(x)+J(u^k(x),u^k(x))+u_{x\bar x\hat x}^k(x)=0.$$

把上式对一切 $x\in\mathscr{I}_h$ 求和，则得到离散形式的一次守恒律

$$h\sum_{x\in\mathscr{I}_h}u^{k+1}(x)=h\sum_{x\in\mathscr{I}_h}u^k(x).\tag{9.28}$$

把它对 $u^k(x)$ 求内积，注意到 (6.30) 和

$$(v_{x\bar x\hat x},\ w)+(v,\ w_{x\bar x\hat x})=0,\tag{9.29}$$

就得到近似的离散形式的二次守恒律

$$\|u^{k+1}\|^2=\|u^k\|^2+\tau^2\|u_t^k\|^2.$$

若 $\delta=\sigma=\frac{1}{2}$，$\theta^k\equiv 0$，则有

$$
\begin{aligned}
&u_t^k(x)+\frac{1}{2}J(u^k(x)+u^{k+1}(x),\ u^k(x))+\frac{1}{2}u_{x\bar x\hat x}^k(x) \\
&\qquad+\frac{1}{2}u_{x\bar x\hat x}^{k+1}(x)=0.
\end{aligned}
\tag{9.30}
$$

不难证明，它的解满足二次守恒律

$$\|u^{k+1}\|^2 = \|u^k\|^2. \tag{9.31}$$

由于(9.28)和(9.31)分别模拟了(9.24)和(9.25)，所以相应的格式会给出较好的数值结果．如果用

$$\frac{1}{4} J(u^k(x) + u^{k+1}(x), u^k(x) + u^{k+1}(x))$$

代替(9.30)中的

$$\frac{1}{2} J(u^k(x) + u^{k+1}(x), u^k(x)),$$

那末相应的解还同时满足(9.28)和(9.31).

下面来分析稳定性．假设 $\theta^k \equiv 0$，而 $u^k(x)$ 和(9.27)的右端发生误差 $\tilde{u}^k(x)$ 和 $\tilde{f}^k(x)$，则得到

$$\begin{aligned}
&\tilde{u}_t^k(x) + J(\tilde{u}^k(x) + \delta\tau\tilde{u}_t^k(x), u^k(x) + \tilde{u}^k(x)) \\
&\quad + J(u^k(x) + \delta\tau u_t^k(x), \tilde{u}^k(x)) + \tilde{u}^k_{x\bar{x}\hat{x}}(x) \\
&\quad + \sigma\tau\tilde{u}^k_{tx\bar{x}\hat{x}}(x) = \tilde{f}^k(x).
\end{aligned} \tag{9.32}$$

把上式对 $2\tilde{u}^k(x)$ 求内积．由(6.30)，(9.29)和引理 4.12 得到

$$\begin{aligned}
&\|\tilde{u}^k\|_t^2 - \tau\|\tilde{u}_t^k\|^2 + 2\delta\tau(\tilde{u}^k, J(\tilde{u}_t^k, u^k + \tilde{u}^k)) \\
&\quad + 2(\tilde{u}^k, J(u^k + \delta\tau u_t^k, \tilde{u}^k)) + 2\sigma\tau(\tilde{u}^k, \tilde{u}^k_{tx\bar{x}\hat{x}}) \\
&= 2(\tilde{u}^k, \tilde{f}^k).
\end{aligned}$$

再把(9.32)对 $m\tau\tilde{u}_t^k(x)$ 求内积，则由(6.30)和(9.29)得到

$$\begin{aligned}
&m\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2 + m\tau(\tilde{u}_t^k, J(\tilde{u}^k, u^k + \tilde{u}^k)) + m\tau(\tilde{u}_t^k, J(u^k \\
&\quad + \delta\tau u_t^k, \tilde{u}^k)) + m\tau(\tilde{u}_t^k, \tilde{u}^k_{x\bar{x}\hat{x}}) = m\tau(\tilde{u}_t^k, \tilde{f}^k).
\end{aligned}$$

把以上两式相加后得到

$$\begin{aligned}
&\|\tilde{u}^k\|_t^2 + \tau(m - 1 - \varepsilon)\|\tilde{u}_t^k\|^2 + \sum_{l=1}^{4} F_l^k \leqslant \|\tilde{u}^k\|^2 \\
&\quad + \left(1 + \frac{\tau m^2}{4\varepsilon}\right)\|\tilde{f}^k\|^2,
\end{aligned} \tag{9.33}$$

其中

$$\begin{aligned}
F_1^k &= 2(\tilde{u}^k, J(u^k + \delta\tau u_t^k, \tilde{u}^k)), \\
F_2^k &= \tau(m - 2\delta)(\tilde{u}_t^k, J(\tilde{u}^k, u^k + \tilde{u}^k)), \\
F_3^k &= m\tau(\tilde{u}_t^k, J(u^k + \delta\tau u_t^k, \tilde{u}^k)),
\end{aligned}$$

$$F_4^k = \tau(m-2\sigma)(\tilde{u}_t^k, \tilde{u}_{\bar{x}xx}^k).$$

下面估计 $|F_i^k|$。首先由 § 6.3 中的分析得到

$$|F_1^k| \leqslant M_1\|\tilde{u}^k\|^2. \tag{9.34}$$

又由引理 4.2 和引理 4.3 得到

$$|F_2^k| \leqslant \varepsilon\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2 + \frac{\tau M_2(m-2\delta)^2}{\varepsilon}$$

$$\times\left(\|\tilde{u}^k\|^2 + |\tilde{u}^k|_1^2 + \frac{1}{h}\|\tilde{u}^k\|^2|\tilde{u}^k|_1^2\right). \tag{9.35}$$

进一步有

$$|F_2^k| \leqslant \varepsilon\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2 + \frac{\tau M_3(m-2\delta)^2}{\varepsilon h^2}\left(\|\tilde{u}^k\|^2 + \frac{1}{h}\|\tilde{u}^k\|^4\right). \tag{9.36}$$

类似地有

$$|F_3^k| \leqslant \varepsilon\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2 + \frac{\tau M_4 m^2}{\varepsilon h^2}\|\tilde{u}^k\|^2, \tag{9.37}$$

$$|F_4^k| \leqslant \varepsilon\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2 + \frac{9\tau(m-2\sigma)^2}{4\varepsilon h^6}\|\tilde{u}^k\|^2. \tag{9.38}$$

把以上各估计式代入 (9.33) 后得到

$$\|\tilde{u}^k\|_t^2 + \tau(m-1-4\varepsilon)\|\tilde{u}_t^k\|^2 \leqslant M_5\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$\times\left(\left(1+\frac{\tau}{h^2}\right)\|\tilde{u}^k\|^2 + \frac{\tau(m-2\sigma)^2}{h^6}\|\tilde{u}^k\|^2\right.$$

$$\left. + \frac{\tau(m-2\delta)^2}{h^3}\|\tilde{u}^k\|^4 + \|\tilde{f}^k\|^2\right).$$

假定 $\frac{\tau}{h^6} \leqslant c_4$，$\varepsilon$ 适当小，并取 $m = 1 + 4\varepsilon + p_0$，$p_0 \geqslant 0$，则

$$\|\tilde{u}^k\|_t^2 + p_0\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2 \leqslant M_6(\|\tilde{u}^k\|^2 + h^3\|\tilde{u}^k\|^4 + \|\tilde{f}^k\|^2).$$

记

$$\tilde{E}^k = \|\tilde{u}^k\|^2 + p_0\tau^2\sum_{\xi=0}^{k-1}\|\tilde{u}_t^\xi\|^2,$$

$$\bar{\rho}(k\tau) = \|\tilde{u}^0\|^2 + M_6\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}\|\tilde{f}^\xi\|^2,$$

则有

$$\tilde{E}^k \leqslant \tilde{\rho}(k\tau) + M_6\tau \sum_{\xi=0}^{k-1} (\|\tilde{u}^\xi\|^2 + h^3\|\tilde{u}^\xi\|^4).$$

最后应用注记 4.10 得到下列结果:

定理 9.6 若 $\frac{\tau}{h^6} \leqslant c_4$, $\tilde{\rho}(T)e^{M_7T} \leqslant \frac{M_8}{h^3}$, 则当 $k\tau \leqslant T(\tilde{\rho})$ 时,

$$\tilde{E}^k \leqslant \tilde{\rho}(k\tau)e^{M_7k\tau}.$$

上述定理表示 (9.27) 的广义稳定性指标 $s \leqslant -1.5$. 若 $U(x, t)$ 适当光滑, 使得 (9.27) 对 (9.23) 的逼近按 l^2 范数是相容的,那末格式是收敛的. 但是,对 τ 的限制太严格.

如果 $\sigma > \frac{1}{2}$, $\frac{\tau}{h^p} \leqslant c_5$, $p \geqslant 2$, 则可取 $m = 2\sigma$, 从而

$$\|\tilde{u}^k\|_t^2 + \tau(2\sigma - 1 - 4\varepsilon)\|\tilde{u}_t^k\|^2$$
$$\leqslant M_9(\|\tilde{u}^k\|^2 + h^{p-3}\|\tilde{u}^k\|^4 + \|\tilde{f}^k\|^2),$$

并由此推出下面的结果:

定理 9.7 若 $\sigma > \frac{1}{2}$, $\frac{\tau}{h^p} \leqslant c_5$, $p \geqslant 2$, $\tilde{\rho}(T)e^{M_{10}T} \leqslant M_{11}h^{3-p}$, 则对一切 $k\tau \leqslant T(\tilde{\rho})$, 都有 $\tilde{E}^k \leqslant \tilde{\rho}(k\tau)e^{M_{10}k\tau}$.

如果 $\sigma = \delta > \frac{1}{2}$, $\frac{\tau}{h^2} \leqslant c_6$, 则可取 $m = 2\sigma = 2\delta$, 从而得到下面的定理.

定理 9.8 若 $\sigma = \delta > \frac{1}{2}$, $\frac{\tau}{h^2} \leqslant c_6$, 则对一切 $\tilde{\rho}(k\tau)$ 和 k, 都有 $\tilde{E}^k \leqslant \tilde{\rho}(k\tau)e^{M_{12}k\tau}$.

显然,在定理 9.8 的条件下,广义稳定性指标 $s = -\infty$.

若 $\delta = \sigma = 0$, $\theta^k = -\frac{1}{2}$, 则 (9.27) 就是 Zabusky, Kruskal (1965) 格式. 它有二阶逼近精度. 它的解满足 (9.28), 但不满足离散形式的二次守恒律. 为了克服这个缺点, Sanz-Serna (1982) 修正了这个格式. 事实上,若记

$$G(u^k(x)) = -J(u^k(x), u^k(x)) - u^k_{\bar{x}x\hat{x}}(x),$$

则可把 Zabusky-Kruskal 格式写成

$$u^{k+1}(x) = u^{k-1}(x) + 2\tau G(u^k(x)).$$

Sanz-Serna 格式为

$$u^{k+1}(x) = u^{k-1}(x) + 2\tau_k G(u^k(x)),$$

其中

$$\tau_k = \begin{cases} \dfrac{(G(u^k), u^k - u^{k-1})}{(G(u^k), G(u^k))}, & \text{若 } G(u^k(x)) \neq 0, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

不难证明

$$\begin{aligned} \|u^{k+1}\|^2 &= (u^{k-1} + 2\tau_k G(u^k), u^{k-1} + 2\tau_k G(u^k)) \\ &= \|u^{k-1}\|^2, \end{aligned}$$

因此它满足二次守恒律.

还有许多其它类型的差分格式. 例如 Greig, Morris (1976) 采用了下列 hopscotch 格式:

$$\begin{aligned} u^k_t(x) + F(u^k(x)) + \delta\tau[F(u^k(x))]_t \\ + u^k_{\bar{x}x\hat{x}}(x) + \delta\tau u^k_{t\,\bar{x}x\hat{x}}(x) = 0, \end{aligned}$$

其中 $F(u^k(x)) = \dfrac{1}{2}[u^k(x)]^2_{\hat{x}}$, 而

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{若 } k + j \text{ 为奇数}, \\ 1, & \text{若 } k + j \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

Vliegenthart (1971) 则采用了下列耗散格式

$$u^k_t(x) + F(u^k(x)) + u^k_{\bar{x}x\hat{x}}(x) - \frac{h^2}{2\tau} u^k_{\bar{x}x}(x) = 0.$$

邬华谟,郭本瑜 (1983b) 提出了一些高精度的三层格式, 而郭本瑜 (1978) 和 Kuo Pen-yu, Wu Hua-mo (1981) 则构造了各种近似满足二次守恒的预估校正格式. 此外, 郭本瑜 (1976, 1978) 还研究了下列广义 Korteweg-de Vries 方程的二次守恒格式

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U^p \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^{2r+1} U}{\partial x^{2r+1}} = 0,$$

其中 p, r 是非负整数.

9.4 Korteweg-de Vries 方程的初、边值问题

近来，Chu Xiang, Baransky (1983) 和 Guo Ben-yu, Weideman (1985) 研究了下列初、边值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial t} + U\dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial^3 U}{\partial x^3} = 0, & 0 < x < \infty,\ 0 < t \leqslant T, \\
U(0,t) = g(t), & 0 \leqslant t \leqslant T, \\
\lim\limits_{x\to\infty} U(x,t) = 0, & 0 \leqslant t \leqslant T, \\
U(x,0) = U_0(x), & 0 \leqslant x < \infty,
\end{cases}
\tag{9.39}
$$

其中 $g(t) \geqslant 0$. Guo Ben-yu (1985c) 指出，若 $g(t)$, $U_0(x)$ 满足一定条件，则可仿 Bui An Ton (1977) 的方法证明，(9.39) 存在唯一的广义解和古典解，它的解满足下列守恒律

$$
\int_0^\infty U^2(x,t)\,dx = \int_0^\infty U_0^2(x)\,dx + \int_0^t \left\{ \frac{2}{3} g^3(\xi) + 2g(\xi) \right.
$$

$$
\left. \times \frac{\partial^2 U(0,\xi)}{\partial x^2} - \left[\frac{\partial U}{\partial x}(0,\xi) \right]^2 \right\} d\xi. \tag{9.40}
$$

设 $\mathscr{I}_h = \{x / x = h, 2h, \cdots\}$, $\bar{\mathscr{I}}_h = \mathscr{I}_h \cup \{0\}$. 可仿照 §6.3 中的方法证明:

命题 9.1 若 $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = 0$, 则

$$
(J(u,w), v) + (J(v,w), u) = A_1(u,v,w),
$$

其中

$$
A_1(u,v,w) = -\frac{1}{6}\big(u(h)v(0)w(h) + u(0)v(h)w(0)
$$

$$
+ u(0)v(h)w(h) + u(h)v(0)w(0)\big).
$$

命题 9.2 若 $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = 0$, 则

$$
(J(w,u), u) = \frac{1}{2}(u^2, w_{\hat{x}}) + \frac{h}{12}(uu_x, w_x)
$$

$$
- \frac{h}{12}(uu_{\bar{x}}, w_{\bar{x}}) - \frac{1}{12}u(0)u(h)\big(w(0) + w(h)\big).
$$

命题 9.3 若 $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = 0$, 则

$$(u, w_{x\bar{x}\hat{x}}) + (u_{x\bar{x}\hat{x}}, w) = A_2(u, w),$$

其中

$$A_2(u, w) = -w(h)u_{x\hat{x}}(0) + w_{\bar{x}}(0)u_{\hat{x}}(h)$$
$$-\frac{1}{2}w_{x\bar{x}}(h)u(0) - \frac{1}{2}w_{x\bar{x}}(0)u(h).$$

证明 由 Abel 公式得到

$$(u, w_{x\bar{x}\hat{x}}) = -(u_{\hat{x}}, w_{x\bar{x}}) - \frac{1}{2}w_{x\bar{x}}(h)u(0)$$
$$-\frac{1}{2}w_{x\bar{x}}(0)u(h),$$

$$-(u_{\hat{x}}, w_{x\bar{x}}) = (u_{x\hat{x}}, w_x) + w_x(0)u_{\hat{x}}(h),$$
$$(u_{x\hat{x}}, w_x) = -(u_{x\bar{x}\hat{x}}, w) - w(h)u_{x\hat{x}}(0),$$

把以上三式相加，即得所证的结论。

解 (9.39) 的最简单格式是

$$\begin{cases} u_t^k(x) + J(u^k(x) + \delta\tau u_t^k(x), u^k(x)) + u_{x\bar{x}\hat{x}}^k(x) \\ \qquad + \sigma\tau u_{t\,x\bar{x}\hat{x}}^k(x) = 0, & x \in \mathscr{I}_h,\ k \geqslant 0, \\ u^k(0) = g^k, & k \geqslant 0, \\ u^k(-h) = 2g^k - u^k(h), & k \geqslant 0, \\ \lim\limits_{x\to\infty} u^k(x) = 0, & k \geqslant 0, \\ u^0(x) = U_0(x), & x \in \mathscr{I}_h. \end{cases} \tag{9.41}$$

若 $\delta = \sigma = 0$，则由命题 9.1—9.3 得到

$$\|u^k\|_t^2 - \tau\|u_t^k\|^2 + A_1(u^k, u^k, u^k) + A_2(u^k, u^k) = 0. \tag{9.42}$$

若 $\delta = \sigma = \frac{1}{2}$，则满足

$$\|u^k\|_t^2 + \frac{1}{4}A_1(u^k + u^{k+1}, u^k + u^{k+1}, u^k)$$
$$+ \frac{1}{4}A_2(u^k + u^{k+1}, u^k + u^{k+1}) = 0. \tag{9.43}$$

由于 (9.42)，(9.43) 模拟了 (9.40)，所以会给出较好的数值结果。

如果用 $\frac{1}{4}J(u^k(x)+u^{k+1}(x),\ u^k(x)+u^{k+1}(x))$ 代替 (9.41) 中的 $J(u^k(x)+\delta\tau u_t^k(x),u^k(x))$，并取 $\sigma=\frac{1}{2}$，那末所得的解满足更精确的守恒关系式

$$\|u^k\|_t^2+\frac{1}{8}A_1(u^k+u^{k+1},u^k+u^{k+1},u^k+u^{k+1})$$
$$+\frac{1}{4}A_2(u^k+u^{k+1},u^k+u^{k+1})=0. \qquad (9.44)$$

不过采用这一格式时，在每一时刻 $k\tau$，都必须求解一个非线性代数方程组。

Guo Ben-yu (1985c) 估计了计算误差．为方便计，只考虑收敛性．用 $\tilde{f}^k(x)$ 和 $\tilde{g}^k(x)$ 表示内点与边界点上的逼近误差，

$$\tilde{u}^k(x)=u^k(x)-U^k(x),$$

于是当 $\delta=\sigma=0$ 时，$\tilde{u}^k(x)$ 满足

$$\begin{cases}\tilde{u}_t^k(x)+J(\tilde{u}^k(x),U^k(x)+\tilde{u}^k(x))+J(U^k(x),\tilde{u}^k(x))\\ \qquad+\tilde{u}_{\bar{x}x\hat{x}}^k(x)=\tilde{f}^k(x), & x\in\mathscr{I}_h,\ k\geqslant 0,\\ \tilde{u}^k(-h)=-\tilde{u}^k(h)+\tilde{g}^k, & k\geqslant 0,\\ \tilde{u}^k(0)=0, & k\geqslant 0,\\ \lim\limits_{x\to\infty}\tilde{u}^k(x)=0, & k\geqslant 0,\\ \tilde{u}^0(x)=0, & x\in\mathscr{I}_h.\end{cases} \qquad (9.45)$$

把 (9.45) 的第一式与 $2\tilde{u}^k(x)$ 求内积．由命题 9.1—9.3 得到

$$\|\tilde{u}^k\|_t^2-\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2+F_1^k+A_1(\tilde{u}^k,\tilde{u}^k,U^k+\tilde{u}^k)$$
$$+A_2(\tilde{u}^k,\tilde{u}^k)=0, \qquad (9.46)$$

其中

$$F_1^k=2(\tilde{u}^k,J(U^k,\tilde{u}^k)).$$

把 (9.45) 的第一式与 $m\tau\tilde{u}_t^k(x)$ 求内积，则得到

$$m\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2+\sum_{l=2}^{4}F_l^k\leqslant\varepsilon\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2+\frac{m^2\tau}{4\varepsilon}\|\tilde{f}^k\|^2,\ \varepsilon>0, \qquad (9.47)$$

其中

$$F_2^k = m\tau(\tilde{u}_t^k, J(\tilde{u}^k, U^k + \tilde{u}^k)),$$
$$F_3^k = m\tau(\tilde{u}_t^k, J(U^k, \tilde{u}^k)),$$
$$F_4^k = m\tau(\tilde{u}_t^k, \tilde{u}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}^k).$$

结合 (9.46) 和 (9.47) 得到

$$\|\tilde{u}^k\|_t^2 + \tau(m - \varepsilon)\|\tilde{u}_t^k\|^2 + \sum_{l=1}^4 F_l^k + A_1(\tilde{u}^k, \tilde{u}^k, U^k + \tilde{u}^k) + A_2(\tilde{u}^k, \tilde{u}^k) \leqslant \|\tilde{u}^k\|^2 + \left(1 + \frac{m^2\tau}{4\varepsilon}\right)\|\tilde{f}^k\|^2. \tag{9.48}$$

由于 $\tilde{u}^k(0) = 0$，因此 $A_1(\tilde{u}^k, \tilde{u}^k, U^k + \tilde{u}^k) = 0$，并经计算得到

$$A_2(\tilde{u}^k, \tilde{u}^k) = -h^{-2}\tilde{u}^k(h)\tilde{u}^k(-h).$$

因为 $\tilde{u}^k(-h) = -\tilde{u}^k(h) + \tilde{g}^k$，故有

$$A_2(\tilde{u}^k, \tilde{u}^k) = h^{-2}((\tilde{u}^k(h))^2 - \tilde{g}^k\tilde{u}^k(h)) \geqslant \frac{-1}{4h^2}|\tilde{g}^k|^2.$$

又可仿前节得到

$$\sum_{l=1}^4 |F_l^k| \leqslant \varepsilon\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2 + M_1\left\{\left(1 + \frac{\tau}{h^6}\right)\|\tilde{u}^k\|^2 + \frac{\tau}{h^3}\|\tilde{u}^k\|^4\right\}.$$

把以上各式代入 (9.48)，并取 ε 适当小，$m = 1 + 2\varepsilon$，则得到

$$\|\tilde{u}^k\|_t \leqslant M_2\left(1 + \frac{\tau}{h^6}\right)\|\tilde{u}^k\|^2 + \frac{M_3\tau}{h^3}\|\tilde{u}^k\|^4 + M_4(\|\tilde{f}^k\|^2 + h^{-2}|\tilde{g}^k|^2).$$

设 $\frac{\tau}{h^6} \leqslant c_1$，并记

$$\tilde{\rho}(k\tau) = M_5\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}(\|\tilde{f}^\xi\|^2 + h^{-2}|\tilde{g}^\xi|^2),$$

则得到

$$\|\tilde{u}^k\|^2 \leqslant \tilde{\rho}(k\tau) + M_6\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}(\|\tilde{u}^\xi\|^2 + h^3\|\tilde{u}^\xi\|^4).$$

最后应用注记 4.10 得到：

定理 9.9 若 $\frac{\tau}{h^4} \leqslant c_1$，$\delta = \sigma = 0$，$\bar{\rho}(T)e^{M_7 T} \leqslant M_8 h^{-3}$，则对一切 $k\tau \leqslant T(\bar{\rho})$，都有 $\|\tilde{u}^k\|^2 \leqslant \bar{\rho}(k\tau)e^{M_7 k\tau}$.

如果 $\sigma = \frac{1}{2}$，并采用差分算子 $\frac{1}{4}\ J(u^k(x) + u^{k+1}(x),\ u^k(x) + u^{k+1}(x))$，则相应的误差方程是

$$\tilde{u}^k_{\bar{t}}(x) + \frac{1}{4} J(\tilde{u}^k(x) + \tilde{u}^{k+1}(x), U^k(x) + U^{k+1}(x) + \tilde{u}^{k+1}(x)$$

$$+ \tilde{u}^k(x)) + \frac{1}{4} J(U^k(x) + U^{k+1}(x), \tilde{u}^k(x) + \tilde{u}^{k+1}(x))$$

$$+ \frac{1}{2}\ \tilde{u}^k_{x\bar{x}\bar{x}}(x) + \frac{1}{2}\tilde{u}^{k+1}_{x\bar{x}\bar{x}}(x) = \tilde{f}^k(x).$$

把上式对 $\tilde{u}^k(x) + \tilde{u}^{k+1}(x)$ 求内积，并注意到 $\tilde{u}^k(0) = 0$ 后得到

$$\|\tilde{u}^k\|^2_{\bar{t}} + \frac{1}{2}(J(U^k + U^{k+1}, \tilde{u}^k + \tilde{u}^{k+1}),\ \tilde{u}^k + \tilde{u}^{k+1})$$

$$+ \frac{1}{4} A_2(\tilde{u}^k + \tilde{u}^{k+1}, \tilde{u}^k + \tilde{u}^{k+1})$$

$$\leqslant \|\tilde{u}^k\|^2 + \|\tilde{u}^{k+1}\|^2 + \|\tilde{f}^k\|^2.$$

因为

$$A_2(\tilde{u}^k + \tilde{u}^{k+1}, \tilde{u}^k + \tilde{u}^{k+1}) \geqslant -M_9 h^{-2}(|\tilde{g}^k|^2 + |\tilde{g}^{k+1}|^2),$$

$$|(J(U^k + U^{k+1}, \tilde{u}^k + \tilde{u}^{k+1}), \tilde{u}^k + \tilde{u}^{k+1})|$$

$$\leqslant M_{10}(\|\tilde{u}^k\|^2 + \|\tilde{u}^{k+1}\|^2),$$

因此

$$\|\tilde{u}^k\|^2_{\bar{t}} \leqslant M_{11}(\|\tilde{u}^k\|^2 + \|\tilde{u}^{k+1}\|^2 + \|\tilde{f}^k\|^2 + h^{-2}|\tilde{g}^k|^2$$

$$+ h^{-2}|\tilde{g}^{k+1}|^2),$$

从而得到下面的结果。

定理 9.10 若采用上述格式则对一切 h，τ，k 都有

$$\|\tilde{u}^k\|^2 \leqslant M_{12}\tau \sum_{\xi=0}^{k} (\|\tilde{f}^\xi\|^2 + h^{-2}|\tilde{g}^\xi|^2).$$

注记 9.2 可以仿照本节的方法，得到上述格式的收敛性。

Guo Ben-yu, Weideman (1985) 还应用(9.41)的第一式计算 $u^k(x)$, $x=2h, 3h, \cdots$, 而用下式计算 $u^k(h)$,

$$u^k(h)=\alpha u^k(0)+\beta u^k(2h)+\gamma u^k(3h)+\nu u^k(4h).$$

若 $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=\nu=0$, 则逼近精度为 $O(h^2)$. 若 $\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=1$, $\gamma=-\frac{1}{3}$, $\nu=0$, 则逼近精度为 $O(h^3)$. 若 $\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{3}{2}$, $\gamma=-1$, $\nu=\frac{1}{4}$, 则具有逼近精度 $O(h^4)$. 数值结果表明,仅当第三种情况时,计算才是稳定的.

另一个重要的问题是孤波解的存在性及其个数. 如果问题(9.23)的初值为

$$U_0(x)=\begin{cases}H, & 0\leqslant x\leqslant D,\\ 0, & \text{否则},\end{cases}$$

那末,孤波数为不超过 $\frac{D}{\pi}\sqrt{\frac{H}{6}}+1$的最大整数(见Hirota(1971)). Guo Ben-yu, Weideman (1985) 对(9.39)进行了数值试验,其中 $U_0(x)\equiv 0$,

$$g(t)=\begin{cases}H, & d_0\leqslant t\leqslant D+d_0,\ d_0>0,\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

计算结果表明,对于适当的 H, D, 也会形成孤波,孤波的数目随着 H, D 的增大而增大. Guo Ben-yu (1985c) 还证明了计算格式的收敛性. Chu Xiang, Baransky (1983) 对梯形波的边值条件进行了数值试验,也得到了类似的结果.

9.5 RLW方程,高精度差分格式

另一类非线性波动方程是下列 RLW 方程,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}+U\dfrac{\partial U}{\partial x}+\alpha U-\dfrac{\partial^3 U}{\partial t\partial x^2}=0, & -\infty<x<\infty,\ 0<t\leqslant T,\\ U(x,0)=U_0(x), & -\infty<x<\infty.\end{cases}\tag{9.49}$$

这一方程又被称为 Benjamin, Bona, Mahony (1972) 方程。 Medeiros, Menzala (1977) 研究了周期解问题。

Peregrine (1966) 最早用下列格式解 (9.49),

$$u_t^k(x) + \frac{1}{2}(u^k(x) + \alpha)(u_{\hat{x}}^k(x) + u_{\hat{x}}^{k+1}(x)) - u_{tx\bar{x}}^k(x) = 0.$$

Eilbeck, McGuire (1975, 1977) 也计算了 (9.49), 但他们的计算显示二个孤波碰撞似乎是弹性的，从而使许多人去寻找这一方程的N孤立子表达式。 后来，Abdulloev, Bogolubsky, Makhankov (1976) 和 Alexander, Morris (1979) 证明了这一碰撞是非弹性的，后来,Olver (1979) 又从理论上证明了 RLW 方程仅具有三个守恒律，从而更加澄清了 RLW 方程与 Korteweg-de vries 方程的重大区别,近来,郭华谟,郭本瑜 (1983a) 构造了一种高精度格式,计算结果不仅表明这种碰撞不是弹性的,而且碰撞后会产生四个波。

郭华谟,郭本瑜 (1983a) 格式的出发点是把 (9.49) 改写为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + G + \alpha U = 0, \\ G = U\dfrac{\partial U}{\partial x}, \\ W = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \\ V = U - W. \end{cases} \tag{9.50}$$

根据 Kreiss 方法 (见 Hirsh (1975)), 我们有

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} + \frac{h^2}{12}\left(\frac{d^2 Z}{dx^2}\right)_{x\bar{x}} = Z_{x\bar{x}} + O(h^4),$$

$$\frac{dZ}{dx} + \frac{h^2}{6}\left(\frac{dZ}{dx}\right)_{x\bar{x}} = Z_{\hat{x}} + O(h^4),$$

于是得到下列格式

$$\begin{cases} \dfrac{dv(x,t)}{dt} + g(x,t) + \alpha u(x,t) = 0, \quad x \in \mathscr{I}_h, \ 0 < t \leqslant T, \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\mathscr{N} w(x,t) = u_{x\bar{x}}(x,t), & x \in \mathscr{I}_h,\ 0 < t \leqslant T, \\
\mathscr{M} g(x,t) = J(u(x,t), u(x,t)), & x \in \mathscr{I}_h,\ 0 < t \leqslant T, \\
u(x,t) = v(x,t) + w(x,t), & x \in \mathscr{I}_h,\ 0 < t \leqslant T,
\end{cases}
\tag{9.51}
$$

其中 $J(u, u)$ 的定义同前,算子 $\mathscr{N}$ 和 $\mathscr{M}$ 的定义如下:

$$
\mathscr{N} w(x,t) = \frac{1}{12}(w(x+h,t) + 10w(x,t) + w(x-h,t)),
$$

$$
\mathscr{M} g(x,t) = \frac{1}{6}(g(x+h,t) + 4g(x,t) + g(x-h,t)).
$$

由(9.51)的第二,四两式,可以把(9.51)进一步改写为

$$
\begin{cases}
\dfrac{dv(x,t)}{dt} + g(x,t) + \alpha u(x,t) = 0, & x \in \mathscr{I}_h, 0 < t \leqslant T, \\
\mathscr{N} w(x,t) - w_{x\bar{x}}(x,t) = v_{x\bar{x}}(x,t), & x \in \mathscr{I}_h, 0 < t \leqslant T, \\
\mathscr{M} g(x,t) = J(u(x,t), u(x,t)), & x \in \mathscr{I}_h, 0 < t \leqslant T, \\
u(x,t) = v(x,t) + w(x,t), & x \in \mathscr{I}_h, 0 < t \leqslant T.
\end{cases}
\tag{9.52}
$$

如果 $t_k = k\tau$ 时刻的 $u^k(x)$, $v^k(x)$, $w^k(x)$ 和 $g^k(x)$ 都已得到,那末,先由(9.52)的第一式,用 p 阶 Runge-Kutta 方法得到 $v^{k+1}(x)$, 然后,依次由第二,四,三式得到 $w^{k+1}(x)$, $u^{k+1}(x)$ 和 $g^{k+1}(x)$, 其逼近精度为 $O(\tau^p + h^4)$.

下面来估计计算误差. 为简便计,只考虑(9.52),并设各函数对 x 以 1 为周期. 因为 $\mathscr{N}$ 是正定对称算子,因此存在逆算子 $\mathscr{L} = \mathscr{N}^{-1}$, 于是(9.52)等价于

$$
\mathscr{M} \frac{d}{dt}(u(x,t) - \mathscr{L} u_{x\bar{x}}(x,t)) + J(u(x,t),
$$

$$
u(x,t)) + \alpha \mathscr{M} u(x,t) = 0.
$$

记 $\tilde{u}(x,t) = u(x,t) - U(x,t)$, 并用 $\tilde{f}(x,t)$ 表示逼近误差,则

$$
\mathscr{M} \frac{d}{dt}(\tilde{u}(x,t) - \mathscr{L} \tilde{u}_{x\bar{x}}(x,t)) + J(\tilde{u}(x,t), U(x,t)
$$

$$
+ \tilde{u}(x,t)) + J(U(x,t), \tilde{u}(x,t)) + \alpha \mathscr{M} \tilde{u}(x,t)
$$

$$
= \tilde{f}(x,t).
$$

把上式对 $2\tilde{u}(x,t)$ 求内积后得到

$$\frac{d}{dt}(\mathscr{M}\tilde{u}(t),\tilde{u}(t))+\frac{d}{dt}(\mathscr{M}\mathscr{L}\tilde{u}_x(t),\tilde{u}_x(t))$$
$$+2(\tilde{u}(t),J(U(t),\tilde{u}(t)))+2\alpha(\mathscr{M}\tilde{u}(t),\tilde{u}(t))$$
$$\leqslant M_1(\|\tilde{u}(t)\|^2+\|\tilde{f}(t)\|^2),$$

并可仿前节推得

$$(\mathscr{M}\tilde{u}(t),\tilde{u}(t))+(\mathscr{M}\mathscr{L}\tilde{u}_x(t),\tilde{u}_x(t))$$
$$\leqslant M_2\int_0^t(\|\tilde{u}(\xi)\|^2+\|\tilde{f}(\xi)\|^2)d\xi. \tag{9.53}$$

因为 $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{L}$ 都是对称正定算子，故存在正常数 c_l，使得

$$c_1\|\tilde{u}(t)\|^2\leqslant(\mathscr{M}\tilde{u}(t),\tilde{u}(t))\leqslant c_2\|\tilde{u}(t)\|^2,$$
$$c_3\|\tilde{u}(t)\|^2\leqslant(\mathscr{M}\mathscr{L}\tilde{u}(t),\tilde{u}(t))\leqslant c_4\|\tilde{u}(t)\|^2,$$

所以由 (9.53) 得到

$$\|\tilde{u}(t)\|^2+|\tilde{u}(t)|_1^2\leqslant\tilde{\rho}(t)+M_3\int_0^t\|\tilde{u}(\xi)\|^2d\xi,$$

其中

$$\tilde{\rho}(t)=M_4\int_0^t\|\tilde{f}(\xi)\|^2d\xi.$$

最后应用 Gronwall 不等式得到下面的结果.

定理 9.11 对一切 h, t 和 $\tilde{\rho}(t)$, 都有

$$\|\tilde{u}(t)\|^2+|\tilde{u}(t)|_1^2\leqslant\tilde{\rho}(t)e^{M_5t}. \tag{9.54}$$

注记 9.3 上面的误差估计，对于边值计算无误差的第一类初、边值问题也是成立的，并且由 (9.54) 和引理 4.5 推得

$$\|\tilde{u}(t)\|_\infty^2\leqslant M_6\tilde{\rho}(t)e^{M_5t}.$$

9.6 Klein-Gordon 方程和 Sine-Gordon 方程

在量子力学中需要求解下列 Klein-Gordon 方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2U}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2U}{\partial x^2}+\beta U+d|U|^\alpha U=f(x,t),\\ \qquad\qquad\qquad\qquad -\infty<x<\infty,\ 0<t\leqslant T,\\ \dfrac{\partial U}{\partial t}(x,0)=U_1(x),\qquad -\infty<x<\infty,\\ U(x,0)=U_0(x),\qquad -\infty<x<\infty,\end{cases} \tag{9.55}$$

其中 $d, \alpha \geqslant 0$, $\beta \leqslant 0$，并记 $p = \alpha + 2$. 在一定条件下，这方程也有孤波解，例如当 $d = 1$, $\alpha = 2$, $\beta = -1$ 时，就有（见 Bullough, Caudrey (1980)）

$$U(x, t) = -\operatorname{sech}\left(\frac{x - at}{\sqrt{2 - 2a^2}}\right).$$

方程 (9.39) 的解还满足守恒律．为简便计，本节假设

$$U(x, t) = U(x + 1, t),$$

于是当 $f(x,t) \equiv 0$ 时，

$$\int_0^1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \beta U^2 + \frac{2d}{p}|U|^p\right] dx = c_1. \quad (9.56)$$

定义差分算子

$$G(u^k(x)) = d\int_0^1 |\sigma u^{k+1}(x) + (1-\sigma)u^{k-1}(x)|^\alpha(\sigma u^{k+1}(x) + (1-\sigma)u^{k-1}(x))d\sigma.$$

因为 $\frac{d}{dz}(|z|^p) = p|z|^\alpha z$，所以

$$2u_{\hat{t}}^k(x)G(u^k(x)) = \frac{d}{\tau p}(|u^{k+1}(x)|^p - |u^{k-1}(x)|^p)$$

和

$$(u_{\hat{t}}^k, G(u^k)) = \frac{d}{p}(\|u^k\|_{l^p}^p)_{\hat{t}}. \quad (9.57)$$

郭本瑜（1982a）提出了下列格式

$$\begin{cases} u_{t\bar{t}}^k(x) - u_{x\bar{x}}^k(x) + \dfrac{\beta}{2}(u^{k+1}(x) + u^{k-1}(x)) + G(u^k(x)) \\ \qquad = f^k(x), & x \in \mathscr{I}_h,\ k \geqslant 1, \\ u^k(x) = u^k(x+1), & x \in \mathscr{I}_h,\ k \geqslant 0, \\ u_t^0(x) = U_1(x), & x \in \mathscr{I}_h, \\ u^0(x) = U_0(x), & x \in \mathscr{I}_h. \end{cases} \quad (9.58)$$

若 $f^k(x) \equiv 0$，并把上式对 $u_{\hat{t}}^k(x)$ 求内积，就由引理 4.12, 4.15 得到

$$\|u_t^k\|^2 + \beta\|u^k\|^2 + |u^k|_{1,2}^2 - \frac{\tau^2}{2}|u_t^k|_{1,2}^2$$

$$+\frac{2d}{p}(\|u^k\|_{p}^{p})_t=0.$$

把上式对 $t=\tau, 2\tau, \cdots, (k-1)\tau$ 求和，即得到 $E^k=E^1$，其中

$$E^k=\|u_t^{k-1}\|^2+\frac{\beta}{2}\|u^k\|^2+\frac{\beta}{2}\|u^{k-1}\|^2+\frac{1}{2}|u^k|_1^2$$
$$+\frac{1}{2}|u^{k-1}|_1^2-\frac{\tau^2}{2}|u_t^{k-1}|_1^2+\frac{d}{p}\|u^k\|_p^p$$
$$+\frac{d}{p}\|u^{k-1}\|_p^p.$$

上式合理地模拟了(9.56).

下面来证明格式的收敛性。为简单计，设 $\alpha=2$，此时(9.58)与 Strauss, Vazquez (1978) 的格式等价. 记

$$\tilde{u}^k(x)=u^k(x)-U^k(x),$$

并用 $\tilde{f}^k(x)$ 表示逼近误差，则

$$\begin{cases}\tilde{u}_{t\bar{t}}^k(x)-\tilde{u}_{\bar{x}x}^k(x)+\frac{\beta}{2}\tilde{u}^{k+1}(x)+\frac{\beta}{2}\tilde{u}^{k-1}(x)\\ \qquad+\tilde{G}^k(x)=\tilde{f}^k(x), & x\in\mathscr{I}_h,\ k\geqslant 1,\\ \tilde{u}^k(x)=\tilde{u}^k(x+1), & x\in\mathscr{I}_h,\ k\geqslant 0,\\ \tilde{u}_t^0(x)=\tilde{f}^0(x), & x\in\mathscr{I}_h,\\ \tilde{u}^0(x)=0, & x\in\mathscr{I}_h,\end{cases}\tag{9.59}$$

其中

$$\tilde{G}^k(x)=G(U^k(x)+\tilde{u}^k(x))-G(U^k(x)).$$

把上式对 $2\tilde{u}_{\hat{t}}^k(x)$ 求内积，则由引理 4.12, 4.15 得到

$$\|\tilde{u}_t^k\|_{\bar{t}}^2+\beta\|\tilde{u}^k\|_{\hat{t}}^2+|\tilde{u}^k|_{1,\hat{t}}^2-\frac{\tau^2}{2}|\tilde{u}_t^k|_{1,\bar{t}}^2$$
$$+2(\tilde{u}_{\hat{t}}^k,\tilde{G}^k)=2(\tilde{u}_{\hat{t}}^k,\tilde{f}^k),$$

并由此得到

$$\|\tilde{u}_t^{k-1}\|^2+\frac{\beta}{2}\|\tilde{u}^k\|^2+\frac{\beta}{2}\|\tilde{u}^{k-1}\|^2+\frac{1}{2}|\tilde{u}^k|_1^2$$
$$+\frac{1}{2}|\tilde{u}^{k-1}|_1^2-\frac{\tau^2}{2}|\tilde{u}_t^{k-1}|_1^2+2\tau\sum_{\xi=1}^{k-1}(\tilde{u}_{\hat{t}}^\xi,\tilde{G}^\xi)$$

$$
= \|\tilde{u}_t^0\|^2 + \frac{\beta}{2}\|\tilde{u}^0\|^2 + \frac{\beta}{2}\|\tilde{u}^1\|^2 + \frac{1}{2}|\tilde{u}^0|_1^2
$$

$$
+ \frac{1}{2}|\tilde{u}^1|_1^2 - \frac{\tau^2}{2}|\tilde{u}_t^0|_1^2 + 2\tau\sum_{\xi=1}^{k-1}(\tilde{u}_{\hat{t}}^\xi, \tilde{f}^\xi). \tag{9.60}
$$

若 $\tau < \sqrt{\frac{r_0}{1+a}}$, $r_0 < 1$, $a > 0$, 则可由 (9.21) 来估计

$$
\frac{\tau^2}{2}|\tilde{u}_t^{k-1}|_1^2.
$$

因为

$$
\frac{1}{2}|\tilde{u}^1|_1^2 \leqslant |\tilde{u}^0|_1^2 + \tau^2|\tilde{u}_t^0|_1^2 \leqslant \frac{\tau^2}{2}|\tilde{u}_t^0|_1^2 + 2r^2\|\tilde{u}_t^0\|^2,
$$

因此由 (9.60) 得到

$$
(1 - r_0 - \varepsilon\tau)\|\tilde{u}_t^{k-1}\|^2 + \frac{\beta}{2}\|\tilde{u}^k\|^2 + \frac{\beta}{2}\|\tilde{u}^{k-1}\|^2
$$

$$
+ \frac{a}{2}|\tilde{u}^k|_1^2 + 2\tau\sum_{\xi=1}^{k-1}(\tilde{u}_{\hat{t}}^\xi, \tilde{G}^\xi) \leqslant \tau\sum_{\xi=0}^{k-2}\|\tilde{u}_t^\xi\|^2
$$

$$
+ \frac{\tau}{\varepsilon}\sum_{\xi=1}^{k-1}\|\tilde{f}^\xi\|^2 + (1 + 2r^2)\|\tilde{P}^0\|^2. \tag{9.61}
$$

最后来估计 $\tau\sum_{\xi=1}^{k-1}(\tilde{u}_{\hat{t}}^\xi, \tilde{G}^\xi)$. 由于 $\alpha = 2$, 因此

$$
\tilde{G}^k(x) = G(\tilde{u}^k(x)) + \tilde{R}^k(x),
$$

其中

$$
\tilde{R}^k(x) = 3d\int_0^1(\sigma U^{k+1}(x) + (1-\sigma)U^{k-1}(x))^2(\sigma\tilde{u}^{k+1}(x)
$$

$$
+ (1-\sigma)\tilde{u}^{k-1}(x))d\sigma + 3d\int_0^1(\sigma\tilde{u}^{k+1}(x)
$$

$$
+ (1-\sigma)\tilde{u}^{k-1}(x))^2(\sigma U^{k+1}(x) + (1-\sigma)U^{k-1}(x))d\sigma.
$$

从而由 (9.57) 和 § 9.2 中的分析得到

$$
2(\tilde{u}_{\hat{t}}^k, \tilde{G}^k) = 2(G(\tilde{u}^k), \tilde{u}_{\hat{t}}^k) + 2(\tilde{R}^k, \tilde{u}_{\hat{t}}^k)
$$

$$
= \frac{d}{2}(\|\tilde{u}^k\|_4^4)_{\hat{t}} + \tilde{F}^k,
$$

其中

$$|\tilde{F}^k| \leqslant \frac{M_1}{6}\|\tilde{u}_t^k\|^2 + d\varepsilon(\|\tilde{u}^{k+1}\|_{l^4}^4 + \|\tilde{u}^{k-1}\|_{l^4}^4)$$

$$+ M_2(\|\tilde{u}^{k+1}\|^2 + \|\tilde{u}^{k-1}\|^2) \leqslant M_3(\|\tilde{u}_t^k\|^2 + \|\tilde{u}_t^{k-1}\|^2$$

$$+ d\varepsilon(\|\tilde{u}^{k+1}\|_{l^4}^4 + \|\tilde{u}^{k-1}\|_{l^4}^4) + M_4\|\tilde{u}^0\|^2$$

$$+ M_5\tau\sum_{\xi=0}^{k}\|\tilde{u}_t^\xi\|^2.$$

令 $\varepsilon=\frac{1}{8}$，并把上式代入 (9.61)，即得到

$$(1-r_0-M_6\tau)\|\tilde{u}_t^{k-1}\|^2 + \frac{d}{8}\|\tilde{u}^k\|_{l^4}^4 + \frac{a}{2}|\tilde{u}^k|_1^2$$

$$\leqslant M_7\tau\sum_{\xi=0}^{k-2}\|\tilde{u}_t^\xi\|^2 + M_8\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}\|\tilde{u}^\xi\|_{l^4}^4$$

$$+ M_9\left(\|\tilde{u}^1\|_{l^4}^4 + \|\tilde{f}^0\|^2 + \tau\sum_{\xi=1}^{k-1}\|\tilde{f}^\xi\|^2\right),$$

其中

$$\|\tilde{u}^1\|_{l^4}^4 \leqslant M_{10}\tau^4\|\tilde{u}_t^0\|_{l^4}^4 = M_{10}\tau^4\|\tilde{f}^0\|_{l^4}^4.$$

设 h 适当小，则 $1-r_0-M_6\tau \geqslant \tilde{r}_0 > 0$，因此

$$\tilde{E}^k \leqslant \tilde{\rho}(k\tau) + M_7\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}\|\tilde{u}_t^\xi\|^2 + M_8\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}\|\tilde{u}^\xi\|_{l^4}^4,$$

其中

$$\tilde{E}^k = \tilde{r}_0\|\tilde{u}_t^{k-1}\|^2 + \frac{d}{8}\|\tilde{u}^k\|_{l^4}^4 + \frac{a}{2}|\tilde{u}^k|_1^2,$$

$$\tilde{\rho}(k\tau) = M_{11}\left(\|\tilde{f}^0\|^2 + \tau^4\|\tilde{f}^0\|_{l^4}^4 + \tau\sum_{\xi=1}^{k-1}\|\tilde{f}^\xi\|^2\right).$$

最后由注记 4.10 得到下面的结果：

定理 9.12 若在格式 (9.58) 中 $\alpha=2$，h 适当小，

$$\tau < \sqrt{\frac{r_0}{1+a}},\quad a>0,\quad r_0<1,$$

那末，对一切 k 和 $\tilde{\rho}(k\tau)$，都有 $\tilde{E}^k \leqslant \tilde{\rho}(k\tau)e^{M_{12}k\tau}$.

在量子力学中还会遇到多维 Klein-Gordon 方程． 若解是球对称的，则有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2 U}{\partial\rho^2}-\dfrac{2}{\rho}\dfrac{\partial U}{\partial\rho}+\beta U+d|U|^{\alpha}U=0, \\ \qquad\qquad 0<\rho<\infty,\ 0<t\leqslant T, \\ \dfrac{\partial U}{\partial\rho}(0,t)=0, \qquad 0\leqslant t\leqslant T, \\ \dfrac{\partial U}{\partial t}(\rho,0)=U_1(\rho),\quad 0\leqslant\rho<\infty, \\ U(\rho,0)=U_0(\rho),\qquad 0\leqslant\rho<\infty,\end{cases}\tag{9.62}$$

其中 $d,\alpha\geqslant 0$，$\beta\leqslant 0$，$U_0(\rho)$ 和 $U_1(\rho)$ 是紧致支集函数．可证明它的解满足

$$\int_0^\infty\left[\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)^2+\beta U^2+\frac{2d|U|^p}{p}\right]\rho^2 d\rho=c_2.$$

现在采用 § 4.4 中的记号，例如 Ω_h^ρ，$P_h(u^k(\rho))$ 等．$G(u^k(\rho))$ 则如本节所示，于是得到计算 (9.62) 的差分格式

$$\begin{cases}u_{t\bar{t}}^k(\rho)+P_h(u^k(\rho))+\dfrac{\beta}{2}u^{k+1}(\rho)+\dfrac{\beta}{2}u^{k-1}(\rho) \\ \qquad +G(u^k(\rho))=0, \qquad \rho\in\Omega_h^\rho,\ k\geqslant 1, \\ u_\rho^k(0)=0, \qquad k\geqslant 0, \\ u_t^0(\rho)=U_1(\rho), \qquad \rho\in\Omega_h^\rho, \\ u^0(\rho,0)=U_0(\rho), \qquad \rho\in\Omega_h^\rho.\end{cases}\tag{9.63}$$

它的解满足 $E^k=E^1$，其中

$$\begin{aligned}E^k=&\|u_t^{k-1}\|_{\Omega_h^\rho}^2+\frac{1}{2}|u^k|_{1,\Omega_h^\rho}^2+\frac{1}{2}|u^{k-1}|_{1,\Omega_h^\rho}^2 \\ &-\frac{\tau^2}{2}|u_t^{k-1}|_{1,\Omega_h^\rho}^2+\frac{d}{p}|u^k|_{p,\Omega_h^\rho}^p+\frac{d}{p}|u^{k-1}|_{p,\Omega_h^\rho}^p \\ &+\frac{\beta}{2}\|u^k\|_{\Omega_h^\rho}^2+\frac{\beta}{2}\|u^{k-1}\|_{\Omega_h^\rho}^2.\end{aligned}$$

假设内点及边界 $\rho=0$ 处的逼近误差为 $\tilde{f}^k(\rho)$ 和 $\tilde{g}^k$，

$$\tilde{u}^k(\rho)=u^k(\rho)-U^k(\rho),$$

并记

$$\tilde{E}^k = \|\tilde{u}_t^{k-1}\|^2_{\Omega_h^\rho} + |\tilde{u}^k|^2_{1,\Omega_h^\rho} + \|\tilde{u}^k\|^4_{l^4,\Omega_h^\rho},$$

$$\tilde{\rho}(k\tau) = M_{13}\Big(\|\tilde{f}^0\|^2_{\Omega_h^\rho} + \tau^4\|\tilde{f}^0\|^4_{l^4,\Omega_h^\rho}$$

$$+ \tau\sum_{\xi=0}^{k-1}(\|\tilde{f}^\xi\|^2 + |\tilde{g}^\xi|^2)\Big),$$

那末，结合定理 9.12 和例 4.6 中的证明方法，可得到下列结果：

定理 9.13 若在格式 (9.63) 中令 $\alpha = 2$，h 适当小，

$$\tau < \sqrt{\frac{2r_0}{3+3a}},\ a > 0,\ r_0 < 1,$$

则对一切 $\tilde{\rho}(k\tau)$ 和 k，都有 $\tilde{E}^k \leqslant \tilde{\rho}(k\tau)e^{M_{14}k\tau}$.

有关的工作可见 Kuo Pen-yu, Vazquez (1984) 的文章.

另一个重要非线性波动方程是 Sine-Gordon 方程，

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\sin U, & -\infty < x < \infty,\ 0 < t \leqslant T,\\[2mm] \dfrac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = U_1(x), & -\infty < x < \infty,\\[2mm] U(x, 0) = U_0(x), & -\infty < x < \infty.\end{cases} \tag{9.64}$$

此方程有孤波解，例如

$$U(x, t) = 4\,\mathrm{tg}^{-1}\left\{\exp\left[\pm\left(\frac{x-at}{\sqrt{1-a^2}}\right)\right]\right\},$$

其中“+”号表示孤立子，“-”号表示反孤立子. 特别，表达式

$$\mathrm{tg}\frac{U}{4} = \frac{a\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-a^2}}\right)}{\mathrm{ch}\left(\dfrac{at}{\sqrt{1-a^2}}\right)},$$

$$\mathrm{tg}\frac{U}{4} = \frac{\mathrm{sh}\left(\dfrac{at}{\sqrt{1-a^2}}\right)}{a\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-a^2}}\right)},$$

分别表示“孤立子-孤立子”碰撞和“孤立子-反孤立子”碰撞.

(9.64) 的解也满足守恒律. 若 $U(x+1, t) = U(x, t)$，则

$$\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 - 2\cos U\right]dx = c_3. \tag{9.65}$$

Perring, Skyrme (1962) 最早计算了 (9.64)。他们的方法是基于特征的概念，即令 $V = \frac{dU}{dt}$，并推出下列格式

$$\begin{cases} v^{k+\frac{1}{2}}(x) = v^{k-\frac{1}{2}}(x) + \tau(u^k_{x\bar{x}}(x) - \sin(u^k(x))), \\ u^{k+1}(x) = u^k(x) + \tau v^{k+\frac{1}{2}}(x). \end{cases}$$

Guo Ben-yu, Pascual, Rodrignez, Vazquez (1986) 则基于守恒性，提出了下列格式

$$\begin{cases} u^k_{t\bar{t}}(x) - u^k_{x\bar{x}}(x) = G(u^k(x)), & x \in \mathscr{I}_h,\ k \geqslant 1, \\ u^k(x) = u^k(x+1), & x \in \mathscr{I}_h,\ k \geqslant 0, \\ u^0_t(x) = U_1(x), & x \in \mathscr{I}_h, \\ u^0(x) = U_0(x), & x \in \mathscr{I}_h, \end{cases} \tag{9.66}$$

其中

$$G(u^k(x)) = \frac{\cos u^{k+1}(x) - \cos u^{k-1}(x)}{u^{k+1}(x) - u^{k-1}(x)}.$$

(9.66) 的解满足 $E^k = E^1$，其中

$$E^k = \|u^{k-1}_t\|^2 + \frac{1}{2}|u^k|_1^2 + \frac{1}{2}|u^{k-1}|_1^2$$

$$-h\sum_{x\in\mathscr{I}_h}(\cos(u^k(x)) + \cos(u^{k-1}(x))).$$

因为

$$G(u^k(x)) = -\int_0^1 \sin(\sigma u^{k+1}(x)$$

$$+ (1-\sigma)u^{k+1}(x))d\sigma,$$

所以 $G(u^k(x))$ 对变元 $u^{k+1}(x)$ 和 $u^{k-1}(x)$ 满足一致 Lipschitz 条件，因此可仿照 § 9.2 中的方法得到下列结果:

定理 9.14 设 $\tilde{u}^k(x) = u^k(x) - U^k(x)$，$\tilde{f}^k(x)$ 是逼近误差，h 适当小，$\tau < \sqrt{\frac{r_0}{1+a}}$，$a > 0$，$r_0 < 1$，那末

$$\|\tilde{u}^k_t\|^2 + |\tilde{u}^k|_1^2 \leqslant M_{15}\left(\|\tilde{f}^0\|^2 + \tau\sum_{\xi=1}^{k-1}\|\tilde{f}^\xi\|^2\right).$$

一般地，若有波动方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = f(U), & -\infty < x < \infty,\ 0 < t \leqslant T, \\
\dfrac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = U_1(x), & -\infty < x < \infty, \\
U(x, 0) = U_0(x), & -\infty < x < \infty,
\end{cases}
$$

其中 $F'(z) = f(z)$，则可采用下列守恒型格式

$$
u^k_{\bar t t}(x) - u^k_{x\bar x}(x) = \frac{F(u^{k-1}(x)) - F(u^{k-1}(x))}{u^{k+1}(x) - u^{k-1}(x)}.
$$

Ablowitz, Kruskal, Ladik (1979) 则提出了另一种计算格式，即

$$
\begin{cases}
u^{k+1}(x) = -u^k(x) + v^k(x) + v^k(x-h) \\
\qquad + \dfrac{h^2}{4} f\left(\dfrac{1}{2} v^k(x) + \dfrac{1}{2} v^k(x-h)\right), \quad x \in \mathscr{I}_h,\ k \geqslant 0, \\
v^{k+1}(x) = -v^k(x) + u^{k+1}(x+h) + u^{k+1}(x) \\
\qquad + \dfrac{h^2}{4} f\left(\dfrac{1}{2} u^{k+1}(x+h) + \dfrac{1}{2} u^{k+1}(x)\right), \\
\qquad x \in \mathscr{I}_h,\ k \geqslant 0, \\
v^0(x) = \dfrac{1}{2}(U_0(x) + U_0(x+h)) + \dfrac{h}{4}(U_1(x) \\
\quad + U_1(x+h)) + \dfrac{h^2}{8} f\left(\dfrac{1}{2} U_0(x) + \dfrac{1}{2} U_0(x+h)\right), x \in \mathscr{I}_h.
\end{cases}
$$

9.7 Schrödinger 方程和 Dirac 方程

在量子力学等问题中，常常要计算下列非线性 Schrödinger 方程

$$
\begin{cases}
i\dfrac{\partial W}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \alpha |W|^2 W = 0, & -\infty < x < \infty,\ 0 < t \leqslant T, \\
W(x, 0) = W_0(x), & -\infty < x < \infty,
\end{cases} \tag{9.67}
$$

其中 $\alpha \geqslant 0$, $W(x, t)$ 是复值函数，其实部和虚部分别为 $U(x, t)$ 和 $V(x, t)$, $W_0(x)$ 是有限支集函数. 假定对一切 $t \geqslant 0$, $W(x, t) \in L^2(\mathscr{R})$, 且 $\lim\limits_{|x|\to\infty} W(x, t) = 0$, 于是不难验证

$$\int_{\mathscr{R}} |W(x,t)|^2 dx = c_1, \tag{9.68}$$

$$\int_{\mathscr{R}} \left|\frac{\partial W}{\partial x}(x,t)\right|^2 dx - \frac{\alpha}{2}\int_{\mathscr{R}} |W(x,t)|^4 dx = c_2. \tag{9.69}$$

计算(9.67)的早期工作由 Yuen, Lake(1975),郭本瑜(1976), Ablowitz, Ladik (1976), Yuen, Ferguson (1978) 和 Yuen, Lake (1980) 等开展的. 郭本瑜最早于 1979 年证明了半离散格式的收敛性（见 Guo Ben-yu (1986)) Zhu You-lan (1983) 则证明了一类隐式格式的收敛性. 最近, Guo Ben-yu (1986) 证明了许多其它格式的收敛性. 下面简单介绍这些方法的基本思想.

设 $\mathscr{I}_h = \{x/x = 0, \pm h, \pm 2h, \cdots,\}$, 并用 $w^k(x)$, $u^k(x)$ 和 $v^k(x)$ 表示 $W(x, k\tau)$, $U(x, k\tau)$ 和 $V(x, k\tau)$ 的近似值. 我们考虑下列格式

$$\begin{cases} u_t^k(x) + \frac{1}{2}\left(v_{x\bar{x}}^k(x) + v_{x\bar{x}}^{k+1}(x)\right) + \frac{\alpha}{8}|w^k(x) + w^{k+1}(x)|^2 \\ \qquad \times \left(v^k(x) + v^{k+1}(x)\right) = 0, \qquad x \in \mathscr{I}_h,\ k \geqslant 0, \\ v_t^k(x) - \frac{1}{2}\left(u_{x\bar{x}}^k(x) + u_{x\bar{x}}^{k+1}(x)\right) - \frac{\alpha}{8}|w^k(x) + w^{k+1}(x)|^2 \\ \qquad \times \left(u^k(x) + u^{k+1}(x)\right) = 0, \qquad x \in \mathscr{I}_h,\ k \geqslant 0, \\ u^0(x) = U_0(x), \qquad x \in \mathscr{I}_h, \\ v^0(x) = V_0(x), \qquad x \in \mathscr{I}_h. \end{cases} \tag{9.70}$$

把(9.70)的第一,二两式分别对 $(u^k(x) + u^{k+1}(x))$ 和 $(v^k(x) + v^{k+1}(x))$ 求内积, 相加后就得到与 (9.68) 相类似的守恒性质, 即

$$\|w^k\|^2 = \|w^0\|^2, \quad k \geqslant 0, \tag{9.71}$$

下面来证明格式的收敛性. 记 $\tilde{w}^k(x) = w^k(x) - W^k(x)$, 于是当 h 适当小时,对一切 $k \geqslant 0$, 都有 $\|\tilde{w}^k\|^2 \leqslant 2\|W_0\|^2$.

用 $\tilde{f}^k(x)$ 和 $\tilde{g}^k(x)$ 分别表示(9.70)第一, 二两式的逼近误差,于是有

$$
\begin{cases}
\tilde{u}_t^k(x) + \frac{1}{2}\left(\tilde{v}_{x\bar{x}}^k(x) + \tilde{v}_{x\bar{x}}^{k+1}(x)\right) + \frac{\alpha}{8} G_0^k(x)(\tilde{v}^k(x) \\
\quad + \tilde{v}^{k+1}(x)) + G_1^k(x) + G_2^k(x) = \tilde{f}^k(x), \quad x \in \mathscr{I}_h, \quad k \geqslant 0, \\
\tilde{v}_t^k(x) - \frac{1}{2}\left(\tilde{u}_{x\bar{x}}^k(x) + \tilde{u}_{x\bar{x}}^{k+1}(x)\right) - \frac{\alpha}{8} G_0^k(x)(\tilde{u}^k(x) \\
\quad + \tilde{u}^{k+1}(x)) + G_3^k(x) + G_4^k(x) = \tilde{g}^k(x), \quad x \in \mathscr{I}_h, \quad k \geqslant 0, \\
\tilde{u}^0(x) = 0, \quad x \in \mathscr{I}_h, \\
\tilde{v}^0(x) = 0, \quad x \in \mathscr{I}_h,
\end{cases} \tag{9.72}
$$

其中

$$
G_0^k(x) = |W^k(x) + W^{k+1}(x) + \tilde{w}^k(x) + \tilde{w}^{k+1}(x)|^2,
$$

$$
G_1^k(x) = \frac{\alpha}{4}(U^k(x) + U^{k+1}(x))(V^k(x) + V^{k+1}(x))(\tilde{u}^k(x)
$$

$$
+ \tilde{u}^{k+1}(x)) + \frac{\alpha}{4}(V^k(x) + V^{k+1}(x))^2(\tilde{v}^k(x) + \tilde{v}^{k+1}(x)),
$$

$$
G_2^k(x) = \frac{\alpha}{8}(V^k(x) + V^{k+1}(x))|\tilde{w}^k(x) + \tilde{w}^{k+1}(x)|^2,
$$

$$
G_3^k(x) = \frac{-\alpha}{4}(V^k(x) + V^{k+1}(x))(U^k(x) + U^{k+1}(x))(\tilde{v}^k(x)
$$

$$
+ \tilde{v}^{k+1}(x)) - \frac{\alpha}{4}(U^k(x) + U^{k+1}(x))^2(\tilde{u}^k(x) + \tilde{u}^{k+1}(x)),
$$

$$
G_4^k(x) = \frac{-\alpha}{8}(U^k(x) + U^{k+1}(x))|\tilde{w}^k(x) + \tilde{w}^{k+1}(x)|^2.
$$

把 (9.72) 的第一,二两式分别对 $(\tilde{u}^k(x) + \tilde{u}^{k+1}(x))$ 和 $(\tilde{v}^k(x) + \tilde{v}^{k+1}(x))$ 求内积,相加后得到

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{w}^k\|_t^2 = {} & \frac{\alpha}{4}((\tilde{u}^k + \tilde{u}^{k+1})(\tilde{v}^k + \tilde{v}^{k+1}), (U^k + U^{k+1})^2 \\
& - (V^k + V^{k+1})^2) + \frac{\alpha}{4}((U^k + U^{k+1})(V^k + V^{k+1}), \\
& (\tilde{v}^k + \tilde{v}^{k+1})^2 - (\tilde{u}^k + \tilde{u}^{k+1})^2) + \frac{\alpha}{8}(|\tilde{w}^k + \tilde{w}^{k+1}|^2, \\
& (U^k + U^{k+1})(\tilde{v}^k + \tilde{v}^{k+1}) - (V^k + V^{k+1})(\tilde{u}^k + \tilde{u}^{k+1})) \\
& + (\tilde{u}^k + \tilde{u}^{k+1}, \tilde{f}^k) + (\tilde{v}^k + \tilde{v}^{k+1}, \tilde{g}^k).
\end{aligned}
$$

记 $\|\tilde{\varphi}^k\|^2 = \|\tilde{f}^k\|^2 + \|\tilde{g}^k\|^2$，则得到

$$
\begin{aligned}
&(1 - M_1\tau - M_2\tau h^{-1}\|\tilde{w}^{k+1}\|^2)\|\tilde{w}^{k+1}\|^2 \\
&\qquad \leqslant (1 + M_3\tau + M_4\tau h^{-1}\|\tilde{w}^k\|^2)\|\tilde{w}^k\|^2 + \tau\|\tilde{\varphi}^k\|^2. \qquad (9.73)
\end{aligned}
$$

由于 $\|\tilde{w}^k\|^2 \leqslant 2\|W_0\|^2$，因此由此得到下面的结果.

定理 9.15 假定 τ 和 $\frac{\tau}{h}$ 小于一个适当的正数，并当 $h \to 0$ 时，$\max\limits_{k\tau \leqslant T}\|\tilde{\varphi}^k\| \to 0$，那末，对一切 $k\tau \leqslant T$，

$$
\|\tilde{w}^k\|^2 \leqslant M_5 \tau e^{M_6 k\tau} \sum_{\xi=0}^{k-1}\|\tilde{\varphi}^\xi\|^2.
$$

Defour，Fortin，Payne (1981) 提出了下列格式

$$
\begin{cases}
i w_t^k(x) + \dfrac{1}{2}\,(w_{x\bar{x}}^k(x) + w_{x\bar{x}}^{k+1}(x)) + \dfrac{\alpha}{4}\,(w^k(x) \\
\qquad + w^{k+1}(x))(|w^k(x)|^2 + |w^{k+1}(x)|^2) = 0, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in \mathscr{I}_h,\ k \geqslant 0, \\
w^0(x) = W_0(x), \qquad\qquad\qquad\quad x \in \mathscr{I}_h.
\end{cases}
$$

它的解不仅满足 (9.71)，而且还满足

$$
|w^k|_1^2 - \frac{\alpha}{2}\|w^k\|_{l^4}^4 = |w^0|_1^2 - \frac{\alpha}{2}\|w^0\|_{l^4}^4.
$$

此外，Griffiths, Mitchell, Morris (1982) 构造了一类预估校正格式. Guo Ben-yu (1986) 还证明了预估校正格式和用 Галеркин 方法所得到格式的收敛性. 此外 Kaup, Hansen (1985) 用数值方法研究了初、边值问题，发现在一定条件下，可以具有孤波解.

另一个重要方程是下列 Dirac 方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \phi_1}{\partial t} + \dfrac{\partial \phi_2}{\partial x} + i m\phi_1 + 2i\lambda(|\phi_2|^2 - |\phi_1|^2)\phi_1 = 0, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in \mathscr{R},\ t > 0, \\
\dfrac{\partial \phi_2}{\partial t} + \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x} - i m\phi_2 + 2i\lambda(|\phi_1|^2 - |\phi_2|^2)\phi_2 = 0, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in \mathscr{R},\ t > 0
\end{cases}
$$

可证明

$$\int_{\mathscr{R}} (|\phi_1(x, t)|^2 + |\phi_2(x, t)|^2)\, dx$$
$$= \int_{\mathscr{R}} (|\phi_1(x, 0)|^2 + |\phi_2(x, 0)|^2)\, dx.$$

Alvarez、Carreras (1981), Alvarez, Kuo Pen-yu, Vazquez (1983) 采用了下列格式

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi_{1t}^k(x) + \frac{1}{2}(\varphi_2^k(x) + \varphi_2^{k+1}(x))_x + \frac{im}{2}(\varphi_1^k(x) + \varphi_1^{k+1}(x)) \\ &\quad + 2\lambda P_1\left(\frac{\varphi_1^k(x) + \varphi_1^{k+1}(x)}{2}, \frac{\varphi_2^k(x) + \varphi_2^{k+1}(x)}{2}\right) = 0, \\ &\varphi_{2t}^k(x) + \frac{1}{2}(\varphi_1^k(x) + \varphi_1^{k+1}(x))_x - \frac{im}{2}(\varphi_2^k(x) + \varphi_2^{k+1}(x)) \\ &\quad + 2\lambda P_2\left(\frac{\varphi_1^k(x) + \varphi_1^{k+1}(x)}{2}, \frac{\varphi_2^k(x) + \varphi_2^{k+1}(x)}{2}\right) = 0, \end{aligned}\right.$$

其中

$$P_1(z_1, z_2) = i(|z_2|^2 - |z_1|^2)z_1,$$
$$P_2(z_1, z_2) = i(|z_1|^2 - |z_2|^2)z_2.$$

可以证明

$$\|\varphi_1^k\|^2 + \|\varphi_2^k\|^2 = \|\varphi_1^0\|^2 + \|\varphi_2^0\|^2.$$

第三章　抛物型方程

§10　线性方程的初值问题

本节叙述线性抛物型方程初值问题的差分方法．首先介绍研究稳定性的两种基本方法．其一是最大模估计，例如正型格式和 John 的有界性条件，并用它证明二阶方程解的存在性，也介绍了高阶抛物型方程组的差分方法，并用离散 Green 函数方法研究它的稳定性．其二是用 Fourier 方法进行 L^2 范数估计．其次进一步讨论构造高精度格式的某些技巧，还讨论了 Петров-Галеркин 方法，它有助于计算奇异摄动问题．最后，以反热传导问题为例，介绍解抛物型方程不适定问题的差分方法．

10.1　线性方程的正型格式，解的存在性

我们考虑下列二阶线性抛物型方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}=a_0(x,t)\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2a_1(x,t)\dfrac{\partial U}{\partial x}\\ \qquad\qquad +a_2(x,t)U+f(x,t),\\ \qquad\qquad\qquad -\infty<x<\infty,0<t\leqslant T,\\ U(x,0)=U_0(x),\quad -\infty<x<\infty,\end{cases}\tag{10.1}$$

其中系数和初始条件满足下列条件：

(i) a_0, $\dfrac{\partial a_0}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 a_0}{\partial x^2}$, a_1, $\dfrac{\partial a_1}{\partial x}$, a_2 和 f 是连续函数，并对 x 一致有界，

(ii) 存在正常数 c_0，使得 $a_0(x,t)\geqslant c_0$，

(iii) $U_0(x)$ 对 x 一致有界，并在一切有限区间内 Riemann 可积．

用 h 和 τ 分别表示 x 和 t 的步长，$\lambda=\frac{\tau}{h^2}$，$t_k=k\tau$，$u_h(x,t)$ 是 $U(x,t)$ 的近似值，那末解 (10.1) 的两层显式格式如下

$$\begin{cases}u_h(x,t+\tau)=\sum_{m=-M}^{M}b_{h,m}(x,t)u_h(x+mh,t)+\tau f(x,t),\\ \qquad -\infty<x<\infty,\ t=t_k,\ k\geqslant 1.\\ u_h(x,0)=U_0(x),\qquad -\infty<x<\infty.\end{cases}\tag{10.2}$$

把 $U(x,t+\tau)$ 和 $U(x+mh,t)$ 在点 (x,t) 展开后得到

$$U(x,t+\tau)=U(x,t)+\tau\frac{\partial U}{\partial t}(x,t+\theta_0\tau),$$

$$0\leqslant\theta_0\leqslant 1,$$

$$U(x+mh,t)=U(x,t)+mh\frac{\partial U}{\partial x}(x,t)$$

$$+\frac{m^2h^2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x+\theta_m mh,t),$$

$$0\leqslant\theta_m\leqslant 1,$$

把它代入 (10.2) 后得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t}(x,t+\theta_0\tau)=&\frac{1}{\tau}\sum_{m=-M}^{M}(b_{h,m}(x,t)\\ &-\delta_{0,m})U(x,t)+\frac{h}{\tau}\sum_{m=-M}^{M}mb_{h,m}(x,t)\\ &\times\frac{\partial U}{\partial x}(x,t)+\frac{h^2}{2\tau}\sum_{m=-M}^{M}m^2b_{h,m}(x,t)\\ &\times\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x+\theta_m h,t)+f(x,t).\end{aligned}\tag{10.3}$$

若格式 (10.2) 对 (10.1) 的逼近是相容的，则当 $h\to 0$ 时，由上式得到

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\tau}\sum_{m=-M}^{M}(b_{h,m}(x,t)-\delta_{0,m})=a_2(x,t),\tag{10.4}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h}{\tau}\sum_{m=-M}^{M} mb_{h,m}(x,t)=2a_1(x,t), \tag{10.5}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{2\tau}\sum_{m=-M}^{M} m^2b_{h,m}(x,t)=a_0(x,t). \tag{10.6}$$

因为当条件 (i), (ii) 满足时，系数 $b_{h,m}(x,t)$ 一般具有下列形式

$$b_{h,m}(x,t)=b_m^{(0)}(x,t)+hb_m^{(1)}(x,t)+\frac{h^2}{2}b_{h,m}^{(2)}(x,t),$$

其中 $b_m^{(0)}$, $b_m^{(1)}$ 和 $b_{h,m}^{(2)}$ 对 x 一致有界，并存在极限关系式

$$\lim_{h\to 0} b_{h,m}^{(2)}(x,t)=b_m^{(2)}(x,t),$$

因此条件 (10.4)—(10.6) 等价于

$$\begin{cases}\sum\limits_{m=-M}^{M} b_m^{(0)}(x,t)=1,\\ \sum\limits_{m=-M}^{M} mb_m^{(0)}(x,t)=0,\\ \sum\limits_{m=-M}^{M} m^2b_m^{(0)}(x,t)=2\lambda a_0(x,t),\\ \sum\limits_{m=-M}^{M} b_m^{(1)}(x,t)=0,\\ \sum\limits_{m=-M}^{M} mb_m^{(1)}(x,t)=2\lambda a_1(x,t),\\ \sum\limits_{m=-M}^{M} b_m^{(2)}(x,t)=2\lambda a_2(x,t).\end{cases} \tag{10.7}$$

记

$$\|u_h(t)\|_\infty=\sup_{-\infty<x<\infty}|u_h(x,t)|,$$

若存在正常数 c_1, 使得

$$\|u_h(t_k)\|_\infty\leqslant c_1\left(\|U_0\|_\infty+\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}\|f(\xi\tau)\|_\infty\right), \tag{10.8}$$

则称格式 (10.2) 的解对初值 U_0 和右端项 f 按范数$\|\cdot\|_\infty$有界，而这等价于格式对初值和右端项按范数$\|\cdot\|_\infty$是稳定的。根据 § 2.1 中

的分析，又可以把问题归结为讨论解对初值的有界性.

定理 10.1 假设 $b_{0,m}(x,t)$ 是对 x,t 的连续函数，那末格式 (10.2) 的解对初值按 $\|\cdot\|_\infty$ 有界的必要条件是对一切实数 x,t 和 βh，都成立

$$\left|\sum_{m=-M}^{M} b_{0,m}(x,t)e^{im\beta h}\right| \leqslant 1. \tag{10.9}$$

证明 如果 (10.9) 不成立，则一定存在 x_0, t_0 和 β_0，使得

$$d=\left|\sum_{m=-M}^{M} b_{0,m}(x_0,t_0)e^{im\beta_0 h}\right| > 1.$$

假设 k, j 是正整数，并且 $\dfrac{\lambda x_0^2}{t_0}=\dfrac{j^2}{k}$，于是 (x_0, t_0) 一定是网格点 (见图 10.1). 为简便计，不妨设 $x_0=t_0=0$，从而存在 β_0，使得

$$d=\left|\sum_{m=-M}^{M} b_{0,m}(0,0)e^{im\beta_0 h}\right| > 1.$$

图 10.1

令 $f(x,t)\equiv 0$, $t_k=k\tau$, 则由 (10.2) 得到

$$u_h(0,t_k)=\sum_{\sigma=-kM}^{kM} P_\sigma^k U_0(\sigma h), \tag{10.10}$$

其中 P_σ^k 是由 $b_{h,m}(x,t)$ 所组成的多项式. 因为 $b_{h,m}(x,t)$ 是关于 x, t 和 h 的连续函数，所以存在极限关系式

$$p_\sigma^k=\lim_{h\to 0} P_\sigma^k,$$

其中 p_σ^k 是由 $b_{0,m}(0,0)$ 所组成的多项式.

今定义辅助函数 $w_h(x,t)$,

$$\begin{cases} w_h(x,t+\tau)=\displaystyle\sum_{m=-M}^{M} b_{0,m}(0,0)w_h(x+mh,t), \\ \qquad\qquad -\infty<x<\infty,\ t=t_k, k\geqslant 0, \\ w_h(x,0)=U_0(x), \qquad -\infty<x<\infty, \end{cases} \tag{10.11}$$

于是

$$w_h(0,t_k)=\sum_{\sigma=-kM}^{kM}p_\sigma^k U_0(\sigma h). \tag{10.12}$$

如果 (10.2) 的解对 U_0 按范数$\|\cdot\|_\infty$有界，则存在正常数 c_1，使得

$$\left|\sum_{\sigma=-kM}^{kM}P_\sigma^k U_0(\sigma h)\right|\leqslant c_1\|U_0\|_\infty,$$

令 $h\to 0$，即得到

$$\left|\sum_{\sigma=-kM}^{kM}p_\sigma^k U_0(\sigma h)\right|\leqslant c_1\|U_0\|_\infty.$$

故由 (10.12) 得到

$$|w_h(0,t_k)|\leqslant c_1\|U_0\|_\infty.$$

今选取 $U_0(x)=e^{i\beta_0 x}$，则有 $\|U_0\|_\infty=1$，因此

$$|w_h(0,t_k)|\leqslant c_1. \tag{10.13}$$

另一方面把 $U_0(x)$ 直接代入 (10.11) 后得到

$$w_h(x,t_k)=e^{i\beta_0 x}\left(\sum_{m=-M}^{M}b_{0,m}(0,0)e^{im\beta_0 h}\right)^k,$$

所以$|w_h(0,t_k)|=d^k$，并由 (10.13) 得到 $d^k\leqslant c_1$。 但 k 是任意自然数，这与 $d>1$ 是矛盾的。

如果当 h 适当小时，$b_{h,m}(x,t)$ 都非负，则称 (10.2) 是正型格式(见 Forsythe, Wasow (1960))。

定理 10.2 如果 (10.2) 是正型差分格式，并满足 (10.4)，那末当 h 适当小时，存在正常数 c_2，使得

$$\|u_h(t_k)\|_\infty\leqslant(1+c_2\tau)^k\left(\|U_0\|_\infty+\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}\|f(t_\xi)\|_\infty\right).$$

证明 由 (10.2) 直接得到

$$|u_h(x,t_{k+1})|\leqslant\left(\sum_{m=-M}^{M}b_{h,m}(x,t)\right)\|u^h(t_k)\|_\infty+\tau\|f(t_k)\|_\infty.$$

当 h 适当小时，由 (10.4) 得到

$$\sum_{m=-M}^{M} b_{k,m}(x,t) \leqslant 1 + c_2\tau,$$

所以

$$\|u_h(t_{k+1})\|_\infty \leqslant (1 + c_2\tau)\|u_h(t_k)\|_\infty + \tau\|f(t_k)\|_\infty.$$

依次递推下去即得到

$$\|u_h(t_k)\|_\infty \leqslant (1 + c_2\tau)^k\Big(\|U_0\|_\infty + \tau\sum_{\xi=0}^{k-1}\|f(t_\xi)\|_\infty\Big).$$

假设格式 (10.2) 对 (10.1) 的逼近误差是 $R_h(x,t)$，$\tilde{u}_h(x,t) = u_h(x,t) - U(x,t)$，则在定理 10.2 的条件下，有

$$\|\tilde{u}_h(t_k)\|_\infty \leqslant (1 + c_2\tau)^k\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}\|R_h(t_\xi)\|_\infty.$$

今假定

$$|R_h(x,t)| = O(\tau^\beta)\max_{-\infty<x<\infty}\left(\left|\frac{\partial^p U}{\partial x^p}\right|, \left|\frac{\partial^q U}{\partial t^q}\right|\right).$$

若 $\tau^\alpha\left|\dfrac{\partial^p U}{\partial x^p}\right|$ 和 $\tau^\alpha\left|\dfrac{\partial^q U}{\partial t^q}\right|$ 有界，$\beta > \alpha$，则 $\|\tilde{u}_h(t_k)\|_\infty = O(\tau^{\beta-\alpha})$.

如果 $\left|\dfrac{\partial^p U}{\partial x^p}\right|$ 和 $\left|\dfrac{\partial^q U}{\partial t^q}\right|$ 具有 $O\left(\dfrac{1}{t}\right)$ 的奇异性，那末

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}_h(t_k)\|_\infty &\leqslant c_3\tau^\beta(1 + c_3\tau)^k\sum_{\xi=1}^{k}\frac{1}{\xi}\\ &= c_3\tau^\beta(1 + c_2\tau)^k(c_4 + \ln k + \varepsilon_\tau(t_k)),\end{aligned}$$

其中 c_4 是 Euler 常数，并且当 $\tau \to 0$ 时，$\varepsilon_\tau(t_k) \to 0$，所以有

$$\|\tilde{u}_h(t_k)\|_\infty = O(\tau^\beta|\ln\tau|).$$

例 10.1 假设用下列格式计算 (10.1)

$$\begin{aligned}u_{h,t}(x,t) = a_0 u_{h,x\bar{x}}(x,t) &+ 2a_1 u_{h,\hat{x}}(x,t)\\ &+ \frac{a_2}{2}(u_h(x+h,t) + u_h(x-h,t))\\ &+ f(x,t),\end{aligned}\tag{10.14}$$

则得到

$$b_{h,0}(x,t) = 1 - 2\lambda a_0(x,t),$$

$$b_{h,1}(x,t)=\lambda a_0(x,t)+h\lambda a_1(x,\ )+\frac{\lambda h^2}{2}a_2(x,t),$$

$$b_{h,-1}(x,t)=\lambda a_0(x,t)-h\lambda a_1(x,t)+\frac{\lambda h^2}{2}a_2(x,t).$$

假设 h 适当小，则当 $\lambda\leqslant\dfrac{1}{2\sup a_0(x,t)}$ 时，格式是正型的.

如果采用下列格式

$$\begin{aligned}u_{h,t}(x,t)=a_0u_{h,x\bar{x}}(x,t)&+2a_1u_{h,x}(x,t)\\&+a_2u_h(x,t)+f(x,t),\end{aligned}\tag{10.15}$$

则得到

$$\begin{cases}b_{h,0}(x,t)=1-2\lambda a_0(x,t)-2\lambda ha_1(x,t)+\lambda h^2a_2(x,t),\\ b_{h,1}(x,t)=\lambda a_0(x,t)+2h\lambda a_1(x,t),\\ b_{h,-1}(x,t)=\lambda a_0(x,t).\end{cases}$$

所以当 $\lambda<\dfrac{1}{2\sup a_0(x,t)}$ 时，格式 (10.15) 仍是正型的. 如果 $\lambda=\dfrac{1}{2\sup a_0(x,t)}$，那末 $b_{h,0}(x,t)$ 可能是负的，故它不一定是正型格式. 又若 $a_1(x,t)\leqslant 0$，并当 a_1 接近零时，$a_2\geqslant 0$，则 (10.15) 是正型格式. 所以低阶项系数的符号和逼近方法会影响差分格式的稳定性质.

可以应用差分方法证明 (10.1) 的解的存在性.

定理 10.3 如果下列条件满足:

(i) a_0, a_1, a_2, f 和 U_0 对 x 具有连续的四阶偏导数;

(ii) a_0, a_1, a_2 和 f 对 t 具有连续的一阶偏导数;

(iii) $a_0\geqslant c_0>0$.

那末 (10.1) 具有唯一的古典解.

证明 应用 (10.15) 来证明，并假定 λ 适当小. 记

$$|||u_h|||=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_h(t)\|_\infty,$$

则由定理 10.2 得到

$$|||u_h|||\leqslant c_3.\tag{10.16}$$

把 (10.15) 对 x 求差商后得到

$$
\begin{aligned}
u_{h,xt}(x,t) = a_0(x+h,t)u_{h,xx\bar{x}}(x,t) & \\
+ a_{0x}(x,t)u_{h,x\bar{x}}(x,t) + 2a_1(x & \\
+ h,t)u_{h,xx}(x,t) + 2a_{1x}(x,t)u_{h,x}(x,t) & \\
+ a_2(x+h,t)u_{h,x}(x,t) + f_1(x,t) & \qquad (10.17)
\end{aligned}
$$

其中

$$
f_1(x,t) = a_{2x}(x,t)u_h(x,t) + f_x(x,t).
$$

若把 (10.17) 看作为对 $u_{h,x}(x,t)$ 的差分格式,那末它的系数是

$$
\begin{cases}
b_{h,0}(x,t) = 1 - 2\lambda a_0(x+h,t) + \lambda h a_{0x}(x,t) \\
\qquad\qquad - 2\lambda h a_1(x+h,t) + 2\lambda h^2 a_{1x}(x,t) \\
\qquad\qquad + \lambda h^2 a_2(x+h,t), \\
b_{h,1}(x,t) = \lambda a_0(x+h,t) + 2\lambda h a_1(x+h,t), \\
b_{h,-1}(x,t) = \lambda a_0(x+h,t) - \lambda h a_{0x}(x,t).
\end{cases}
$$

所以 (10.17) 仍是正型格式,并且有

$$
\|u_{h,x}(0)\|_\infty \leqslant 2\left\|\frac{\partial U_0}{\partial x}\right\|_\infty,
$$

$$
\|f_1(t)\|_\infty \leqslant \|a_{2x}(t)\|_\infty\|u_h(t)\|_\infty + \|f_x(t)\|_\infty,
$$

因此得到

$$
|||u_{h,x}||| \leqslant c_4. \qquad (10.18)
$$

类似地有

$$
|||u_{h,xx}||| \leqslant c_5,\quad |||u_{h,xxx}||| \leqslant c_6,\quad |||u_{h,xxxx}||| \leqslant c_7, \qquad (10.19)
$$

并且由 (10.15)—(10.19) 得到

$$
|||u_{h,t}||| \leqslant c_8,\quad |||u_{h,xt}||| \leqslant c_9. \qquad (10.20)
$$

再把 (10.17) 对 x 求差商,结合 (10.16),(10.18) 和 (10.19) 得到

$$
|||u_{h,xxt}||| \leqslant c_{10}. \qquad (10.21)
$$

最后把 (10.15) 对 t 求差商,则由 (10.16),(10.18)—(10.21) 得到

$$
|||u_{h,tt}||| \leqslant c_{11}. \qquad (10.22)
$$

现在把 $u_h(x,t)$, $u_{h,x}(x,t)$, $u_{h,xx}(x,t)$ 和 $u_{h,t}(x,t)$ 分别线性插值为连续函数,并记为 $U_h(x,t)$, $V_h^{(1)}(x,t)$, $V_h^{(2)}(x,t)$ 和

$W_h(x, t)$，那末它们都是一致有界且等度连续的．记 $h_m = \frac{1}{2^m}$，根据 Arzela 引理，可选取相应的子列，不妨仍记为 $\{U_h\}$，$\{V_h^{(1)}\}$，$\{V_h^{(2)}\}$ 和 $\{W_h\}$，使得当 $m\to\infty$ 时，各自趋向于相应的连续的极限函数 $U(x, t)$，$V^{(1)}(x, t)$，$V^{(2)}(x, t)$ 和 $W(x, t)$．可仿照 § 5.1 中的方法证明，$V^{(1)} = \frac{\partial U}{\partial x}$，$V^{(2)} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$，$W = \frac{\partial U}{\partial t}$．最后在 (10.15) 中令 $h_m \to 0$，即知 $U(x, t)$ 满足 (10.1)，不难验证，

$$U(x,0) = U_0(x).$$

最后来证明唯一性．假设 $U(x, t)$ 是 (10.1) 的任意古典解，$R_h(x, t)$ 是 (10.15) 的逼近误差，那末当 $h \to 0$ 时，$R_h(x,t) \to 0$，因此 $\|U - u_h\| \to 0$．但对同样的初值和右端，(10.15) 的解是唯一的，所以它的极限也唯一，这就证明了 (10.1) 的古典解的唯一性．

10.2 John 的有界性条件

John (1952) 研究了格式 (10.2) 的另一种特殊情况，也就是说，如果满足下列条件：

(i) 系数 $b_{h,m}(x, t)$ 满足 (10.7)；

(ii) $|b_m^{(0)}(x, t)|$，$\left|\frac{\partial b_m^{(0)}}{\partial x}(x, t)\right|$，$\left|\frac{\partial^2 b_m^{(0)}}{\partial x^2}(x, t)\right|$，$|b_m^{(1)}(x,t)|$，$\left|\frac{\partial b_m^{(1)}}{\partial x}(x, t)\right|$ 对 x, t 一致有界，$|b_{h,m}^{(2)}(x, t)|$ 对 x, t 和 h 一致有界；

(iii) 存在正数 d，使得对一切 $|\theta| \leqslant \pi$，都有

$$\left|\sum_{m=-M}^{M} b_m^{(0)}(x, t)e^{im\theta}\right| \leqslant e^{-d\theta^2},$$

则称格式 (10.2) 满足 John 条件．

下面来研究此类格式的稳定性．令 $x_j = jh$，并考虑下列辅助问题

$$\begin{cases} v_h(x_j,\ t_{k+1}) = \sum_{m=-M}^{M} \gamma_m(t_k) v_h(x_{j+m},\ t_k), \\ \qquad -\infty < j < \infty,\ t_k > t_\sigma, \\ v_h(x_j, t_{\sigma+1}) = U_0(x_j), \qquad -\infty < j < \infty, \\ v(x_j, t_k) = 0 \qquad -\infty < j < \infty,\ t_k \leqslant t_\sigma, \end{cases} \tag{10.23}$$

则不难得到

$$v_h(x_j,\ t_{k+1}) = \sum_{m=j-M(k-\sigma)}^{j+M(k-\sigma)} g_{j-m,\sigma,k} U_0(x_m), \tag{10.24}$$

其中 $g_{j-m,\sigma,k}$ 是 $\gamma_m(t_\xi)$ 的多项式，并且 $g_{j,\sigma,\sigma} = \delta_{j,\sigma}$.

假设 $v_h(x,t) = U_0(x)P(t)$，其中 $U_0(x) = e^{i\beta x}$，$P(t_{\sigma+1}) = 1$. 把它代入 (10.23) 后得到

$$P(t_{k+1}) = \phi_k(e^{i\beta h})P(t_k),$$

其中

$$\phi_k(z) = \sum_{m=-M}^{M} \gamma_m(t_k) z^m.$$

依次递推下去得到

$$P(t_{k+1}) = \Phi_{\sigma,k}(e^{i\beta h}), \tag{10.25}$$

其中

$$\Phi_{\sigma,k}(e^{i\beta h}) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \sigma = k, \\ \prod_{\xi=\sigma+1}^{K} \phi_\xi(e^{i\beta h}), & \text{当} \sigma < k. \end{cases}$$

另一方面，由 (10.24) 得到

$$v_h(x_j,\ t_{k+1}) = U_0(x_j)P(t_{k+1}) = \sum_{m=j-M(k-\sigma)}^{j+M(k-\sigma)} g_{j-m,\sigma,k} e^{i\beta m h}$$

$$= \sum_{m=M(k-\sigma)}^{-M(k-\sigma)} g_{m,\sigma,k} e^{-i\beta m h} U_0(x_j),$$

因此

$$P(t_{k+1}) = \sum_{m=-M(k-\sigma)}^{M(k-\sigma)} g_{m,\sigma,k} e^{-i\beta m h},$$

或者

$$\phi_{\sigma,k}(e^{i\beta h}) = \sum_{m=-M(k-\sigma)}^{M(k-\sigma)} g_{m,\sigma,k} e^{-i\beta m h}.$$

令 $\theta = \beta h$，并考虑到函数系 $\{e^{im\theta}\}$ 的正交性，就得到

$$g_{m,\sigma,k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi_{\sigma,k}(e^{i\theta}) e^{im\theta} d\theta. \qquad (10.26)$$

命题 10.1 如果下列条件满足：

(i) 对一切 $t \leqslant T$，都有

$$\sum_{l=-M}^{M} \gamma_l(t) = 1, \quad \sum_{l=-M}^{M} l\gamma_l(t) = 0; \qquad (10.27)$$

(ii) 存在正常数 d、使得对一切 $|\theta| \leqslant \pi$ 和 $t \leqslant T$，

$$\left|\sum_{l=-M}^{M} \gamma_l(t) e^{il\theta}\right| \leqslant e^{-d\theta^2}. \qquad (10.28)$$

那末，存在正常数 c_0，使得对一切 $k > \sigma$，

$$|I_m| \leqslant c_0 \frac{|p_m(0)|(k-\sigma) + |p_m'(0)|(k-\sigma)^{1/2} + B_m}{(|m| + (k-\sigma)^{1/2})^3},$$

其中 B_m 是正常数，$|b_{l,m}| \leqslant B_m$，

$$I_m = \sum_{l=-M}^{M} b_{l,m} g_{l-m,\sigma,k},$$

$$p_m(\theta) = \sum_{l=-M}^{M} b_{l,m} e^{il\theta}.$$

证明 把 (10.26) 代入 I_m 的表达式中，得到

$$I_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi_{\sigma,k}(e^{i\theta}) p_m(\theta) e^{-im\theta} d\theta. \qquad (10.29)$$

下面分四步来估计 $|I_m|$ 的上界.

首先估计 $\phi_{\sigma,k}(e^{i\theta})$ 及其导数的绝对值的上界，由 (10.28) 得到

$$|\phi_k(e^{i\theta})| \leqslant e^{-d\theta^2},$$

因此

$$|\phi_{\sigma,k}(e^{i\theta})| = \left|\prod_{\xi=\sigma+1}^{K} \phi_\xi(e^{i\theta})\right| \leqslant e^{-d\theta^2(k-\sigma)}. \qquad (10.30)$$

又由 Fourier 系数公式，

$$\gamma_l(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{m=-M}^{M}\gamma_m(t)e^{im\theta}\right)e^{-il\theta}d\theta,$$

故由 (10.28) 得到

$$|\gamma_l(t)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-d\theta^2}d\theta\leqslant 1,$$

从而

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{d\theta}\phi_k(e^{i\theta})\right|&=\left|\sum_{l=-M}^{M}ile^{il\theta}\gamma_l(t_k)\right|\\&\leqslant\sum_{l=-M}^{M}|l\gamma_l(t_k)|\leqslant\sum_{l=-M}^{M}|l|\\&=M(M+1).\end{aligned}$$

相仿地可证明 $\phi_k(e^{i\theta})$ 的高阶导数的有界性。

另一方面由 (10.27) 得到

$$\phi_k(e^{i\theta})|_{\theta=0}=\sum_{l=-M}^{M}\gamma_l(t_k)=1,$$

$$\left.\frac{d\phi_k(e^{i\theta})}{d\theta}\right|_{\theta=0}=i\sum_{l=-M}^{M}l\gamma_l(t_k)=0,$$

因此

$$\phi_k(e^{i\theta})=1+\frac{\theta^2}{2}\left.\frac{d^2\phi_k}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta},\tag{10.31}$$

所以

$$\begin{cases}\phi_k(e^{i\theta})=1+O(\theta^2),\\ \dfrac{d\phi_k}{d\theta}(e^{i\theta})=O(\theta).\end{cases}\tag{10.32}$$

因为

$$\frac{d}{d\theta}(\phi_{a,k}(e^{i\theta}))=\sum_{\xi=a+1}^{k}\left(\frac{d}{d\theta}\phi_\xi(e^{i\theta})\right)\left(\prod_{\substack{l=a+1\\ l\neq\xi}}^{k}\phi_l(e^{i\theta})\right),$$

故由 (10.30)，(10.32) 得到

$$\frac{d}{d\theta}(\phi_{\sigma,k}(e^{i\theta})) = O(\theta(k-\sigma)e^{-d\theta^2(k-\sigma)}). \qquad (10.33)$$

类似地有

$$\frac{d^2}{d\theta^2}(\phi_{\sigma,k}(e^{i\theta})) = O(((k-\sigma)+\theta^2(k-\sigma)^2)e^{-d\theta^2(k-\sigma)}) \qquad (10.34)$$

和

$$\frac{d^3}{d\theta^3}(\phi_{\sigma,k}(e^{i\theta})) = O((\theta(k-\sigma)+\theta(k-\sigma)^2+\theta^3(k-\sigma)^3)e^{-d\theta^2(k-\sigma)}) \qquad (10.35)$$

第二步估计 $p_m(\theta)$ 的展开式．根据 $p_m(\theta)$ 的周期性有

$$p_m(\theta) = p_m(0) + p'_m(0)\sin\theta + q_m(\theta),$$

其中 $q_m(\theta)$ 也以 2π 为周期，且 $q_m(0)=0$．又有

$$p'_m(\theta) = p'_m(0)\cos\theta + q'_m(\theta),$$

因此 $q'_m(0)=0$，并由此得到

$$\begin{cases} q_m(\theta) = O(\theta^2 B_m), \\ q'_m(\theta) = O(\theta B_m), \\ q''_m(\theta) = O(B_m). \end{cases} \qquad (10.36)$$

第三步建立 $|I_m|$ 的第一个估计式． 把 $p_m(\theta)$ 的表达式代入 (10.29) 后得到

$$|I_m| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\phi_{\sigma,k}(e^{i\theta})p_m(0)e^{-im\theta}|d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\phi_{\sigma,k}(e^{i\theta})p'_m(0)\theta e^{-im\theta}|d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\phi_{\sigma,k}(e^{i\theta})q_m(\theta)e^{-im\theta}|d\theta.$$

把 (10.30)，(10.36) 代入上式，即得到

$$|I_m| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|p_m(0)|e^{-d\theta^2(k-\sigma)}d\theta$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\theta||p_m'(0)|e^{-d\theta^2(k-\sigma)}d\theta$$

$$+\frac{c_1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\theta^2 B_m e^{-d\theta^2(k-\sigma)}d\theta. \tag{10.37}$$

其中 c_1 是正常数．由于

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-d\theta^2(k-\sigma)}d\theta=\sqrt{\frac{\pi}{d(k-\sigma)}},\\ \int_{-\infty}^{\infty}|\theta|e^{-d\theta^2(k-\sigma)}d\theta=\frac{1}{d(k-\sigma)},\\ \int_{-\infty}^{\infty}\theta^2 e^{-d\theta^2(k-\sigma)}d\theta=O\left(\frac{1}{(k-\sigma)^{3/2}}\right),\\ \cdots\cdots\end{cases} \tag{10.38}$$

因此

$$|I_m|\leqslant c_2\left(\frac{|p_m(0)|}{(k-\sigma)^{1/2}}+\frac{|p_m'(0)|}{k-\sigma}+\frac{B_m}{(k-\sigma)^{3/2}}\right). \tag{10.39}$$

第四步建立 $|I_m|$ 的另一个上界估计式．记

$$\mathscr{I}=\frac{p_m(0)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_{\sigma,k}(e^{i\theta})e^{-im\theta}d\theta.$$

把上式分部积分三次后得到

$$|\mathscr{I}|\leqslant\frac{|p_m(0)|}{2\pi|m|^3}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{d^3}{d\theta^3}\psi_{\sigma,k}(e^{i\theta})\right|d\theta.$$

把 (10.35) 代入上式,则由 (10.38) 得到

$$|\mathscr{I}|\leqslant\frac{c_3|p_m(0)|(k-\sigma)}{|m|^3}.$$

类似地可估计积分

$$\frac{p_m'(0)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_{\sigma,k}(e^{i\theta})\sin\theta e^{-im\theta}d\theta$$

和

$$\frac{B_m}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_{\sigma,k}(e^{i\theta})\theta^2 e^{-im\theta}d\theta,$$

并由此得到，当 $m \neq 0$, $k > \sigma$ 时，

$$|I_m| \leqslant \frac{c_5}{|m|^3}(|p_m(0)|(k-\sigma)$$

$$+ |p'_m(0)|(k-\sigma)^{1/2} + B_m). \tag{10.40}$$

结合 (10.39), (10.40) 就证明了本命题.

特别若 $p_m(0) = 1$, 则由 (10.26), (10.29) 得到

$$|I_m| = O(|g_{-m,\sigma,k}|) = O\left(\frac{k-\sigma}{(|m| + \sqrt{k-\sigma})^3}\right). \tag{10.41}$$

定理 10.4 如果格式 (10.2) 满足 John 条件，则解对初值按范数$\|\cdot\|_\infty$有界.

证明 可以把 (10.2) 改写为

$$u_h(x, t+\tau) = \sum_{m=-M}^{M} \gamma_m(t) u_h(x+mh, t)$$

$$+ \sum_{m=-M}^{M} (b_{h,m}(x,t) - \gamma_m(t)) u_h(x+mh, t), \tag{10.42}$$

其中 $\gamma_m(t) = b_m^{(0)}(x_j, t)$, x_j 是一个固定点. 若把上式右端的第二项看作 (10.2) 中的右端项，则由迭加原理得到

$$u_h(x_j, t_{k+1}) = u_{h,0}(x_j, t_{k+1}) + \sum_{\xi=1}^{k+1} u_{h,\xi}(x_j, t_{k+1}) \tag{10.43}$$

其中

$$u_{h,\xi}(x_j, t_{k+1}) = \sum_{m=-M}^{M} \gamma_m(t_k) u_{h,\xi}(x_{j+m}, t_k), \quad 当\ t_k > t_\xi,$$

$$u_{h,\xi}(x_j, t_k) = \begin{cases} U_0(x_j), & 当\ t_k = t_\xi = 0, \\ \sum\limits_{m=-M}^{M} (b_{h,m}(x_j, t_{k-1}) - \gamma_m(t_{k-1})) \\ \quad \cdot u_h(x_{j+m}, t_{k-1}), & 当\ t_k = t_\xi \neq 0, \\ 0, & 当\ t_k < t_\xi. \end{cases}$$

因为 x_j 是固定的，$\gamma_m(t_k)$ 与 x 无关，故由 (10.24) 得到

$$
\begin{cases}
u_{h,0}(x_j,\ t_{k+1}) = \sum_{m=j-M(k+1)}^{j+M(k+1)} g_{j-m,-1,k}U_0(x_m) \\
\qquad = \sum_{m=-M(k+1)}^{M(k+1)} g_{-m,-1,k}U_0(x_{j+m}), \\
u_{h,\xi}(x_j,\ t_{k+1}) = \sum_{m=j-M(k-\xi+1)}^{j+M(k-\xi+1)} g_{j-m,\xi-1,k} \\
\qquad \cdot\left(\sum_{l=-M}^{M}[b_{h,l}(x_m,\ t_{\xi-1}) - b_l^{(0)}(x_j,\ t_{\xi-1})]\right. \\
\qquad \left.\cdot u_h(x_{m+l},\ t_{\xi-1})\right), \qquad \xi \geqslant 1,
\end{cases} \tag{10.44}
$$

并由此得到

$$
\sum_{\xi=1}^{k+1} u_{h,\xi}(x_j,t_{k+1}) = \sum_{\xi=0}^{k}\sum_{m=j-M(k-\xi)}^{j+M(k-\xi)} g_{j-m,\xi,k}
$$

$$
\cdot\left(\sum_{l=-M}^{M}[(b_{h,l}(x_m,t_\xi) - b_l^{(0)}(x_j,t_\xi)]u_h(x_{m+l},t_\xi)\right)
$$

$$
= \sum_{\xi=0}^{k}\sum_{m'} u_h(x_{j+m'},\ t_\xi)\left(\sum_{l=-M}^{M} g_{l-m',\xi,k}[b_{h,l}\right.
$$

$$
\left.\cdot(x_{j+m'-l},\ t_\xi) - b_l^{(0)}(x_j,t_\xi)]\right). \tag{10.45}
$$

记

$$
b_{l,m,\xi} = b_{h,l}(x_{j+m-l},t_\xi) - b_l^{(0)}(x_j,t_\xi),
$$

$$
l_{m,\xi} = \sum_{l=-M}^{M} b_{l,m,\xi}g_{l-m,\xi,k},
$$

$$
p_{m,\xi}(\theta) = \sum_{l=-M}^{M} b_{l,m,\xi}e^{il\theta},
$$

把它们代入 (10.45)，再把 (10.44)，(10.45) 代入 (10.43)，即得到

$$
u_h(x_j,\ t_{k+1}) = \sum_{m=-M(k+1)}^{M(k+1)} g_{-m,-1,k}U_0(x_{j+m})
$$

$$+\sum_{\xi=0}^{k}\sum_{m'}u_h(x_{j+m},t_\xi)I_{m,\xi}. \tag{10.46}$$

这样就把估计 $\|u_h(t_{k+1})\|_\infty$ 的问题归结为估计 $|I_{m,\xi}|$。 基于命题 10.1，又把它归结为估计 $p_{m,\xi}(0)$，$p'_{m,\xi}(0)$ 和 B_m。首先，我们有

$$\begin{aligned}b_{l,m,\xi}&=b_l^{(0)}(x_{j+m-l},t_\xi)-b_l^{(0)}(x_j,t_\xi)+hb_l^{(1)}(x_{j+m-l},t_\xi)\\&\quad+\frac{h^2}{2}b_{h,l}^{(2)}(x_{j+m-l},t_\xi)=b_l^{(0)}(x_{j+m},t_\xi)\\&\quad-b_l^{(0)}(x_j,t_\xi)-lh\frac{\partial b_l^{(0)}}{\partial x}(x_{j+m},t_\xi)\\&\quad+hb_l^{(1)}(x_{j+m},t_\xi)+O(h^2).\end{aligned}$$

上式中右端第一项为 $O(mh)$，因此

$$B_m=\sup_{l,\xi}|b_{l,m,\xi}|=O(|m|h+h). \tag{10.47}$$

此外

$$\begin{aligned}p_{m,\xi}(0)=\sum_{l=-M}^{M}b_{l,m,\xi}=\sum_{l=-M}^{M}&(b_l^{(0)}(x_{j+m},t_\xi)\\&-lh\frac{\partial b_l^{(0)}}{\partial x}(x_{j+m},t_\xi)+hb_l^{(1)}(x_{j+m},t_\xi)\\&-b_l^{(0)}(x_j,t_\xi))+O(h^2),\end{aligned}$$

又由 (10.7) 得到

$$\sum_{l=-M}^{M}b_l^{(0)}(x_{j+m},t_\xi)=1,\quad\sum_{l=-M}^{M}b_l^{(0)}(x_j,t_\xi)=1,$$

$$\sum_{l=-M}^{M}b_l^{(1)}(x_{j+m},t_\xi)=0,$$

$$\begin{aligned}&\sum_{l=-M}^{M}l\frac{\partial b_l^{(0)}}{\partial x}(x_{j+m},t_\xi)\\&\qquad=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{l=-M}^{M}lb_l^{(0)}(x,t_\xi)\right)\Big|_{x=x_{j+m}}=0,\end{aligned}$$

所以

$$p_{m,\xi}(0)=O(h^2). \tag{10.48}$$

类似地有

$$p'_{m,\xi}(0)=O(h). \tag{10.49}$$

结合前三式和命题 10.1 即有

$$|I_{m,\xi}|\leqslant c_6\frac{h^2(k-\xi)+h(k-\xi)^{1/2}+(|m|h+h)}{(|m|+(k-\xi)^{1/2})^3}.$$

因为

$$h(k-\xi)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sqrt{\frac{k\tau}{\lambda}}=O\left(\sqrt{\frac{T}{\lambda}}\right),$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{\xi=0}^{k}\sum_{m}|I_{m,\xi}|&\leqslant\sum_{\xi=0}^{k}\sum_{m}O\left(\frac{h}{(\sqrt{k-\xi+1}+|m|)^3}\right.\\&\quad\left.\times\left(1+\sqrt{\frac{T}{\lambda}}\right)\right)\\&\leqslant c_7\sum_{\xi=0}^{k}\left(\frac{h}{\sqrt{k-\xi+1}}\left(1+\sqrt{\frac{T}{\lambda}}\right)\right)\\&\leqslant c_8\sqrt{(k+1)\tau}.\end{aligned}$$

又由 (10.41),

$$\sum_{m=-Mk}^{Mk}|g_{-m,-1,k}|\leqslant c_9\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k+1}{(|m|+\sqrt{k+1})^3}dm\leqslant c_{10}.$$

把以上两式代入 (10.46) 即得到

$$|||u_h|||\leqslant c_{10}\|U_0\|_\infty+c_8\sqrt{T}\ |||u_h|||.$$

若 $T\leqslant\frac{1}{4c_8^2}$, 则 $|||u_h|||\leqslant 2c_{10}\|U_0\|_\infty$. 对一般的 t, 则有

$$\|u_h(t)\|_\infty\leqslant(2c_{10})^{4c_8^2t+1}\|U_0\|_\infty.$$

John 条件与正型条件是互不包含的.

例 10.2 考虑最简单的热传导问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}, & -\infty<x<\infty,\ 0<t\leqslant T,\\ U(x,0)=U_0(x), & -\infty<x<\infty.\end{cases}$$

假设 $\lambda = \frac{1}{2}$，则有典型的显式格式

$$u_h(x, t+\tau) = \frac{1}{2} u_h(x-h, t) + \frac{1}{2} u_h(x+h, t).$$

显然它是正型格式. 但是

$$\sum_{m=-1}^{1} b_{h,m}(x, t) e^{im\theta} = \cos\theta,$$

当 $\theta = \pi$ 时，$\cos\theta = 1$，故不满足 John 条件 (iii)。

反之，设 $\varepsilon > 0$，并令两层显式格式系数为

$$b_{h,0}(x, t) = 1 - \frac{2\lambda}{1-3\varepsilon},$$

$$b_{h,1}(x, t) = b_{h,-1}(x, t) = \frac{\lambda(1+\varepsilon)}{1-3\varepsilon},$$

$$b_{h,2}(x, t) = b_{h,-2}(x, t) = \frac{-\varepsilon\lambda}{1-3\varepsilon},$$

当 λ, ε 适当小时，$b_{h,2}(x, t)$ 和 $b_{h,-2}(x, t)$ 为负值，因此不是正型格式，但是

$$\begin{aligned}\sum_{m=-2}^{2} b_{h,m}(x, t) e^{im\theta} &= 1 - \frac{2\lambda}{1-3\varepsilon} \\ &\quad + \frac{2\lambda(1+\varepsilon)}{1-3\varepsilon}\cos\theta - \frac{2\varepsilon\lambda\cos 2\theta}{1-3\varepsilon} \\ &= 1 - \lambda\theta^2 + O(\theta^4),\end{aligned}$$

所以存在 $d > 0$，使得

$$\left|\sum_{m=-2}^{2} b_{h,m}(x, t) e^{im\theta}\right| \leqslant e^{-d\theta^2},$$

即满足 John 条件 (iii)，不难验证也满足 John 条件 (i), (ii).

John (1952) 应用上述格式研究了 (10.1) 的解的存在性，他还结合离散 Green 函数方法研究了广义解. 此外，Aronson (1963a, b, 1965) 等也研究了显式或隐式格式的最大模估计.

10.3 高阶抛物型方程组，离散 Green 函数方法

Widlund (1966) 把 John 的结果推广到高阶抛物型方程组. 设 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathscr{R}^n$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\alpha_m \geqslant 0$, $|\alpha|=\sum_{m=1}^{n} \alpha_m$, $D^\alpha=\prod_{m=1}^{n} \frac{\partial^{\alpha_m}}{\partial x_m^{\alpha_m}}$. $A_\alpha(x,t)$ 是 $M \times M$ 阶矩阵，它的元素是 x 和 t 的有界函数. 特别当 $|\alpha|=2p$ 时, $A_\alpha(x, t)$的元素对 $x \in \mathscr{R}^n$ 是一致 Hölder 连续的，而对 $t \in [0, T]$ 则是一致连续的. L 是下列偏微分算子

$$L=I \frac{\partial}{\partial t}-\sum_{|\alpha| \leqslant 2p} A_\alpha(x, t) D^\alpha.$$

今后对向量 $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)^*$, 定义范数

$$|y|_{(q)}=\left(\sum_{m=1}^{n}|y_m|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad q \geqslant 1.$$

记 $\beta=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$, γ_l 是行列式

$$\operatorname{Det}\left\{\sum_{|\alpha|=2p} A_\alpha(x, t) \prod_{m=1}^{n}(i\beta_m)^{\alpha_m}-\gamma I\right\}=0$$

的根. 如果存在与 x, t 无关的正常数 δ_0, 使得对一切 $|\beta|_{(2)}=1$, 都有 $\operatorname{Re}\gamma_l \leqslant -\delta_0$, 则称 L 是在 Петровский 意义下的一致抛物型偏微分算子.

用 $U(x, t)$ 表示M维向量函数, $f(x, t)$ 和 $U_0(x)$ 是M维已知向量函数，它们的分量对 $x \in \mathscr{R}^n$ 和 $t \in [0, T]$ 一致有界. 我们所讨论的问题如下:

$$\begin{cases}LU(x, t)=f(x, t), & x \in \mathscr{R}^n, \ 0<t \leqslant T, \\ U(x, 0)=U_0(x), & x \in \mathscr{R}^n.\end{cases} \tag{10.50}$$

用 h 和 τ 分别表示 x_m 和 t 的步长, $\lambda=\frac{\tau}{h^{2p}}$ 是正常数, $t_k=k\tau$, $R_h^n=\{x / x_m=j_m h, j_m=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$. 假定 a_μ 是实数, s_{0m}, s_{+m}, s_{-m} 是非负整数, $s=(s_{01}, s_{+1}, s_{-1}, \cdots, s_{0n}, s_{+n}, s_{-n})$, $|s|=\sum_{m=1}^{n}(s_{0m}+s_{+m}+s_{-m})$, $\partial^s=\prod_{m=1}^{n}(\hat{\partial}_{x_m})^{s_{0m}}(\partial_{x_m})^{s_{+m}}(\bar{\partial}_{x_m})^{s_{-m}}$.

又用 $b_{\mu,\sigma,s}(x, t)$ 表示 $M \times M$ 阶矩阵，它们的元素也对 x, t 一致有界. 特别 $b_{\mu,0,s}(x, t)$ 对 $x \in \mathscr{R}^n$ 满足一致 Hölder 条件，其 Hölder 指数是 d, $0 < d \leqslant 1$. $b_{\mu,0,s}(x, t)$ 对 t 是一致连续的. 今定义差分算子

$$B_{h,\mu}(x, t, \partial) = \sum_{\sigma+|s|\geqslant 2p} b_{\mu,\sigma,s}(x, t) h^\sigma \partial^s,$$

特别把它的主部记为 $B'_\mu(x, t, \partial)^{\sigma>3}$, 即

$$B'_\mu(x, t, \partial) = \sum_{|s|\geqslant 2p} b_{\mu,0,s}(x, t)\partial^s.$$

计算 (10.50) 的差分格式是

$$\begin{aligned}
&(I - B_{h,-1}(x, t, \partial))u_h(x, t+\tau) \\
&= \sum_{\mu=0}^{r} (a_\mu I + B_{h,\mu}(x, t, \partial))u_h(x, t - t_\mu) + f(x, t), \\
&\qquad x \in \mathscr{R}_h^n, t_r \leqslant t = t_k \leqslant T - \tau,
\end{aligned} \tag{10.51}$$

初值 $u_h(x, 0)$, $u_h(x, \tau)$, $\cdots$, $u_h(x, t_r)$ 由一个适当的初值处理过程得到，它们都是对 $U_0(x)$ 一致有界的，并且当 $h \to 0$ 时，都趋向于 $U_0(x)$.

若 $B_{h,-1}(x, t, \partial) \equiv 0$, 则 (10.51) 是显式格式，否则是隐式格式. 我们总假定 $(I - B_{h,-1}(x, t, \partial))^{-1}$ 存在，并且它的范数对 x, t 一致有界. 若记

$$\bar{u}_h(x, t) = (u_h(x, t), \cdots, u_h(x, t - t_r))^*,$$

$$\bar{B}_h(x, t, \partial) =$$

$$\begin{pmatrix}
(I - B_{h,-1})^{-1}(a_0 I + B_{h,0}) & \cdots\cdots & (I - B_{h,-1})^{-1}(a_r I + B_{h,r}) \\
I & \cdots\cdots & 0 \\
\cdots & & \cdots \\
0 & \cdots I & 0
\end{pmatrix},$$

$$\bar{f}(x, t) = ((I - B_{h,-1}(x, t, \partial))^{-1} f(x, t), 0, 0, \cdots, 0)^*,$$

则可把 (10.51) 改写成

$$\bar{u}_h(x, t+\tau) = \bar{B}_h(x, t, \partial)\bar{u}_h(x, t) + \tau \bar{f}(x, t). \tag{10.52}$$

通常还把 $\bar{B}_h(x, t, \partial)$ 记为 $\bar{B}^{(0)} + \bar{B}^{(1)} + \bar{B}_h^{(2)}$, 其中

$$\bar{B}^{(0)} = \begin{pmatrix} a_0 I & a_1 I & \cdots & a_r I \\ I & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix},$$

$\bar{B}^{(0)} + \bar{B}^{(1)} =$

$$\begin{pmatrix} (I - B'_{-1})^{-1}(a_0 + B'_0) & \cdots & \cdots & (I - B'_{-1})^{-1}(a_r + B'_r) \\ I & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix}.$$

记 $\theta = h\beta$，并把 $B'_\mu(x, t, \partial)$ 中的 $\hat{\partial}_{x_m}$，∂_{x_m}，$\bar{\partial}_{x_m}$ 分别用 $i\sin\theta_m$，$2i\sin\frac{\theta_m}{2}\, e^{\frac{i\theta m}{2}}$和 $2i\sin\frac{\theta_m}{2}\, e^{-\frac{i\theta m}{2}}$ 来代替，则得到它的 Fourier 变换 $\hat{B}'_\mu(x, t, \theta)$。用 κ_l 表示下列行列式的根

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}\{\kappa^{r+1}(I - \hat{B}'_{-1}(x, t, \theta)) - \kappa^r(a_0 I + \hat{B}'_0(x, t, \theta)) \\ - \cdots\cdots - (a_r I + \hat{B}'_r(x, t, \theta))\} = 0. \end{aligned} \qquad (10.53)$$

如果存在与 x，t 和 θ 无关的正常数 δ_1，使得对一切 $|\theta_m| \leqslant \pi$，都有

$$|\kappa_l| \leqslant 1 - \delta_1|\theta|_{(2)}^{2p}, \qquad 1 \leqslant l \leqslant M(r+1),$$

则称格式 (10.51) 是一致抛物型差分格式。

又记

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} a_0 & \cdots & \cdots & a_r \\ 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dahlquist (1956) 把下列条件称为根条件：

(i) $\mathscr{A}$有一个特征值为 1；

(ii) $\mathscr{A}$的全部特征值都不在单位圆之外；

(iii) 在单位圆上的$\mathscr{A}$的特征值都是简单特征值。

如果格式 (10.51) 对 (10.50) 的逼近是相容的，则一定满足根条件 (i)。Widlund (1965) 还证明，对于每个 Петровский 意义

下的一致抛物型方程组，一定存在逼近它的相容的一致抛物型差分格式，并且还满足根条件．他还给出了下列结果：

定理 10.5 假设 L 是 Петровский 意义下的一致抛物型偏微分算子，格式 (10.51) 对 (10.50) 的逼近是相容的，$\mathscr{A}$ 的特征值仅有一个在单位圆上，其余都在单位圆内，并且对一切 $\theta \neq 0$，$|\theta_m| \leqslant \pi$，(10.53) 的全部根都在单位圆内，那末 (10.51) 一定是一致抛物型差分格式．

下面我们总假定 (10.51) 是一致抛物型差分格式，并满足根条件，为了分析它的稳定性，先考虑下列辅助问题

$$(I - B'_{-1}(y, t, \partial))u_h(x, t+\tau)$$
$$= \sum_{\mu=0}^{r} (a_\mu I + B'_\mu(y,t,\partial))u_h(x, t - t_\mu), \quad (10.54)$$

其中 $y \in \mathscr{R}_h^n$ 是固定的．上式又可改写为

$$\bar{u}_h(x, t+\tau) = (\bar{B}^{(0)} + \bar{B}^{(1)}(y, t, \partial))\bar{u}_h(x, t).$$

用 $g_h^{(y)}(x, t, t_\xi)$ 表示 (10.54) 的离散 Green 函数或基本解，它满足

$$\begin{cases} g_h^{(y)}(x, t+\tau, t_\xi) = (\bar{B}^{(0)} + \bar{B}^{(1)}(y, t, \partial))g_h^{(y)}(x, t, t_\xi), \\ \qquad x \in \mathscr{R}_h^n, \ t_\xi \leqslant t = t_k \leqslant T - \tau, \\ g_h^{(y)}(x, t_\xi, t_\xi) = \delta(x, 0)I = \prod_{m=1}^{n} \delta(x_m, 0)I, \quad x \in \mathscr{R}_h^n. \end{cases}$$

用 F_ν 表示矩阵，并定义

$$\prod_{\nu=\nu_1}^{\nu_2} F_\nu = \begin{cases} F_{\nu_1} \cdots F_{\nu_2}, & \text{当 } \nu_2 \geqslant \nu_1 \text{ 时}, \\ I, & \text{当 } \nu_2 < \nu_1 \text{ 时}, \end{cases}$$

则不难得到

$$g_h^{(y)}(x, t_k, t_\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_Q \prod_{\nu=\xi}^{k-1} (\bar{B}^{(0)} + \hat{B}^{(1)}(y, t_\nu, \theta))e^{ix\cdot\theta}d\theta,$$
$$x \in \mathscr{R}_h^n, \quad (10.55)$$

其中 $\hat{B}^{(1)}(y, t_\nu, \theta)$ 是由 $\bar{B}^{(1)}(y, t, \partial)$ 诱导出来的 Fourier 变换，

$$Q = \{\theta / |\theta_m| \leqslant \pi, \quad 1 \leqslant m \leqslant n\}.$$

为了估计 $g_h^{(y)}(x, t, t_\xi)$及其差商的性质，需要把 $\hat{B}^{(1)}(y, t, \theta)$ 扩充为多复变函数. 令$z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$, $z_m = h(\beta_m + i\eta_m) = \theta_m + ih\eta_m$, $1 \leqslant m \leqslant n$. 根据前面的假定，存在与 y, t 无关的正常数 c_2，使得

$$|\mathrm{Det}(I - \hat{B}'_{-1}(y, t, \theta))| \geqslant c_1,$$

从而存在与 y, t 无关的正常数 c_2，使得当$|h\eta_m| \leqslant c_2$时，

$$|\mathrm{Det}(I - \hat{B}'_{-1}(y, t, z))| \geqslant \frac{c_1}{2} \tag{10.56}$$

若记 $D_z = \{z / |\theta_m| \leqslant \pi,\ |h\eta_m| \leqslant c_2\}$，则可把 $\hat{B}^{(1)}(y, t, \theta)$ 扩充为 D_z 上的解析函数 $\hat{B}^{(1)}(y, t, z)$，并且对一切 $x \in \mathscr{R}_h^n, z \in D_z$,

$$g_h^{(y)}(x, t_k, t_\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_\Omega \prod_{\nu=\xi}^{k-1} (\bar{B}^{(0)} + \hat{B}^{(1)}(y, t_\nu, z)) e^{ix\cdot(\beta+i\eta)} d\theta.$$

下面将适当地选择 η_m 的值.

不难验证

$$\partial_{x_m} g_h^{(y)}(x, t_k, t_\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_\Omega \prod_{\nu=\xi}^{k-1} (\bar{B}^{(0)} + \hat{B}^{(1)}(y, t_\nu, z)) \times (e^{i(\theta_m + ih\eta_m)} - 1) e^{ix\cdot(\beta+i\eta)} d\theta, \qquad x \in \mathscr{R}_h^n.$$

一般地有

$$\partial^s g_h^{(y)}(x, t_k, t_\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_\Omega \prod_{\nu=\xi}^{k-1} (\bar{B}^{(0)} + \hat{B}^{(1)}(y, t_\nu, z)) P_s(z) e^{ix\cdot(\beta+i\eta)} d\theta, \qquad x \in \mathscr{R}_h^n, \tag{10.57}$$

其中 $P_s(z)$ 是$|s|$阶三角多项式，并存在正常数 c_s，使得

$$|P_s(z)| \leqslant c_s |z|_{(2p)}^{|s|}.$$

命题 10.2 假设 κ_l 是 $\bar{B}^{(0)} + \hat{B}^{(1)}(y, t, z)$ 的特征值，那末存在与 y, t 无关的正常数 δ_2 和 c_3，使得对一切 $z \in D_z$,

$$|\kappa_l| \leqslant 1 - \delta_2 |\theta|_{(2p)}^{2p} + c_3 |h\eta|_{(2p)}^{2p}. \tag{10.58}$$

证明 只要把 $\hat{B}'_\mu(y, t, \theta)$ 扩充为 $\hat{B}'_\mu(y, t, z)$，就可由 (10.53) 确定 κ_l. 因为特征值连续依赖于矩阵，故对任意 $\varepsilon > 0$，都可找到 $c_3 > 0$，使得当$|h\eta|_{(2p)} \geqslant \varepsilon |\theta|_{(2p)}$时，(10.58) 成立.

显然，我们只要考虑这样的一些 κ_l，使得当 $z\to 0$ 时，它退化为 $\mathscr{A}$ 的位于单位圆上的特征值。用 $e^{i\varphi}$ 表示 $\mathscr{A}$ 的特征值，$\sigma+1=\kappa e^{-i\varphi}$，则由 (10.53) 得到

$$\mathrm{Det}\left\{\sigma\left((r+1)e^{i\varphi(r+1)}-\sum_{\mu=0}^{r}a_\mu(r-\mu)e^{-i\varphi(r-\mu)}\right)I\right.$$

$$\left.-\sum_{\mu=-1}^{r}e^{i\varphi(r-\mu)}\hat{B}'_\mu(y,t,z)+O(\sigma^2+\sigma|z|_{(2p)}^{2p})I\right\}=0.$$

根条件 (iii) 则保证了上式中 σ 的系数非零，从而当 $z\to 0$ 时，$|\sigma_l|=O(|z|_{(2p)}^{2p})$。另一方面，由于 (10.51) 是一致抛物型格式，故当 $|\theta|_{(2p)}\leqslant\varepsilon_1$ 时，

$$\mathrm{Re}\sigma_l(y,t,\theta)\leqslant-\frac{\delta_1}{2}|\theta|_{(2)}^{2p}.$$

因此若 $|\theta|_{(2p)}\leqslant\varepsilon_1$，$|h\eta|_{(2p)}\leqslant\varepsilon|\theta|_{(2p)}$，则有

$$\mathrm{Re}\sigma_l(y,t,z)\leqslant-\frac{\delta_1}{4}|\theta|_{(2)}^{2p}.$$

若 $|\theta|_{(2p)}\geqslant\varepsilon_1$，$|h\eta|_{(2p)}\leqslant\varepsilon|\theta|_{(2p)}$，则可证明 $|\kappa_l|$ 一致小于 1，余下的证明是显然的.

命题 10.3 存在与 y，t，t' 和 τ 无关的正常数 c_4，使得对一切 $t\in[t',T]$ 和 $z\in D_z$，

$$\left|\prod_{\nu=[\frac{t'}{\tau}]}^{[\frac{t}{\tau}]-1}(\bar{B}^{(0)}+\hat{B}^{(1)}(y,t_\nu,z))\right|_{(2)}$$

$$\leqslant c_4\exp\left(\left(-\frac{\delta_2}{2\lambda}|\beta|_{(2p)}^{2p}+\frac{2c_3}{\lambda}|\eta|_{(2p)}^{2p}\right)(t-t')\right),$$

其中矩阵范数 $|F|_{(2)}$ 是对应于向量范数 $|V|_{(2)}$ 的.

证明 用 $\mathscr{F}$ 表示矩阵族，它的元素是

$$F(y,t,z)=(\bar{B}^{(0)}+\hat{B}^{(1)}(y,t,z))\exp\left(\frac{\delta_2}{2}|\theta|_{(2p)}^{2p}-2c_3|h\eta|_{(2p)}^{2p}\right).$$

根据命题 10.2，可证明存在正常数 c_R，使得对一切复数 z'，$|z'|>1$，都有

$$
|(F - z'I)^{-1}| \leqslant \frac{c_R}{|z'| - 1}.
$$

即$\mathscr{F}$是稳定的. 由 Kreiss 定理 (1962) 和 $\hat{B}^{(1)}(y, t, z)$ 对 t 的连续依赖性,存在正数 Δt, 正定 Hermite 阵 $H(y, t'', z)$ 和正常数 c_5, 使得对一切 $t \in [t'' - \Delta t, t'' + \Delta t] \cap [0, T]$, 都有

$$
F^*(y, t, z) H(y, t'', z) F(y, t, z) \leqslant H(y, t'', z),
$$

$$
c_5^{-1} I \leqslant H(y, t'', z) \leqslant c_5 I,
$$

从而

$$
\left| \prod_{\nu = [\frac{t'' - \Delta t}{\tau}]}^{[\frac{t'' + \Delta t}{\tau}] - 1} F(y, t_\nu, z) \right|_{(2)} \leqslant c_5 \left| \prod_{\nu = [\frac{t'' - \Delta t}{\tau}]}^{[\frac{t'' + \Delta t}{\tau}] - 1} F(y, t_\nu, z) \right|_{H(t'' - \tau)}
$$

$$
\leqslant c_5,
$$

其中矩阵范数 $|F|_H$ 是对向量范数 $|v|_H = (v^* H v)^{\frac{1}{2}}$ 而言的. 一般地有

$$
\left| \prod_{\nu = [\frac{t'}{\tau}]}^{[\frac{t}{\tau}] - 1} F(y, t_\nu, z) \right|_{(2)} \leqslant c_5^{[\frac{T}{2\Delta t}] + 2},
$$

并由此推出所证的结果.

定理 10.6 存在与 y, τ 无关的正常数 c_1', 使得对一切 $0 \leqslant t_\xi \leqslant t_k \leqslant T$, $x \in \mathscr{R}_h^n$ 和 $|h\eta_m| \leqslant c_2$, 都有

$$
|h^{-|s|} \partial^s g_k^{(y)}(x, t_k, t_\xi)| \leqslant c_1' h^n (t_k - t_\xi + \tau)^{\frac{-(n + |s|)}{2p}}
$$

$$
\cdot \exp\left(\frac{3c_3}{\lambda} |\eta|_{(2p)}^{2p} (t_k - t_\xi + \tau) - x \cdot \eta \right).
$$

证明 当 $t_\xi = t_k$ 时,结论是显然的. 若 $t_k > t_\xi$,则由 (10.57) 和命题 10.3 得到,对一切 $x \in \mathscr{R}_h^n$ 和 $z \in D_x$,

$$
|h^{-|s|} \partial^s g_k^{(y)}(x, t_k, t_\xi)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^n} c_s c_4 \exp
$$

$$
\cdot \left(\frac{2c_3}{\lambda} |\eta|_{(2p)}^{2p} (t_k - t_\xi) - x \cdot \eta \right)
$$

$$
\times \int_Q (|\beta|_{(2p)} + |\eta|_{(2p)})^{|s|} \exp
$$

$$\cdot\left(-\frac{\delta_2}{2\lambda}|\beta|_{(2p)}^{2p}(t_k-t_\xi)\right)d\theta.$$

记 $\omega_m=\theta_m(k-\xi)^{\frac{1}{2p}}$ 则有

$$|h^{-|s|}\partial^s g_h^{(y)}(x,t_k,t_\xi)|\leqslant\frac{1}{(2\pi)^n}c_s c_4 h^n\lambda^{\frac{n}{2p}}$$

$$\cdot(t_k-t_\xi)^{\frac{-n}{2p}}\exp\left(\frac{2c_3}{\lambda}|\eta|_{(2p)}^{2p}(t_k-t_\xi)-x\cdot\eta\right)$$

$$\times\int_Q\left(\frac{|\omega|_{(2p)}|\lambda|^{\frac{1}{2p}}}{|t_k-t_\xi|^{\frac{1}{2p}}}+|\eta|_{(2p)}\right)^{|s|}$$

$$\cdot\exp\left(-\frac{\delta_2}{2}|\omega|_{(2p)}^{2p}\right)d\omega,$$

并由此推得所证的结果.

注记 10.1 若取

$$\eta_m=\mathrm{sign}(x_m)\min\left(|x_m|^{\frac{1}{2p-1}}\left(\frac{6c_3}{\lambda}(t_k-t_\xi+\tau)\right)^{\frac{-1}{2p-1}},\ \frac{c_2}{h}\right),$$

则有

$$|h^{-|s|}\partial^s g_h^{(y)}(x,t_k,t_\xi)|\leqslant c_s' h^n(t_k-t_\xi+\tau)^{\frac{-(n+|s|)}{2p}}$$

$$\cdot\prod_{m=1}^{n}\exp(-c_6\gamma_m(x,t_k,t_\xi)),$$

其中 c_6 是与 y,τ 无关的正常数,

$$\gamma_m(x,t_k,t_\xi)=\min\left(|x_m|^{\frac{2p}{2p-1}}(t_k-t_\xi+\tau)^{\frac{-1}{2p-1}},\ \frac{|x_m|}{h}\right).$$

下面来讨论与 (10.51) 相对应的齐次问题的离散 Green 函数 $G_h(x,t,x',t_\xi)$, 它满足

$$\begin{cases}G_h(x,t+\tau,x',t_\xi)=\bar{B}_h(x,t,\partial)G_h(x,t,x',t_\xi),\\ \qquad\qquad t_\xi\leqslant t=t_k\leqslant T-\tau,\\ G_h(x,t_\xi,x',t_\xi)=\delta(x,x')I.\end{cases}$$

令 $E_\tau\mathscr{L}(k)=\mathscr{L}(k+1)$, 并记

$$G_h(x,t_k,x',t_\xi)=g_k^{(x')}(x-x',t_k,t_\xi)$$

$$+\sum_{\nu=\xi}^{k-1}\sum_{y\in\mathscr{R}_h^n} g_h^{(y)}(x-y,t_k,t_{\nu+1})\phi(y,t_\nu,x',t_\xi), \qquad (10.59)$$

则得到

$$\begin{aligned}\phi(x,t_k,x',t_\xi) &= (\bar{B}_h(x,t_k,\partial)-E_\tau)g_h^{(x')}(x-x',t_k,t_\xi)\\ &+\sum_{\nu=\xi}^{k-1}\sum_{y\in\mathscr{R}_h^n}(\bar{B}_h(x,t_k,\partial)-E_\tau)g_h^{(y)}(x-y,t_k,t_{\nu+1})\\ &\cdot\phi(y,t_\nu,x',t_\xi).\end{aligned} \qquad (10.60)$$

又记

$$\begin{cases}\phi^{(0)}(x,t_k,x',t_\xi)=(\bar{B}_h(x,t_k,\partial)-E_\tau)g_h^{(x')}(x-x',t_k,t_\xi),\\ \phi^{(l)}(x,t_k,x',t_\xi)=\displaystyle\sum_{\nu=\xi}^{k-1}\sum_{y\in\mathscr{R}_h^n}\phi^{(0)}(x,t_k,y,t_{\nu+1})\\ \quad\cdot\phi^{(l-1)}(y,t_\nu,x',t_\xi), \qquad l\geqslant 1.\end{cases}$$

如果 $\sum_{l=0}^{\infty}\phi^{(l)}$ 一致且绝对收敛，则它就是 (10.60) 的解，从而把原问题归结为对 $\phi^{(l)}$ 的估计. 为此我们将应用下列三个估计式.

命题 10.4 若 $\xi\leqslant\nu\leqslant k-1$，则存在仅与 p, λ 和 $\varepsilon>0$ 有关的正数 c_7，使得

$$h^n\sum_{y\in\mathscr{R}_h^n}\exp(-\varepsilon|x-y|_{(1)}(t_k-t_\nu)^{\frac{-1}{2p}})\leqslant c_7(t_k-t_\nu)^{\frac{n}{2p}},$$

$$h^n\sum_{y\in\mathscr{R}_h^n}\exp(-\varepsilon|x'-y|_{(1)}(t_\nu-t_\xi+\tau)^{\frac{-1}{2p}})$$

$$\leqslant c_7(t_\nu-t_\xi+\tau)^{\frac{n}{2p}}.$$

命题 10.5 若 $\xi\leqslant\nu_1\leqslant\nu_2\leqslant k-1$, $0\leqslant\gamma<1$，则有

$$\tau\sum_{\nu=\nu_1}^{\nu_2}(t_k-t_\nu)^{-\gamma}\leqslant\frac{1}{1-\gamma}(t_{\nu_2}-t_{\nu_1}+\tau)^{1-\gamma},$$

$$\tau\sum_{\nu=\nu_1}^{\nu_2}(t_\nu-t_\xi+\tau)^{-\gamma}\leqslant\frac{1}{1-\gamma}(t_{\nu_2}-t_{\nu_1}+\tau)^{1-\gamma}.$$

命题 10.6 若 $0<\gamma_1<1<\gamma_2$，则有

$$\tau \sum_{\nu=\xi}^{k-1} (t_k - t_\nu)^{-1+\gamma_1}(t_\nu - t_\xi + \tau)^{-1+\gamma_2}$$

$$\leqslant (t_k - t_\xi + \tau)^{-1+\gamma_1+\gamma_2} \frac{\Gamma(\gamma_1)\Gamma(\gamma_2)}{\Gamma(\gamma_1+\gamma_2)},$$

其中 $\Gamma(\gamma_i)$ 表示特殊函数 $\Gamma(a)$ 在 $a=\gamma_i$ 的值.

命题 10.7 $\sum_{l=0}^{\infty} \phi^{(l)}$ 一致且绝对收敛，并存在正常数 c_8，使得对一切 $|h\eta_m| \leqslant c_9 < c_2$，都有

$$|\phi(x, t_k, x', t_\xi)| \leqslant c_8 \tau h^n (t_k - t_\xi + \tau)^{\frac{-(n+2p-\delta)}{2p}}$$
$$\cdot \exp(4c_3 |\eta|_{(2p)}^{2p} (t_k - t_\xi + \tau) - (x - x') \cdot \eta).$$

证明 先考察 $\bar{B}_h(x, t, \partial) - (\bar{B}^{(0)} + \bar{B}^{(1)}(x', t, \partial))$. 不难直接验证

$$(I - B_{h,-1}(x, t, \partial))^{-1}(a_\mu I + B_{h,\mu}(x, t, \partial))$$
$$- (I - B'_{-1}(x', t, \partial))^{-1}(a_\mu I + B'_{h,\mu}(x', t, \partial))$$
$$= (I - B_{h,-1}(x, t, \partial))^{-1} \Big\{ \sum_{|s|\geqslant 2p} (b_{-1,0,s}(x, t)$$
$$- b_{-1,0,s}(x', t))(I - B'_{-1}(x', t, \partial))^{-1}$$
$$\cdot (a_\mu I + B'_\mu(x', t, \partial))\partial^s + \sum_{\sigma>0} b_{-1,\sigma,s}(x, t)$$
$$\cdot (I - B'_{-1}(x', t, \partial))^{-1}(a_\mu I + B'_\mu(x', t, \partial))h^\sigma \partial^s$$
$$+ \sum_{|s|\geqslant 2p} (b_{\mu,0,s}(x, t) - b_{\mu,0,s}(x', t))\partial^s$$
$$+ \sum_{\sigma>0} b_{\mu,\sigma,s}(x, t)h^\sigma \partial^s \Big\}, \qquad (10.61)$$

其中

$$\sum_{|s|\geqslant 2p} |b_{\mu,0,s}(x, t) - b_{\mu,0,s}(x', t)| = O(|x - x'|_{(1)}^\delta).$$

其次有

$$\phi^{(0)}(x, t_k, x', t_\xi) = (\bar{B}_h(x, t_k, \partial) - E_\tau) g_h^{(x')}(x - x', t_k, t_\xi)$$
$$= (\bar{B}_h(x, t_k, \partial) - (\bar{B}^{(0)} + \bar{B}^{(1)}(x', t_k, \partial)))$$
$$\cdot g_h^{(x')}(x - x', t_k, t_\xi).$$

结合 (10.61) 和定理 10.6，并注意到 $|(I - B_{h,-1}(x, t, \partial))^{-1}|$,

$|B_{k,\beta}(x,t,\partial)|$ 和 $|B'_{\mu}(x,t,\partial)|$ 一致有界，即知当 $|h\eta_m|\leqslant c_2$ 时，

$$
\begin{aligned}
&|\psi^{(0)}(x,t_k,x',t_\xi)| \\
&\leqslant c_{10}\tau h^n\Big(|x-x'|^d_{(1)}(t_k-t_\xi+\tau)^{\frac{-(n+2p)}{2p}} \\
&\quad + (t_k-t_\xi+\tau)^{\frac{-(n+2p-1)}{2p}}\Big) \\
&\quad \cdot \exp\left(\frac{3c_3}{\lambda}|\eta|^{2p}_{(2p)}(t_k-t_\xi+\tau)-(x-x')\cdot\eta\right).
\end{aligned}
$$

因为

$$
\begin{aligned}
&|x-x'|^d_{(1)}(t_k-t_\xi+\tau)^{-\frac{d}{2p}}\exp \\
&\quad \cdot\left(-\varepsilon|x-x'|_{(1)}(t_k-t_\xi+\tau)^{-\frac{1}{2p}}\right)\leqslant c_{11}(\varepsilon),
\end{aligned}
$$

其中 $c_{11}(\varepsilon)$ 是与 ε 有关的正常数，所以

$$
\begin{aligned}
|\psi^{(0)}(x,t_k,x',t_\xi)| &\leqslant c_{10}\tau h^n\left(c_{11}(\varepsilon)+T^{\frac{1-d}{2p}}\right) \\
&\quad \cdot (t_k-t_\xi+\tau)^{\frac{-(n+2p-d)}{2p}}\exp\left(\frac{3c_3}{\lambda}|\eta|^{2p}_{(2p)}\right. \\
&\quad \cdot(t_k-t_\xi+\tau)-(x-x')\cdot\eta \\
&\quad \left.+\varepsilon|x-x'|_{(1)}(t_k-t_\xi+\tau)^{-\frac{1}{2p}}\right).
\end{aligned}
$$

取

$$
\eta_m=\eta_m^{(1)}+\varepsilon\operatorname{sign}(x_m-x'_m)(t_k-t_\xi+\tau)^{-\frac{1}{2p}},
$$

则当 $|h\eta_m^{(1)}|\leqslant c_2-\varepsilon\lambda^{-\frac{1}{2p}}$ 时，

$$
\begin{aligned}
&|\psi^{(0)}(x,t_k,x',t_\xi)| \\
&\leqslant c_{12}(\varepsilon,\varepsilon_1)\tau h^n(t_k-t_\xi+\tau)^{\frac{-(n+2p-d)}{2p}} \\
&\quad \cdot\exp\left(\frac{3c_3}{\lambda}(1+\varepsilon_1)|\eta^{(1)}|^{2p}_{(2p)}(t_k-t_\xi+\tau)\right. \\
&\quad \left.-(x-x')\cdot\eta^{(1)}\right).
\end{aligned}
$$

下面来估计 $\psi^{(1)}$，由上式和 $\psi^{(1)}$ 的定义可以知道，当 $|h\eta_m^{(2)}|$，$|h\eta_m^{(3)}|\leqslant c_2-\varepsilon\lambda^{-\frac{1}{2p}}$ 时，

$$
|\psi^{(1)}(x,t_k,x',t_\xi)|\leqslant c_{12}^2(\varepsilon,\varepsilon_1)\tau h^n\sum_{\nu=\xi}^{k-1}\tau(t_k-\tau_\nu)^{-1+\frac{d-n}{2p}}
$$

$$\cdot (t_\nu - t_\xi + \tau)^{-1+\frac{d-n}{2p}} \Big[h^n \sum_{y \in \mathscr{R}_h^n} \exp\Big(\frac{3c_3}{\lambda}(1+\varepsilon_1)$$

$$\times (|\eta^{(2)}|_{(2p)}^{2p}(t_k - t_\nu) + |\eta^{(3)}|_{(2p)}^{2p}(t_\nu - t_\xi + \tau))$$

$$-(x-y)\cdot\eta^{(2)} - (y-x')\cdot\eta^{(3)}\Big)\Big].$$

令

$$\begin{cases} \eta_m^{(2)} = \eta_m^{(4)} + \varepsilon \operatorname{sign}(x_m - y_m)(t_k - t_\nu)^{-\frac{1}{2p}}, \\ \eta_m^{(3)} = \eta_m^{(4)} + \varepsilon \operatorname{sign}(y_m - x_m')(t_\nu - t_\xi + \tau)^{-\frac{1}{2p}}, \end{cases}$$

则当 $|h\eta_m^{(4)}| \leqslant c_2 - 2\varepsilon\lambda^{-\frac{1}{2p}}$时，

$$|\psi^{(1)}(x, t_k, x', t_\xi)| \leqslant c_{13}(\varepsilon, \varepsilon_1)\tau h^n$$

$$\cdot \exp\Big(\frac{3c_3}{\lambda}(1+2\varepsilon_1)|\eta^{(4)}|_{(2p)}^{2p}(t_k - t_\xi + \tau)$$

$$-(x-x')\cdot\eta^{(4)}\Big) \sum_{\nu=\xi}^{k-1} \tau(t_k - t_\nu)^{-1+\frac{d-n}{2p}}$$

$$\cdot (t_\nu - t_\xi + \tau)^{-1+\frac{d-n}{2p}}$$

$$\Big[h^n \sum_{y\in\mathscr{R}_h^n} \exp(-\varepsilon(|x-y|_{(1)}(t_k - t_\nu)^{-\frac{1}{2p}}$$

$$+ |y-x'|_{(1)}(t_\nu - t_\xi + \tau)^{-\frac{1}{2p}}))\Big],$$

其中，由命题 10.4，10.5 得到

$$\tau h^n \sum_{\nu=\xi}^{k-1} (t_k - t_\nu)^{-1+\frac{d-n}{2p}} (t_\nu - t_\xi + \tau)^{-1+\frac{d-n}{2p}}$$

$$\cdot \sum_{y\in\mathscr{R}_h^n} \exp(-\varepsilon(|x-y|_{(1)}(t_k - t_\nu)^{-\frac{1}{2p}}$$

$$+ |y-x'|_{(1)}(t_\nu - t_\xi + \tau)^{-\frac{1}{2p}}))$$

$$\leqslant \tau h^n \sum_{\nu=\xi}^{\left[\frac{k+\xi-1}{2}\right]} \sum_{y\in\mathscr{R}_h^n} \left(\frac{t_k - t_\xi + \tau}{2}\right)^{-1+\frac{d-n}{2p}}$$

$$\cdot (t_\nu - t_\xi + \tau)^{-1+\frac{d}{2p}} (t_\nu - t_\xi + \tau)^{-\frac{n}{2p}}$$

$$\times \exp(-\varepsilon |y - x'|_{(1)} (t_\nu - t_\xi + \tau)^{-\frac{1}{2p}})$$

$$+ \tau h^n \sum_{\nu=[\frac{k+\xi-1}{2}]+1}^{k-1} \sum_{y \in \mathfrak{R}_h^n} \left(\frac{t_k - t_\xi + \tau}{2}\right)^{-1+\frac{d-n}{2p}}$$

$$\cdot (t_k - t_\nu)^{-1+\frac{d}{2p}} \times (t_k - t_\nu)^{-\frac{n}{2p}}$$

$$\cdot \exp(-\varepsilon |x - y|_{(1)} (t_k - t_\nu)^{-\frac{1}{2p}})$$

$$\leqslant c_{14} (t_k - t_\xi + \tau)^{-1+\frac{2d-n}{2p}}.$$

一般地，当

$$0 \leqslant l \leqslant l' = \left[\frac{2p+n}{d}\right] + 1, \ |h\eta_m| \leqslant c_2 - \varepsilon(l+1)\lambda^{-\frac{1}{2p}}$$

时，

$$|\psi^{(l)}(x, t_k, x', t_\xi)| \leqslant c_{15}(l) \tau h^n (t_k - t_\xi + \tau)^{-1+\frac{d(l+1)-n}{2p}}$$
$$\times \exp\left(\frac{3c_5}{\lambda}(1 + \varepsilon_1(l+1)) |\eta|_{(2p)}^{2p} (t_k - t_\xi + \tau) - (x - x') \cdot \eta\right). \qquad (10.62)$$

下面来估计$|\psi^{(l'+1)}|$. 我们有

$$|\psi^{(l'+1)}(x, t_k, x', t_\xi)| \leqslant c_{16}(l') \tau h^n$$
$$\cdot \sum_{\nu=\xi}^{k-1} \tau (t_k - t_\nu)^{-1+\frac{d-n}{2p}} (t_\nu - t_\xi + \tau)^{-1+\frac{d(l'+1)-n}{2p}}$$
$$\times \sum_{y \in \mathfrak{R}_h^n} h^n \exp\left(\frac{3c_5}{\lambda}((1+\varepsilon_1)|\eta^{(5)}|_{(2p)}^{2p}(t_k - t_\nu) + (1 + \varepsilon_1(l'+1))|\eta^{(6)}|_{(2p)}^{2p}(t_\nu - t_\xi + \tau)) - (x - y) \cdot \eta^{(5)} - (y - x') \cdot \eta^{(6)}\right).$$

选取

$$\begin{cases} \eta_m^{(5)} = \eta_m + \varepsilon \operatorname{sign}(x_m - y_m)(t_k - t_\nu)^{-\frac{1}{2p}}, \\ \eta_m^{(6)} = \eta_m, \end{cases}$$

则由命题 10.4 和 10.6 得到，当 $|h\eta_m| \leqslant c_2 - \varepsilon\lambda^{-\frac{1}{2p}}(l'+1)$ 时，

$$|\phi^{(l'+1)}(x, t_k, x', t_\xi)| \leqslant c_{16}(l')\tau h^n \exp\Big(\frac{3c_3}{\lambda}(1 + \varepsilon_1(l'+1))|\eta|_{(2p)}^{2p}(t_k - t_\xi + \tau) - (x - x')\cdot\eta\Big)\sum_{\nu=\xi}^{k-1}\tau(t_k - t_\nu)^{-1+\frac{d}{2p}}$$

$$\cdot (t_\nu - t_\xi + \tau)^{-1+\frac{d(l'+1)-n}{2p}} \times h^n \sum_{y\in \mathscr{R}_h^n}(t_k - t_\nu)^{-\frac{n}{2p}}$$

$$\cdot \exp\left(-\varepsilon|x-y|_{(1)}(t_k - t_\nu)^{-\frac{1}{2p}}\right)$$

$$\leqslant c_{17}(l')\tau h^n(t_k - t_\xi + \tau)^{-1+\frac{d(l'+2)-n}{2p}}\exp\Big(\frac{3c_3}{\lambda}(1 + \varepsilon_1(l'+1))|\eta|_{(2p)}^{2p} \times (t_k - t_\xi + \tau) - (x - x')\cdot\eta\Big)\Gamma\left(\frac{d}{2p}\right)\Gamma\left(\frac{d(l'+1)-n}{2p}\right)$$

$$\cdot\left(\Gamma\left(\frac{d(l'+2)-n}{2p}\right)\right)^{-1}.$$

于是由归纳法得到，当 $|h\eta_m| \leqslant c_2 - \varepsilon(l'+1)\lambda^{-\frac{1}{2p}}$ 时，

$$|\phi^{(l+l')}(x, t_k, x', t_\xi)| \leqslant c_{17}\tau h^n(t_k - t_\xi + \tau)^{-1+\frac{d(l+l'+1)-n}{2p}}$$

$$\exp\Big(\frac{3c_3}{\lambda}(1 + \varepsilon_1(l'+1))\Big)|\eta|_{(2p)}^{2p}(t_k - t_\xi + \tau) - (x - x')\cdot\eta)$$

$$\cdot\Gamma\left(\frac{d(l'+1)-n}{2p}\right)\left(c_{18}\Gamma\left(\frac{d}{2p}\right)\right)^l\left(\Gamma\left(\frac{d(l+l'+1)-n}{2p}\right)\right)^{-1}.$$

最后在上式和 (10.62) 中适当选取 ε 和 ε_1，即得所证的结论. 根据 (10.59)，定理 10.6 和估计 $|\phi^{(l)}|$ 时所用的方法可得到:

定理 10.7 存在与 x, x', t_k, t_ξ 和 τ 无关的正数 c_{19}，使得对一切 $|s| < 2p$，$|h\eta_m| \leqslant c_{20} < c_2$，都有

$$|h^{-|s|}\partial^s G_h(x, t_k, x', t_\xi)| \leqslant c_{19}h^n(t_k - t_\xi + \tau)^{-\frac{(n+|s|)}{2p}}$$

$$\cdot \exp\Big(\frac{5c_3}{\lambda}|\eta|_{(2p)}^{2p}(t_k - t_\xi + \tau) - (x - x')\cdot\eta\Big).$$

下面记

$$\|v(t_k)\|_\infty = \sup_{x\in\mathscr{R}_h^n} |v(x, t_k)|_{(1)}, \quad |||v||| = \sup_{0\leqslant k\leqslant[\frac{T}{\tau}]} \|v(t_k)\|_\infty.$$

定理 10.8 假设 (10.52) 中 $f\equiv 0$，则存在与 t_k, t_ξ 和 τ 无关的正数 c_{21}，使得对一切 $|s|<2p$，

$$(t_k - t_\xi + \tau)^{\frac{|s|}{2p}} \|h^{-|s|}\partial^s \bar{u}_h(t_k)\|_\infty \leqslant c_{21}\|\bar{u}_h(t_\xi)\|_\infty.$$

证明

$$\bar{u}_h(x, t_k) = \sum_{y\in\mathscr{R}_h^n} G_h(x, t_k, y, t_\xi)\bar{u}_h(y, t_\xi).$$

由定理 10.7，

$$|(t_k - t_\xi + \tau)^{\frac{|s|}{2p}} h^{-|s|}\partial^s\bar{u}_h(x, t_k)|_{(1)} \leqslant c_{19}\|\bar{u}_h(t_\xi)\|_\infty$$
$$\cdot (t_k - t_\xi + \tau)^{-\frac{n}{2p}} h^n \sum_{y\in\mathscr{R}_h^n} \exp\left(\frac{5c_3}{\lambda}|\eta|_{(2p)}^{2p}(t_k - t_\xi + \tau)\right.$$
$$\left. - (x-y)\cdot\eta\right),$$

取

$$\eta_m = \operatorname{sign}(x_m - y_m)\min\left(|x_m - y_m|_{(1)}^{1/2p-1}\right.$$
$$\left.\cdot\left(\frac{6c_3}{\lambda}(t_k - t_\xi + \tau)\right)^{\frac{-1}{2p-1}}, \ \frac{c_{20}}{h}\right),$$

则得所证的结论。

定理 10.9 设 $u_h(x, t)$ 是 (10.51) 的解，则存在与 τ, f 和 U_0 无关的正常数 c_{22}，使得对一切 $|s|\leqslant 2p-1$，都有

$$|||(t+\tau)^{\frac{|s|}{2p}} h^{-|s|}\partial^s u_h||| \leqslant c_{22}(\|U_0\|_\infty + |||f|||_\infty).$$

证明 只要注意到，对一切 $x\in\mathscr{R}_h^n$ 和 $t_{r+1}\leqslant t\leqslant T$，都有

$$\bar{u}_h(x, t) = \sum_{y\in\mathscr{R}_h^n} G_h(x, t, y, t_r)\bar{u}_h(y, t_r)$$
$$+ \tau\sum_{\nu=r}^{[\frac{t-\tau}{\tau}]}\sum_{y\in\mathscr{R}_h^n} G_h(x, t, y, t_{\nu+1})\bar{f}(y, t_\nu).$$

Widlund (1966) 给出了格式 (10.51) 的解 u_h 对 U_0, f 按范数 $\|\cdot\|_\infty$ 稳定的一些必要条件。稍后，Widlund (1970) 还得到了 u_h 的高阶差商对 U 的相应导数的误差估计式。

10.4 按 L^2 范数的稳定性

Widlund (1965) 等还用 Fourier 方法研究初值问题按 L^2 范数的稳定性。为简便计，本节只考虑下列问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = a(x)\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty,\ 0 < t \leqslant T, \\ U(x, 0) = U_0(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases} \tag{10.63}$$

其中 $a(x) \geqslant a_0 > 0$.

用 $u^k(x)$ 表示网格函数 u 在点 x 和时刻 $t_k = k\tau$ 的值，并用下列格式解 (10.63)

$$u^{k+1}(x) = \sum_{m=-M}^{M} b_m(x) u^k(x + mh), \tag{10.64}$$

或写成

$$u^{k+1} = Cu^k.$$

它的局部增长系数是

$$G(\beta, \tau, x) = \sum_{m=-M}^{M} b_m(x) e^{im\beta h}.$$

把它展开后得到

$$G(\beta, \tau, x) = \sum_{m=-M}^{M} b_m(x) + i\beta h \sum_{m=-M}^{M} m b_m(x)$$

$$- \frac{\beta^2 h^2}{2} \sum_{m=-M}^{M} m^2 b_m(x) + O(\beta^3 h^3).$$

我们假定，(10.64) 对 (10.63) 的逼近是相容的，则由 (10.7) 得到

$$G(\beta, \tau, x) = 1 - \lambda\beta^2 h^2 a(x) + O(\beta^3 h^3), \tag{10.65}$$

特别有 $G(0, \tau, x) \equiv 1$.

定理 10.10 如果 $a(x)$ 对 x 满足 Lipschitz 条件，并存在正常数 c_1，使得对一切 x 和 $|\beta h| \leqslant \pi$，都有

$$|G(\beta, \tau, x)|^2 \leqslant 1 - c_1\beta^2 h^2, \qquad (10.66)$$

那末，格式 (10.64) 对初值按 L^2 范数稳定。

证明 事实上可以证明更强的结果，即具有强稳定性：

$$\|u^{k+1}\|^2 = \|Cu^k\|^2 \leqslant (1 + O(\tau))\|u^k\|^2.$$

先假定 $u^k(x)$ 的支集适当小，即当 $|x| \geqslant \zeta$ 时，$u^k(x) \equiv 0$。用 C_0 表示下列常系数差分算子

$$C_0 u^k(x) = \sum_{m=-M}^{M} b_m(0) u^k(x + mh),$$

它所对应的增长系数是

$$G(\beta, \tau, 0) = \sum_{m=-M}^{M} b_m(0) e^{im\beta h}.$$

用 $\hat{u}^{k+1}(\beta, \tau)$ 表示 $C_0 u^k(x)$ 的 Fourier 变换，则由 Parseval 等式和 (10.66) 得到

$$\begin{aligned}
\|C_0 u^k\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}^{k+1}(\beta, \tau)|^2 d\beta \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |G(\beta, \tau, 0)\hat{u}^k(\beta, \tau)|^2 d\beta \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} (1 - c_1\beta^2 h^2)|\hat{u}^k(\beta, t)|^2 d\beta \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - 4c_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2}\right)|\hat{u}^k(\beta, \tau)|^2 d\beta \\
&= \|u^k\|^2 - c_1\|\partial_x u^k\|^2.
\end{aligned}$$

类似地有

$$\|C_0 u^k\|^2 \leqslant \|u^k\|^2 - c_1\|\bar{\partial}_x u^k\|^2.$$

由于

$$\|Cu^k\|^2 = \|C_0 u^k\|^2 + (\|Cu^k\|^2 - \|C_0 u^k\|^2),$$

因此又把问题归结为证明

$$|\|Cu^k\|^2 - \|C_0 u^k\|^2| \leqslant c_1\|\partial_x u^k\|^2 + O(\tau)\|u^k\|^2.$$

因为格式 (10.64) 对 (10.63) 的逼近是相容的，所以

$$C = I + \lambda a(x)\partial_x\bar{\partial}_x + Q,$$

其中 Q 是关于 ∂_x 和 $\bar{\partial}_x$ 的多项式，且至少是三阶的，并由此有

$$\|Cu^k\|^2 = \|u^k\|^2 + 2\lambda\mathrm{Re}(u^k, a\partial_x\bar{\partial}_x u^k) + \lambda^2\|a\partial_x\bar{\partial}_x u^k\|^2$$
$$+ 2\mathrm{Re}(u^k, Qu^k) + 2\lambda\mathrm{Re}(a\partial_x\bar{\partial}_x u^k, Qu^k)$$
$$+ \|Qu^k\|^2, \qquad (10.67)$$
$$(u^k, a\partial_x\bar{\partial}_x u^k) = (u^k, \partial_x(a\bar{\partial}_x u^k)) - (u^k\partial_x a, \partial_x u^k)$$
$$= -(\bar{\partial}_x u^k, a\bar{\partial}_x u^k) - (u^k\partial_x a, \partial_x u^k).$$

用 L 表示 $a(x)$ 的 Lipschitz 常数，则上式右端第二项的绝对值不超过 $Lh\|u^k\|\|\partial_x u^k\|$. 对应于 C_0u^k，(10.67) 中右端第二项应该用 $2\lambda\mathrm{Re}(u^k, a(0)\partial_x\bar{\partial}_x u^k)$ 来代替，它又等于 $-2\lambda\mathrm{Re}(\bar{\partial}_x u^k, a(0)\bar{\partial}_x u^k)$. 由于当 $|x| > \zeta$ 时，$u^k(x) \equiv 0$，故有

$$|(\bar{\partial}_x u^k, a\bar{\partial}_x u^k) - (\bar{\partial}_x^k u^k, a(0)\bar{\partial}_x u^k)| \leqslant 2L\zeta\|\partial_x u^k\|^2.$$

这表明，(10.67) 右端第二项与 C_0u^k 中的相应项的差的绝对值不超过

$$2L\zeta\|\partial_x u^k\|^2 + Lh\|u^k\|\|\partial_x u^k\|. \qquad (10.68)$$

为了估计 (10.67) 右端中其余各项，需要考虑更一般的情况。记 $R = a_1\partial_1 a_2\partial_2\cdots a_r\partial_r a_{r+1}$，其中 ∂_l 等于 ∂_x 或 $\bar{\partial}_x$，$a_l(x)$ 具有 Lipschitz 常数 L. 把 R 中的系数 a_l 与 ∂_l 逐个交换位置后得到

$\partial_1 a_1 R_1$，　　其中 $R_1 = a_2\partial_2\cdots\partial_r a_{r+1}$，

$S_2\partial_2 a_3 R_2$，　　其中 $S_2 = \partial_1 a_1 a_2$，$R_2 = \partial_3\cdots a_{r+1}$，

$S_3\partial_3 a_4 R_3$，　　其中 $S_3 = \bar{\partial}_1 a_1 a_2 a_3\partial_2$，$R_3 = \partial_4\cdots a_{r+1}$，

$\cdots$，

$S_{p-1}\partial_2 a_{r+1} R_{p-1}$，　　其中 $S_{p-1} = \partial_1 a_1\cdots a_r$，$R_{p-1} = \partial_3\cdots\partial_r$，

$R_p = \partial_1 a_1 a_2\cdots a_{r+1}\partial_2\partial_3\cdots\partial_r$，

因为

$$\partial_1 a_1 R_1 u^k = S_2\partial_2 a_3 R_2 u^k = \partial_1 a_1 a_2\partial_2\cdots\partial_r a_{r+1} u^k,$$

所以

$$(u^k, Ru^k) - (u^k, R_p u^k) = [(u^k, Ru^k) - (u^k, \partial_1 a_1 R_1 u^k)]$$
$$+ [(u^k, S_2\partial_2 a_3 R_2 u^k) - (u^k, S_3\partial_3 a_4 R_4 u^k)]$$
$$+ [(u^k, S_3\partial_3 a_4 R_4 u^k) - (u^k, S_3 a_4\partial_3 R_3 u^k)] + \cdots$$
$$+ [(u^k, S_{p-1}\partial_2 a_{r+1} R_{p-1} u^k) - (u^k, R_p u^k)].$$

由于 Ru^k 与 $\partial_1 a_1 R_1 u^k$ 的差别只是交换了 a_1 与 ∂_1 的位置，$S_2\partial_2 a_3 R_2 u^k$

与 $S_3\partial_3 a_4 R_3 u^k$ 的差别只是交换了 a_3 与 ∂_2 的位置，……，最后 $S_{p-1}\partial_2 a_{r-1} R_{p-1} u^k$ 与 $R_p u^k$ 的差别只是交换了 ∂_2 与 a_{r+1} 的位置，因此，若用 S_l^* 表示 S_l 的共轭算子，则得到

$$|(u^k, Ru^k) - (u^k, R_p u^k)| \leqslant Lh\{\|u^k\|\|R_1 u^k\| + \|S_2^* u^k\|\|R_2 u^k\| + \cdots + \|S_{p-1}^* u^k\|\|R_{p-1} u^k\|\}. \quad (10.69)$$

因为每个 S_l^* 的结尾都是 ∂_l^*，所以上式右端括号内，除去第一项外都不超过 $c_2\|u^k\|\|\partial_x u^k\|$，其中 c_2 是正常数.

若 $r \geqslant 2$，则可记 $R_1 = S_1\partial_r a_{r+1}$，$S_1 = a_2\partial_2\cdots a_r$. 我们有

$$\|R_1 u^k\|^2 - \|S_1 a_{r+1}\partial_r u^k\|^2 = (\|R_1 u^k\| + \|S_1 a_{r+1}\partial_r u^k\|)(\|R_1 u^k\| - \|S_1 a_{r+1}\partial_r u^k\|).$$

但 $R_1 u^k$ 与 $S_1 a_{r+1}\partial_r u^k$ 的差别只是交换了 ∂_r 与 a_{r+1} 的位置，因此

$$|\|R_1 u^k\|^2 - \|S_1 a_{r+1}\partial_r u^k\|^2| \leqslant Lh\|u^k\|(\|R_1 u^k\| + \|S_1 a_{r+1}\partial_r u^k\|).$$

又因为 $S_1 u^k$ 是 u^k 的某些差分的组合，所以 $\|S_1 u^k\| \leqslant c_2\|\partial_x u^k\|$，并且由此得到

$$\|R_1 u^k\| \leqslant c_3(h\|u^k\| + \|\partial_x u^k\|).$$

把上面各估计式代入 (10.69)，就得到

$$|(u^k, Ru^k) - (u^k, R_p u^k)| \leqslant c_4 h\|u^k\|(h\|u^k\| + \|\partial_x u^k\|).$$

现在把 (10.67) 右端的第三——六项改写为下列形式

$$\left(\partial_x u^k, \left(\prod_l a_l\right)\left(\prod_l \partial_l u^k\right)\right) + \cdots.$$

而这种改变所带来的误差有类似于上面的估计. 又因为当 $|x| \geqslant \zeta$ 时，$u^k = 0$，因此如果 $h < \zeta$，则总有

$$|\|Cu^k\|^2 - \|C_0 u^k\|^2| \leqslant M(\zeta)\|\partial_x u^k\|^2 + c_5 h\|u^k\|\|\partial_x u^k\| + c_6 h^2\|u^k\|^2,$$

其中当 $\zeta \to 0$ 时，$M(\zeta) \to 0$. 今取 $\zeta \leqslant \zeta_0$，并且 $M(\zeta_0) < c_1/4$，考虑到

$$c_5 h\|u^k\|\|\partial_x u^k\| \leqslant \frac{c_5^2 h^2}{c_1}\|u^k\|^2 + \frac{c_1}{4}\|\partial_x u^k\|^2,$$

就有

$$|\|Cu^k\|^2 - \|C_0 u^k\|^2| \leqslant \frac{c_1}{2}\|\partial_x u^k\|^2 + \frac{\tau}{\lambda}(c_6 + c_5^2/c_1)\|u^k\|^2,$$

并由此得到

$$\|Cu^k\|^2 \leqslant (1+O(\tau))\|u^k\|^2 - \frac{c_1}{2}\|\partial_x u^k\|^2.$$

对于一般的函数 $u^k(x)$，则可仿照 §6.4 中的方法应用 Gårding 技巧来估计。假设 $d_l(x)$ 是适当光滑函数，它满足§ 6.4 中的条件，而且每个小区间 $\mathscr{I}_l$ 的长度不超过 2ζ。根据前面的分析，

$$\|C(d_l u^k)\|^2 \leqslant (1+O(\tau))\|d_l u^k\|^2 - \frac{c_1}{2}\|\partial_x(d_l u^k)\|^2. \quad (10.70)$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned} \big|\|\partial_x(d_l u^k)\|^2 - \|d_l\partial_x u^k\|^2\big| &= O(h)\|u^k\|(\|d_l\partial_x u^k\| \\ &\quad + \|\partial_x(d_l u^k)\|) \leqslant 1/3(\|d_l\partial_x u^k\|^2 \\ &\quad + \|\partial_x(d_l u^k)\|^2) + O(\tau)\|u^k\|^2, \end{aligned}$$

所以

$$\|\partial_x(d_l u^k)\|^2 \geqslant \frac{1}{2}\|d_l\partial_x u^k\|^2 + O(\tau)\|u^k\|^2,$$

并由此得到

$$\begin{aligned} \sum_l \|\partial_x(d_l u^k)\|^2 &\geqslant \frac{1}{2}\sum_l \|d_l\partial_x u^k\|^2 + O(\tau)\|u^k\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\|\partial_x u^k\|^2 + O(\tau)\|u^k\|^2. \end{aligned}$$

结合上式与 (10.70) 就得到

$$\begin{aligned} \|Cu^k\|^2 &= \sum_l \|d_l C u^k\|^2 \leqslant \sum_l \|C d_l u^k\|^2 \\ &\quad + O(h)\|u^k\|\|\partial_x u^k\| + O(\tau)\|u^k\|^2 \\ &\leqslant (1+O(\tau))\sum_l \|d_l u^k\|^2 - \frac{c_1}{2}\sum_l \|\partial_x(d_l u^k)\|^2 \\ &\quad + \frac{c_1}{4}\|\partial_x u^k\|^2 + O(\tau)\|u^k\|^2 = (1+O(\tau))\|u^k\|^2. \end{aligned}$$

Richtmyer, Morton (1967) 讨论了更一般抛物型方程差分格式，显然，可把这些方法应用于抛物型方程组。

10.5 高精度格式，外推法

为了提高近似解的精度，需要构造一些高精度格式，今以下列

简单问题为例来说明一些基本方法，

$$\begin{cases} LU = \dfrac{\partial U}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, & -\infty < x < \infty,\ 0 < t \leqslant T, \\ U(x, t) = U(x+1, t), & -\infty < x < \infty,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \\ U(x, 0) = U_0(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases} \tag{10.71}$$

最简单的方法之一是选择合适的步长比 $\lambda = \frac{\tau}{h^2}$，例如采用下列古典显式格式

$$u_t^k(x) - u_{x\bar{x}}^k(x) = 0,$$

则有

$$U_t^k(x) - U_{x\bar{x}}^k(x) = \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 U^k(x)}{\partial t^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 U^k(x)}{\partial x^4} + O(\tau^2 + h^4),$$

若 U 适当光滑，则有关系式

$$\frac{\partial^p U}{\partial t^p} = \frac{\partial^{2p} U}{\partial x^{2p}}, \tag{10.72}$$

故当 $\lambda = \frac{1}{6}$ 时，上述格式的逼近误差是 $O(\tau^2 + h^4)$.

第二种方法是采用中心差商，例如 Crank-Nicholson 格式

$$u_t^k(x) = \frac{1}{2}u_{x\bar{x}}^{k+1}(x) + \frac{1}{2}u_{x\bar{x}}^k(x).$$

不难验证

$$U_t^k(x) = \frac{1}{2}U_{x\bar{x}}^{k+1}(x) + \frac{1}{2}U_{x\bar{x}}^k(x) + O(\tau^2 + h^2).$$

构造高精度格式的另一个途径是采用高阶差商．根据数值微商公式(见 Микеладзе (1953))

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = U_t - \dfrac{\tau}{2}U_{t\bar{t}} + \cdots, \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = U_{x\bar{x}} - \dfrac{h^2}{12}U_{xx\bar{x}\bar{x}} + \dfrac{h^4}{90}U_{xxx\bar{x}\bar{x}\bar{x}} + \cdots, \end{cases} \tag{10.73}$$

得出下列格式的逼近误差是 $O(\tau^2 + h^4)$，

$$u_t^k(x) - \frac{\tau}{2}u_{t\bar{t}}^k(x) = u_{x\bar{x}}^k(x) - \frac{h^2}{12}u_{xx\bar{x}\bar{x}}^k(x).$$

若增加空间方向的网格点，则由上式和 (10.72) 推出下列格式

$$u_t^k(x) = u_{x\bar{x}}^k(x) + \left(\frac{\tau}{2} - \frac{h^2}{12}\right) u_{xx\bar{x}\bar{x}}^k(x).$$

反之，若增加格式在时间方向的层数，则有

$$u_t^k(x) + \left(\frac{h^2}{12} - \frac{\tau}{2}\right) u_{t\bar{t}}^k(x) = u_{x\bar{x}}^k(x).$$

显然，当 $\lambda = 1/6$ 时，这些格式最简单且保持逼近误差为 $O(\tau^2 + h^4)$.

Саульев (1960, 1963) 导出了计算 (10.71) 的许多高精度格式，其基本思想为，设格式为

$$\sum_{\mu=-r}^{1} \sum_{m=-M}^{M} a_{\mu,m} u^{k+\mu}(x + mh) = 0,$$

然后把 $u^{k+\mu}(x + mh)$ 展开，并用待定系数法决定 $a_{\mu,m}$，使得逼近误差为最小.

需要注意的是，多层格式往往是不稳定的，因此常常要设法改进它.

例 10.3 用下列 Richardson 格式计算 (10.71)

$$u_{\hat{t}}^k(x) = u_{x\bar{x}}^k(x),$$

记 $v^k(x) = u^{k-1}(x)$，则

$$\begin{cases} \dfrac{u^{k+1}(x) - v^k(x)}{2\tau} = \dfrac{u^k(x+h) - 2u^k(x) + u^k(x-h)}{h^2}, \\ v^{k+1}(x) = u^k(x). \end{cases}$$

应用分离变量法得到增长矩阵

$$G(\beta, \tau) = \begin{pmatrix} -8\lambda \sin^2 \dfrac{\beta h}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

它的特征方程是

$$\lambda^2(G) + 8\lambda \sin^2 \frac{\beta h}{2} \lambda(G) - 1 = 0,$$

其特征值是

$$\lambda^{(1)}(G) = -4\lambda\sin^2\frac{\beta h}{2} + \sqrt{16\lambda^2\sin^4\frac{\beta h}{2} + 1},$$

$$\lambda^{(2)}(G) = -4\lambda\sin^2\frac{\beta h}{2} - \sqrt{16\lambda^2\sin^4\frac{\beta h}{2} + 1},$$

当 $\beta h \approx \pi$ 时，$\sin\frac{\beta h}{2} > \frac{1}{2}$，所以

$$\underset{l}{\mathrm{Max}}|\lambda^{(l)}(G)| > \lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1} > \lambda + 1 > 1.$$

因此对任意 λ 值，Richardson 格式都是不稳定的。

现在把上述格式略加变形，即得到下列 Dufort-Frankel(1953)格式

$$\frac{u^{k+1}(x) - u^{k-1}(x)}{2\tau} = \frac{u^k(x+h) - u^{k+1}(x) - u^{k-1}(x) + u^k(x-h)}{h^2},$$

把 U 代入上式即得到

$$\frac{U^{k+1}(x) - U^{k-1}(x)}{2\tau} = \frac{U^k(x+h) - U^{k+1}(x) - U^{k-1}(x) + U^k(x-h)}{h^2} - \left(\frac{\tau}{h}\right)^2\frac{\partial^2 U^k(x)}{\partial t^2} + O\left(\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^4}{h^2}\right),$$

因此它的逼近精度也是 $O(\tau^2 + h^2)$。记 $v^k(x) = u^{k-1}(x)$，则把 Dufort-Frankel 格式化为下列方程组

$$\begin{cases} \dfrac{u^{k+1}(x) - v^k(x)}{2\tau} = \dfrac{u^k(x+h) - u^{k+1}(x) - v^k(x) + u^k(x-h)}{h^2} \\ v^{k+1}(x) = u^k(x). \end{cases}$$

令 $a = 2\lambda$，由分离变量法得到增长矩阵

$$G(\beta, \tau) = \begin{pmatrix} \dfrac{2a\cos\beta h}{1+a} & \dfrac{1-a}{1+a} \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

其特征方程是

$$\lambda^2(G)-\frac{2a\cos\beta h}{1+a}\lambda(G)-\frac{1-a}{1+a}=0,$$

特征根是(见图 10.2 和图 10.3)

$$\lambda^{(1)}(G)=\frac{a\cos\beta h+\sqrt{1-a^2\sin^2\beta h}}{1+a},$$

$$\lambda^{(2)}(G)=\frac{a\cos\beta h-\sqrt{1-a^2\sin^2\beta h}}{1+a}.$$

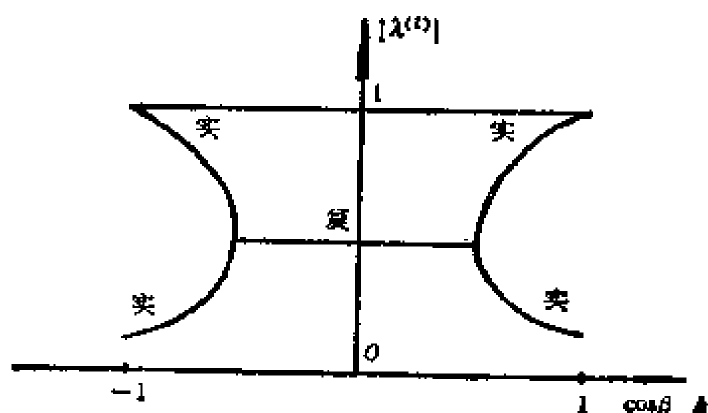


图 10.2, $a>1$

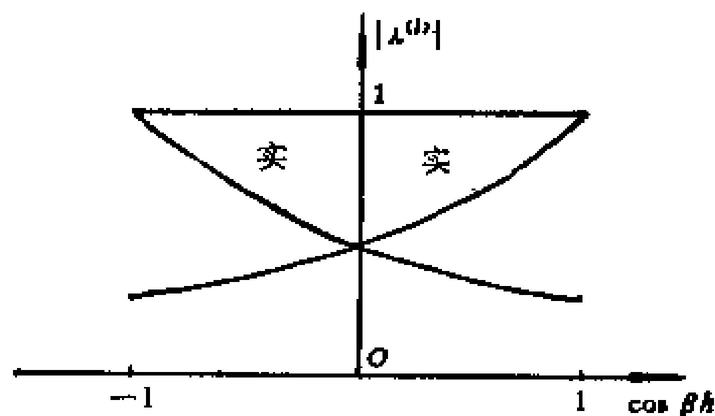


图 10.3, $a<1$

若 $a=1$, 则 $\lambda^{(1)}(G)=\cos\beta h$, $\lambda^{(2)}(G)=0$.

当 $a<1$ 时, $\lambda^{(l)}(G)$ 是实数. 若 $\cos\beta h\geqslant 0$, 则

$$\max_l|\lambda^{(l)}(G)|=|\lambda^{(1)}(G)|\leqslant\frac{a\cos\beta h+1}{1+a}\leqslant 1,$$

$$|\lambda^{(2)}(G)| \leqslant \frac{1}{1+a}\sqrt{a^2\cos^2\beta h - a^2\sin^2\beta h - 2a\cos^2\beta h + 1}$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} < 1.$$

若 $\cos\beta h < 0$，则

$$\max_l |\lambda^{(l)}(G)| = |\lambda^{(2)}(G)| = \frac{a|\cos\beta h| + 1}{1+a} \leqslant 1,$$

$$|\lambda^{(1)}(G)| \leqslant \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} < 1.$$

当 $a > 1$，$\sin\beta h > \frac{1}{a}$ 时，$\lambda^{(l)}$ 是共轭复数，由于它们的积是 $\frac{a-1}{a+1}$，因此

$$\max_l |\lambda^{(l)}(G)| = \sqrt{\left|\frac{1-a}{1+a}\right|} < 1.$$

当 $a > 1$，$\sin\beta h < \frac{1}{a}$ 时，$\lambda^{(l)}$ 是实数，其中一个特征值的绝对值小于 1，而另一个的绝对值不大于 1。

根据上面的分析和定理 4.9，Dufort-Frankel 格式对一切 λ 值都是稳定的。

若要在不增加空间网格点和时间层数的情况下提高格式精度，则可采用 Collatz (1960) 所提出的 Hermite 方法。记 $V = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$，并由 (10.71) 直接得到

$$u_t^k(x) - \sigma v^{k+1}(x) - (1-\sigma)v^k(x) = 0 \qquad (10.74)$$

其中 $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$. 又由 (10.73) 得到

$$V^k(x+h) + 10V^k(x) + V^k(x-h) = 12V_{\bar{x}x}^k(x) + O(h^4),$$

故由 (10.74) 得到下列格式

$$u_t^k(x+h) + 10u_t^k(x) + u_t^k(x-h)$$
$$- 12\sigma u_{\bar{x}x}^{k+1}(x) - 12(1-\sigma)u_{\bar{x}x}^k(x) = 0.$$

特别当 $\sigma = \frac{1}{2}$ 时，上述格式即为 Mitchell, Pearce (1962) 格式，其

逼近精度是 $O(\tau^2+h^4)$.

另一个重要技巧是 Kreiss 方法，形式地说，就是用

$$\frac{u_{x\bar{x}}^k(x)}{1+\frac{h^2}{12}u_{x\bar{x}}^k(x)}$$

来逼近$\frac{\partial^2 U^k(x)}{\partial x^2}$，从而得到下列格式

$$u_t^k(x)+\frac{h^2}{12}u_{tx\bar{x}}^k(x)-u_{x\bar{x}}^k(x)=0.$$

这个方法也被广泛应用于各种方程，可参见 Mckee(1973), Ciment, Leventhal (1975) 和 Rubin, Khosla (1977) 等人的文章.

还可应用外推法来提高精度，假设 τ_l, h_l 分别是 t 和 x 的步长，$\lambda=\frac{\tau_l}{h_l^2}\leqslant\frac{1}{2}$,

$$L_{h_l}u_{h_l}^k(x)=u_{h_l,t}^k(x)-u_{h_l,x\bar{x}}^k(x)=0,$$

其中差商是对步长 τ_l 和 h_l 而言的，并有

$$\begin{aligned}&LU^k(x)-L_{h_l}U^k(x)\\&\quad=h_l^2\left(\frac{1}{12}\frac{\partial^4U^k(x)}{\partial x^4}-\frac{\lambda}{2}\frac{\partial^2U^k(x)}{\partial t^2}\right)+o(h_l^2).\end{aligned}$$

若$U(x,t)$充分光滑，则不难验证注记 2.5 的条件得到满足. 设 $\chi=\frac{h_1}{h_2}>1$，则对一切 $x\in\mathscr{R}_h^*$ 和 $k\geqslant 0$，都有

$$U^k(x)=u_{h_1}^k(x)+\frac{1}{\chi^2-1}\left(u_{h_2}^k(x)-u_{h_1}^k(x)\right)+o(h_1^2).$$

按照 § 2.3 中的一般理论，还可用外推法逐次地改善精度. 在 § 2.3 中介绍的其它各种方法，也适用于抛物型方程.

10.6 传输扩散方程，Петров-Галеркин 方法

考虑下列传输扩散方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial t}+q\dfrac{\partial U}{\partial x}-\nu\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}=0, & -\infty<x<\infty,\ 0<t\leqslant T,\\
U(x,t)=U(x+1,t), & -\infty<x<\infty,\ 0\leqslant t\leqslant T,\\
U(x,0)=U_0(x), & -\infty<x<\infty,
\end{cases}
\tag{10.75}
$$

其中 q, ν 是常数，$\nu>0$. 若 $\dfrac{|q|}{\nu}$ 很大，则解的性质就会变差，即是奇异摄动问题．同样地，相应的差分格式的性质也会变差．另一方面，在这种情况下，为了保证计算的稳定性，必须对步长大小施加严格的限制，例如用古典两层显式计算 (10.75)．原则上讲，只要 h 充分小，$\lambda\leqslant\dfrac{1}{2\nu}$，格式就是稳定的．但在实际计算中，$h$ 总是有限值，故当 $\dfrac{|q|}{\nu}$ 相当大时，$\lambda\leqslant\dfrac{1}{2\nu}$ 并不能保证实际计算的稳定性，从而要对步长施加更严格的限制． 为了克服这个缺点，Christie, Griffiths, Mitchell, Zienkiewicz (1976) 提出了一种新方法，Anderson, Mitchell (1976) 称它为 Петров-Галеркин 方法．这个方法已得到了广泛的应用，例如可参见 Heinrich, Huyakorn, Mitchell, Zienkiewicz (1977), Christie, Mitchell (1978), Griffiths, Mitchell (1979) 和 Mitchell, Griffith, Kuo Pen-yu (1982) 等人的工作．

现在把 $\mathscr{I}=\{x/0\leqslant x\leqslant 1\}$ 划分为小区域 $\mathscr{I}_j=\{x/(j-1)h\leqslant x\leqslant jh\}$，$1\leqslant j\leqslant J$，$Jh=1$．用 $\varphi_j(x)$ 和 $\phi_j(x)$ 表示基函数和试验函数，

$$
u(x,t)=\sum_{j=1}^{J}u_j(x)\varphi_j(x).
$$

记 $\dot{u}_l(t)=\dfrac{du_l(t)}{dt}$，$\varphi_l'(x)=\dfrac{d\varphi_l(x)}{dx}$，那末计算(10.75)的 Петров-Галеркин 格式是

$$
\sum_{l=1}^{J}\int_0^1\dot{u}_l(t)\varphi_l(t)\phi_j(x)dx+q\sum_{l=1}^{J}\int_0^1 u_l(t)\varphi_l'(x)\phi_j(x)dx
$$

$$+\nu\sum_{l=0}^{J}\int_0^1 u_l(t)\varphi_l'(x)\phi_i'(x)dx=0, \qquad \forall\phi_i(x).$$

用 u_l^k 表示 $u_l(k\tau)$. σ 和 δ 是参数，$0\leqslant\delta\leqslant 1$，$0\leqslant\sigma\leqslant 1$. 把上式在 t 方向离散化后得到

$$\sum_{l=1}^{J}\int_0^1\left(\frac{u_l^{k+1}-u_l^k}{\tau}\right)\varphi_l(x)\phi_i(x)dx$$

$$+q\sum_{l=1}^{J}\int_0^1(\delta u_l^{k+1}+(1-\delta)u_l^k)\varphi_l'(x)\phi_i(x)dx$$

$$+\nu\sum_{l=1}^{J}\int_0^1(\sigma u_l^{k+1}+(1-\sigma)u_l^k)\varphi_l'(x)\phi_i'(x)\quad dx=0. \tag{10.76}$$

为简单计，本节假定 $\varphi_l(x)$，$\phi_i(x)$ 由 (1.27)，(1.33) 和 (1.34) 给定，a，b 的定义见 (1.35). 又记

$$c=-\int_0^1(\phi(s)-\phi(-s))ds.$$

于是不难验证

$$\int_0^1\varphi_{i+1}'(x)\phi_i(x)dx=\int_0^1\phi(s)ds,$$

$$\int_0^1\varphi_i'(x)\phi_i(x)dx=\int_0^1\phi(-s)ds-\int_0^1\phi(s)ds=c,$$

$$\int_0^1\varphi_{i-1}'(x)\phi_i(x)dx=-\int_0^1\phi(-s)ds.$$

因为 $\int_{-1}^{1}\phi(s)ds=1$，所以

$$\int_0^1\phi(s)ds+\int_0^1\phi(-s)ds=1,$$

故有

$$\int_0^1\varphi_{i+1}'(x)\phi_i(x)dx=\frac{1-c}{2},$$

$$\int_0^1\varphi_{i-1}'(x)\phi_i(x)dx=-\frac{1+c}{2}.$$

把以上各式和 (1.36)，(1.38) 代人 (10.76) 后即得到

$$\left(1 - b\hat{\partial}_x + \frac{a}{2}\partial_x\bar{\partial}_x\right)(u_j^{k+1} - u_j^k)$$

$$+ \lambda qh\left(\hat{\partial}_x - \frac{c}{2}\partial_x\bar{\partial}_x\right)(\delta u_{j+1}^{k+1} + (1-\delta)u_j^k)$$

$$= \lambda\nu\partial_x\bar{\partial}_x(\sigma u_j^{k+1} + (1-\sigma)u_j^k). \tag{10.77}$$

当 $a = b = \delta = \sigma = 0$ 时，它是显式格式，否则是隐式格式。

下面用 Fourier 方法来分析稳定性，即指满足 $\|u^k\| \leqslant \|u^0\|$ 的那种稳定性。应用分离变量法得到增长系数 $G(\beta, \tau)$ 所满足的等式

$$(1 - i\sin\beta h(b - \lambda qh\delta)$$

$$- \sin^2\frac{\beta h}{2}(2a - 2q\lambda ch\delta - 4\nu\lambda\delta))G(\beta,\tau)$$

$$= (1 - i\sin\beta h(b + \lambda qh(1-\delta))$$

$$- \sin^2\frac{\beta h}{2}(2a + 2q\lambda ch(1-\delta) + 4\nu\lambda(1-\sigma)).$$

记 $p = \frac{hq}{2\nu}$，并令

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 - 2\sin^2\frac{\beta h}{2}(a + 2\lambda\nu pc(1-\delta) + 2\lambda\nu(1-\sigma)), \\ \alpha_2 = -\sin\beta h(b + 2\lambda\nu p(1-\delta)), \\ \alpha_3 = 1 - 2\sin^2\frac{\beta h}{2}(a - 2\lambda\nu pc\delta - 2\lambda\nu\sigma), \\ \alpha_4 = -\sin\beta h(b - 2\lambda\nu p\delta), \end{cases}$$

则有

$$(\alpha_3 + i\alpha_4)G(\beta, \tau) = (\alpha_1 + i\alpha_2).$$

所以格式 (10.77) 稳定的充要条件是

$$(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_1 + \alpha_3) \leqslant (\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_4 + \alpha_2).$$

经计算得到

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 2 - 4\sin^2\frac{\beta h}{2}(a + \lambda\nu pc(1-2\delta)$$

$$+ \lambda\nu(1-2\sigma)).$$

$$\alpha_1-\alpha_3=-4\lambda\nu\sin^2\frac{\beta h}{2}(pc+1),$$

$$\alpha_2+\alpha_4=-2\sin\beta h(b+\lambda\nu p(1-2\delta)),$$

$$\alpha_2-\alpha_4=-2\lambda\nu p\sin\beta h.$$

令 $g=4\sin^2\dfrac{\beta h}{2}$，于是 (10.77) 稳定的充要条件是

$$\begin{aligned}g(pc+1)(a+\nu\lambda pc(1-2\delta)+\nu\lambda(1-2\sigma))\\+p(4-g)(b+\nu\lambda p(1-2\delta))\leqslant 2(pc+1).\end{aligned}\tag{10.78}$$

显然 $0\leqslant g\leqslant 4$. 令 $g=0$，则由上式得到

$$pb+\nu\lambda p^2(1-2\delta)\leqslant\frac{1}{2}(pc+1),$$

亦即

$$\tau(1-2\delta)\leqslant\frac{2\nu}{q^2}+\frac{h}{q}(c-2b).\tag{10.79}$$

令 $g=4$，则由 (10.78) 得到

$$\begin{aligned}\lambda(2\nu(1-2\sigma)+qch(1-2\delta))(pc+1)\\\leqslant(1-2a)(pc+1).\end{aligned}\tag{10.80}$$

以上两式即为 (10.77) 稳定的充要条件.

为简单计，不妨设 $pc+1>0$，于是 (10.80) 等价于

$$\lambda(2\nu(1-2\sigma)+qch(1-2\delta))\leqslant 1-2a.$$

现在来分析稳定性条件. 首先由 (10.79) 看出

(i) 若 δ 较大，则对 τ 的限制较宽；

(ii) 为了增大 τ，宜取 $q(c-2b)\geqslant 0$.

其次，从 (10.80) 看出

(i) 当 a 较小或 σ 较大时，对 λ 的限制较宽；

(ii) 若 $\delta\leqslant\dfrac{1}{2}$，宜取 $qc\leqslant 0$，否则宜取 $qc\geqslant 0$；

(iii) 若 $a<\dfrac{1}{2}$，且

$$2\nu(1-2\sigma)+qch(1-2\delta)\leqslant 0$$

（例如 $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$，$\delta \geqslant \frac{1}{2}$，$qc > 0$），则 (10.77) 总是稳定的，否则要求

$$\lambda \leqslant \frac{1-2a}{2\nu(1-2\sigma)+qch(1-2\delta)}; \quad (10.81)$$

(iv) 对于通常的中心差分格式，有 $a=b=c=0$，故稳定性条件是

$$\begin{cases} \delta \geqslant \frac{1}{2} \text{ 或 } \tau \leqslant \frac{2\nu}{(1-2\delta)q^2}, \\ \sigma \geqslant \frac{1}{2} \text{ 或 } \lambda \leqslant \frac{1}{2\nu(1-2\sigma)}, \end{cases} \quad (10.82)$$

当 $\frac{|q|}{\nu}$ 较大时，对 τ 的限制就较严．如果适当选取参数，则可减弱限制，例如取 $a=b=\delta=0$，$qc<0$，则只要求

$$\lambda \leqslant \frac{1}{2\nu(1-2\sigma)+qch}.$$

因此，Петров-Галеркин 方法比通常的差分格式灵活些．

(v) 对于经典的 Галеркин 方法，$\varphi_i(x)=\phi_i(x)$，$\varphi_i(x)$ 由 (1.27) 所示，从而 $a=\frac{1}{3}$，$b=c=0$，所以稳定性条件是

$$\begin{cases} \delta \geqslant \frac{1}{2} \text{ 或 } \tau \leqslant \frac{2\nu}{(1-2\delta)q^2}, \\ \sigma \geqslant \frac{1}{2} \text{ 或 } \lambda \leqslant \frac{1}{6\nu(1-2\sigma)}. \end{cases}$$

显然，对 λ 的限制比通常差分格式严得多．

在具体计算时，往往采用下列类型的函数

$$\phi(s)=p_1(\varphi(s)+p_2d(s)),$$

其中 p_i 是正常数，$d(s)$ 可取图 10.4，10.5 中所示的函数．适当地选择 $\phi(s)$，可以"吸收"解的奇异性质．

郭本瑜，Mitchell (1983) 还讨论了解变系数与初、边值问题的 Петров-Галеркин 方法．此外，Morton，Parrott (1980) 等还把它应用于双曲型方程．

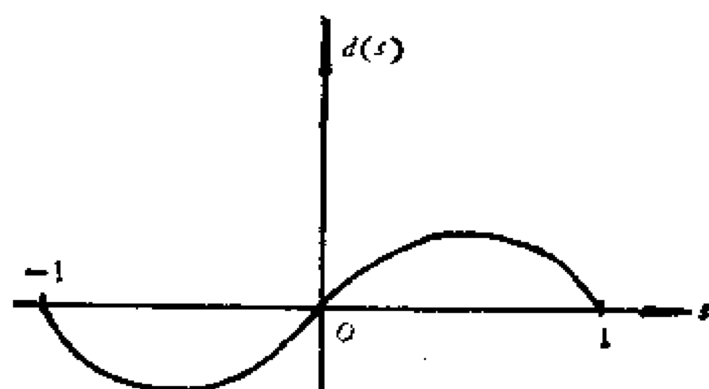


图 10.4

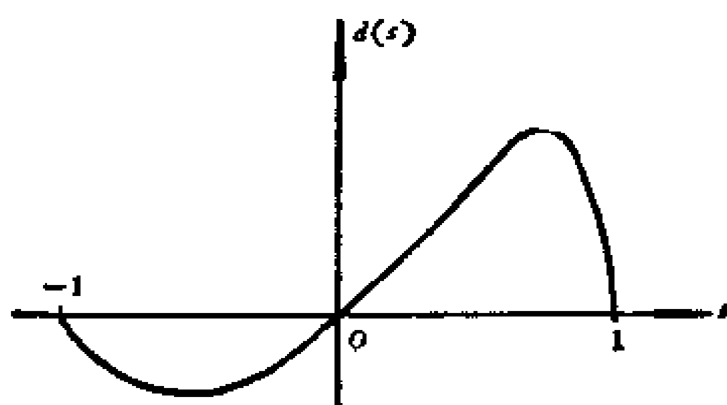


图 10.5

10.7 反热传导问题

本节以反热传导问题为例，说明不适定问题的处理方法。我们考虑下列最简单的问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}=-\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}, & -\infty<x<\infty,\ 0<t\leqslant T,\\ U(x,0)=U_0(x), & -\infty<x<\infty.\end{cases} \tag{10.83}$$

假定 $U(x,t)$ 是它的解，则当 $t\leqslant T$ 时(见 John (1955a))，

$$U(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\sigma^2}{4t}}U_0(x+i\sigma)d\sigma,$$

并由此得到

$$U(x,t+\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\sigma^2}{4\tau}}U(x+i\sigma,t)d\sigma. \tag{10.84}$$

把积分号下的 $U(x+i\sigma, t)$ 用 Stirling 公式来代替，就有

$$
\begin{aligned}
U(x, t+\tau) = & \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{4\tau}} \Big\{ U(x, t) \\
& + \left(\frac{i\sigma}{h}\right) \hat{\hat{\delta}}_x U(x, t) + \frac{1}{2!}\left(\frac{i\sigma}{h}\right)^2 \hat{\delta}_x^2 U(x, t) + \cdots \\
& + \frac{1}{(2M)!}\left(\frac{i\sigma}{h}\right)^2 \left[\left(\frac{i\sigma}{h}\right)^2 - 1\right] \cdots \left[\left(\frac{i\sigma}{h}\right)^2 \right. \\
& \left. - (M-1)^2 \right] \hat{\delta}_x^{2M} U(x, t) + \frac{\omega_{2M}(x+i\sigma)}{2\pi i} \\
& \times \oint_{\Gamma_\sigma} \frac{U(z, t)dz}{\omega_{2M}(z)(z-x-i\sigma)} \Big\} d\sigma,
\end{aligned}
\qquad (10.85)
$$

其中 $\omega_{2M}(z)$ 是多项式 $\prod_{j=-M}^{M}(z-x-jh)$，$\hat{\delta}_x^{2m}$ 表示以 $x-mh, \cdots, x\cdots, x+mh$ 为节点的 $2m$ 阶中心差分，而

$$
\hat{\hat{\delta}}_x^{2m+1} U(x, t) = \frac{1}{2}\left(\hat{\delta}_x^{2m} U(x+h, t) - \hat{\delta}_x^{2m} U(x-h, t)\right),
$$

Γ_σ 表示 z 平面上包含点 $z = x-mh, \cdots, x, \cdots, x+Mh$ 和 $x+i\sigma$ 在内的光滑封闭曲线。特别当 $U(x, t)$ 是次数不超过 $2M$ 的多项式时，(10.85) 的末项为零。

用 $u^k(x)$ 表示 u 在点 x 和时刻 $t_k = k\tau$ 的值。在 (10.85) 中略去最后一项，并记

$$
\begin{aligned}
b_m(\tau) = & \frac{(-1)^m}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \Big\{ \Big[e^{-\frac{\sigma^2}{4\tau}} \left(\frac{\sigma}{h}\right)^2 \left(\left(\frac{\sigma}{h}\right)^2 + 1\right) \cdots \left(\left(\frac{\sigma}{h}\right)^2 \right. \\
& \left. + (m-1)^2\right) \Big] \Big/ (2m)! \Big\} d\sigma,
\end{aligned}
$$

则得到下列差分格式

$$
u^{k+1}(x) = \sum_{m=0}^{M} b_m(\tau) \hat{\delta}_x^{2m} u^k(x). \qquad (10.86)
$$

假定 $\lambda = \frac{\tau}{h^2}$ 是常数，(10.86) 是可易差分格式，于是可应用 § 4.2 中的理论来研究它。记

$$\varphi_l(\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{4\tau}} \left(\frac{\sigma}{h}\right)^{2l} d\sigma = (2\lambda)^l (2l-1)!!.$$

则系数 $b_m(\tau)$ 可表示为

$$b_m(\tau) = \frac{(-1)^m}{(2m)!} \sum_{l=1}^{m} d_{m,l}\varphi_l(\tau), \tag{10.87}$$

其中 $d_{m,l}$ 是多项式 $y^2(y^2+1)\cdots(y^2+(m-1)^2)$ 中 y^{2l} 项的系数. 显然有 $d_{m,l} > 0$, 因此 $(-1)^m b_m(\tau) > 0$.

下面来分析 (10.86) 的稳定性. 它的增长系数是

$$G^{(M)}(\beta, \tau) = \sum_{m=0}^{M} (-1)^m 2^{2m} b_m(\tau) \sin^{2m}\frac{\beta h}{2}.$$

令 $U(x, t) = e^{\beta^2 t}\cos\beta x = \mathrm{Re}(e^{\beta^2 t + i\beta x})$, 把它代入 (10.85), 并令 $x = t = 0$, 即得到

$$e^{\beta^2\tau} = G^{(M)}(\beta, \tau) + R^{(M)},$$

其中

$$R^{(M)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{4\tau}} \left(\frac{\omega_{2M}(i\sigma)}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\sigma} \frac{\cos\beta z\, dz}{\omega_{2M}(z)(z - i\sigma)}\right) d\sigma.$$

取 Γ_σ 为 z 平面上以 $z = 0$ 为圆心, $2|\sigma| + 3Mh$ 为半径的圆, 则

$$\begin{aligned}
|R^{(M)}| &\leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{4\tau}} \frac{|\sigma|(|\sigma| + Mh)^{2M}}{(2|\sigma| + 2Mh)^{2M}} \frac{e^{|\beta|(2|\sigma| + 3Mh)}}{|\sigma| + 3Mh} d\sigma \\
&\leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \left(\frac{e^{3|\beta|h}}{4}\right)^M \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{4\tau}} e^{2|\beta||\sigma|} d\sigma \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \left(\frac{e^{3|\beta|h}}{4}\right)^M \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}} - 2|\beta|\sqrt{\tau}\right)^2} e^{4\beta^2\tau} d\sigma \\
&\leqslant 2e^{4\lambda(\beta h)^2} \left(\frac{e^{\frac{3}{2}|\beta|h}}{2}\right)^{2M}.
\end{aligned}$$

故若 $|\beta h| < \frac{2}{3}\ln 2$, 则当 $M \to \infty$ 时, $|R^{(M)}| \to 0$.

今记

$$G^{(\infty)}(\beta, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m 2^{2m} b_m(\tau) \sin^{2m}\frac{\beta h}{2},$$

则当 $|\beta h| < \frac{2}{3}\ln 2$ 时

$$e^{\beta^2\tau} = G^{(\infty)}(\beta, \tau). \tag{10.88}$$

但 $e^{\beta^2\tau} = e^{\lambda(\beta h)^2}$，因此 $e^{\beta^2\tau}$ 是 βh 的解析函数．所以若能证明当 $|\beta h| < \pi$ 时，$G^{(\infty)}(\beta, \tau)$ 是 βh 的解析函数，那末对一切 $|\beta h| < \pi$，(10.88) 都成立．

显然，$G^{(\infty)}(\beta\tau)$ 是以解析函数 $\sin\frac{\beta h}{2}$ 为变量的幂级数，其系数是 $(-1)^m 2^{2m} b_m(\tau)$．由 (10.87) 得到

$$|b_{m+1}(\tau)| = \frac{1}{(2m+2)!}\Big(m^2(2m)!\,|b_m(\tau)| + \sum_{l=1}^{m} d_{m,l}\varphi_{l+1}(\tau)\Big).$$

但是 $\varphi_{l+1}(\tau) = 2\lambda(2l+1)\varphi_l(\tau)$，所以

$$\sum_{l=1}^{m} d_{m,l}\phi_{l+1}(\tau) \leqslant 2\lambda(2m+1)\sum_{l=1}^{m} d_{m,l}\varphi_l(\tau) = 2\lambda(2m+1)!\,|b_m(\tau)|.$$

若 $|\beta h| < \pi$，则 $\left|\sin\frac{\beta h}{2}\right| < 1$，从而有

$$\lim_{m\to\infty}\left|\frac{2^{2(m+1)}(-1)^{m+1}b_{m+1}(\tau)\sin^{2(m+1)}\frac{\beta h}{2}}{2^{2m}(-1)^m b_m(\tau)\sin^{2m}\frac{\beta h}{2}}\right|$$
$$= \lim_{m\to\infty}\frac{4|b_{+m1}(\tau)|}{|b_m(\tau)|}\sin^2\frac{\beta h}{2}$$
$$\leqslant \lim_{m\to\infty}\frac{4(m^2(2m)! + 2\lambda(2m+1)!)}{(2m+2)!}\sin^2\frac{\beta h}{2}$$
$$= \sin^2\frac{\beta h}{2} < 1,$$

所以，当 $|\beta h| < \pi$ 时，总可在复平面上找到它的一个邻域，使得在这个邻域内，级数 $G^{(\infty)}(\beta, \tau)$ 是一致收敛的，故由 Weierstrass 定理(见 Маркушевич (1957))，当 $|\beta h| < \pi$ 时，$G^{(\infty)}(\beta, \tau)$ 是 βh

的解析函数,从而 (10.88) 成立.

由于 $(-1)^m b_m(\tau) > 0$, 故对一切 $|\beta h| < \pi$ 都有

$$G^{(M)}(\beta, \tau) < G^{(\infty)}(\beta, \tau) = e^{\beta^2 \tau}.$$

但 $G^{(M)}(\beta, \tau)$ 和 $e^{\beta^2 \tau}$ 都是 βh 的连续函数,因此当 $|\beta h| = \pi$ 时,上式也是对的.

当 $|\beta h| > \pi$ 时,则有

$$|G^{(M)}(\beta, \tau)| < G^{(\infty)}\left(\frac{\pi}{h}, \tau\right) = e^{\left(\frac{\pi}{h}\right)^2 \tau} < e^{\lambda(\beta h)^2} = e^{\beta^2 \tau}.$$

综合上面的分析得到,对一切 β 都有

$$|G^{(M)}(\beta, \tau)| \leqslant \max(1, e^{-(i\beta)^2 \tau}) = e^{\beta^2 \tau}.$$

最后应用定理 4.15, 其中 $q = 2$, $\mu = -1$. 显然 (4.36) 成立,所以格式 (10.86) 是按 § 3.2 的意义稳定的.

不难验证 (10.86) 对 (10.83) 的逼近是相容的,所以前者是后者的收敛格式.

计算反热传导问题的另一个重要方法是拟逆方法, 可见本书的 § 18.7.

§ 11 线性方程的初、边值问题

§ 10 中的各种方法原则上都适用于线性方程的初、边值问题,但是初、边值问题也有它的一些特点,例如极值原理等等. 本节介绍了隐式格式的极值原理,并应用它证明原微分方程解的存在性,也叙述了一些高阶方程初、边值问题的处理方法. 接着讨论了建立差分格式的积分关系法 (或 Box 方法), 它适用于具有间断系数或间断定解条件的问题. 也讨论了配置法, 并由此导出超收敛性. 最后扼要地介绍了计算边界层型奇异摄动问题的 Ильин 方法和 Stefan 问题的数值方法.

11.1 热传导方程的初、边值问题,解的存在性

设 $\varphi_i(t)$ 是连续函数,并当 $0 \leqslant t \leqslant T$ 时, $\varphi_1(t) < \varphi_2(t)$. 记

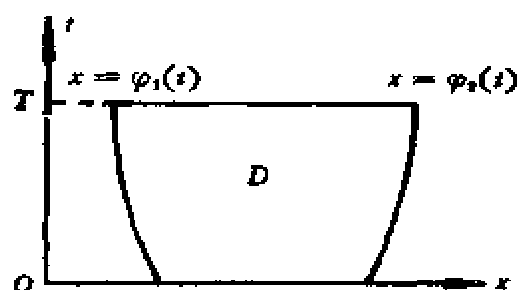


图 11.1

$D=\{(x,t)/\varphi_1(t)<x<\varphi_2(t),\ 0<t<T\}$, $\Gamma_D=\{(x,t)/t=0,\ \varphi_1(0)\leqslant x\leqslant\varphi_2(0)\}+\{(x,t)/x=\varphi_1(t),\ 0\leqslant t\leqslant T\}+\{(x,t)/x=\varphi_2(t),\ 0\leqslant t\leqslant T\}$, g 是连续函数. 今考虑下列问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2U}{\partial x^2}-\dfrac{\partial U}{\partial t}=0, & (x,t)\in D,\\ U(x,t)=g(x,t). & (x,t)\in\Gamma_D.\end{cases}\tag{11.1}$$

用直线 $x=jh, t=kh$ 把平面 Oxt 划分为许多小正方形. $\bar{D}_h$ 表示属于D的全部正方形的集合, Γ_{D_h} 表示它的边界, $D_h=\bar{D}_h/\Gamma_{D_h}$. 计算 (11.1) 的隐式格式是

$$\begin{cases}L_hu(x,t)=u_{x\bar{x}}(x,t)-u_{\bar{t}}(x,t)=0, & \text{在 } D_h \text{ 的网格点上},\\ u(x,t)=g_h(x,t) & \text{在 } \Gamma_{D_h} \text{ 上},\end{cases}\tag{11.2}$$

其中 $g_h(x,t)=g(x',t')$, (x',t') 是与 $(x,t)\in\Gamma_{D_h}$ 最接近的一点.

引理 11.1 若对一切 $(x,t)\in D_h$, $L_hu(x,t)\geqslant 0$, 则 $u(x,t)$ 只能在 Γ_{D_h} 上达到最大值. 反之, 若对一切 $(x,t)\in D_h$, $L_hu(x,t)\leqslant 0$, 则 $u(x,t)$ 只能在 Γ_{D_h} 上达到最小值.

证明 如果引理的第一个结论不真, 则至少有一点 $(x',t')\in D_h$, 使得 $u(x',t')$ 达到最大值 M, 而在值 $u(x'-h,t')$, $u(x'+h,t')$和 $u(x',t'-h)$中至少有一个小于M. 若 $u(x',t'-h)<M$, 则 $u_{x\bar{x}}(x',t')\leqslant 0$, $u_{\bar{t}}(x',t')>0$, 从而 $L_hu(x',t')<0$. 若

$u(x'+h, t')<M$ 或 $u(x'-h, t')<M$，则 $u_{x\bar{x}}(x', t')<0$，$u_{\bar{t}}(x', t')\geqslant 0$，从而也有 $L_h u(x', t)<0$．而这是矛盾的．类似地可证明第二个结论．

根据上述引理，对一切 $x, t\in \overline{D}_h$

$$|u(x, t)|\leqslant \max_{(x,t)\in \Gamma_{D_h}}|g(x, t)|, \tag{11.3}$$

因而格式 (11.2) 对初值和边值按最大模稳定．又因为 (11.2) 对 (11.1) 的逼近是相容的，所以格式还是收敛的．

下面用 (11.2) 来证明 (11.1) 的解的存在性（见 Петровский (1953)），为此先作一系列估计．

命题 11.1 如果区域 $D^{(1)}$ 连同其边界都属于 D，则在 $D^{(1)}$ 上，$u(x, t)$ 的所有差商都一致有界．

证明 用 Q 表示各边与坐标轴平行的矩形，由于 $D^{(1)}$ 可由有限个这样的 Q 来复盖，所以只要对 Q 来证明命题的结论．不妨设 Q 是矩形 $\{(x, t)/|x|\leqslant a, 0\leqslant t\leqslant b\}$，并且当 h 适当小时，$Q\in \overline{D}_h$．用 c 表示某个正常数，并定义辅助函数 $w(x, t)$，

$$w(x, t)=u_x^2(x, t)F(x, t)+cv(x, t),$$

其中

$$\begin{cases}F(x, t)=t(a^2-x^2)^2,\\ v(x, t)=u^2(x-h, t)+u^2(x+h, t)+u^2(x, t-h).\end{cases}$$

由于

$$(\varphi\phi)_{\bar{t}}=\varphi_{\bar{t}}\phi+\varphi\phi_{\bar{t}}-h\varphi_{\bar{t}}\phi_{\bar{t}},$$
$$(\varphi\phi)_{x\bar{x}}=\varphi_{x\bar{x}}\phi+\varphi\phi_{x\bar{x}}+\varphi_x\phi_x+\varphi_{\bar{x}}\phi_{\bar{x}},$$

所以

$$L_h(\varphi\phi)=\varphi L_h(\phi)+\phi L_h(\varphi)+h\varphi_{\bar{t}}\phi_{\bar{t}}+\varphi_x\phi_x+\varphi_{\bar{x}}\phi_{\bar{x}} \tag{11.4}$$

并由此推得

$$L_h(\omega)=u_x^2 L_h(F)+FL_h(u_x^2)+hF_{\bar{t}}(u_x^2)_{\bar{t}}+F_x(u_x^2)_x + F_{\bar{x}}(u_x^2)_{\bar{x}}+cL_h(v) \tag{11.5}$$

和

$$
\begin{aligned}
L_h(u_x^2) &= 2u_x L_h(u_x) + u_{xx}^2 + u_{x\bar x}^2 + h u_{x\bar t}^2 \\
&= u_{xx}^2 + u_{x\bar x}^2 + h(u_{x\bar t})^2.
\end{aligned}
$$

可以直接验证

$$
\begin{aligned}
&(u_x^2(x, t))_x = (u_x(x, t) + u_x(x+h, t))u_{xx}(x, t), \\
&(u_x^2(x, t))_{\bar x} = (u_x(x, t) + u_x(x-h, t))u_{x\bar x}(x, t), \\
&h(u_x^2(x, t))_{\bar t} = u_x^2(x, t) - u_x^2(x, t-h).
\end{aligned}
$$

又由 (11.4) 得到

$$
L_h(u^2(x, t)) = u_x^2(x, t) + u_{\bar x}^2(x, t) + h u_{\bar t}^2(x, t).
$$

把以上各式代人 (11.5) 就得到

$$
\begin{aligned}
L_h(w) = c[&u_x^2(x+h, t) + u_{\bar x}^2(x+h, t) + h u_{\bar t}^2(x+h, t) \\
&+ u_x^2(x-h, t) + u_{\bar x}^2(x-h, t) + h u_{\bar t}^2(x-h, t) \\
&+ u_x^2(x, t-h) + u_{\bar x}^2(x, t-h) + h u_{\bar t}^2(x, t-h)] \\
&+ u_x^2(x, t)L_h(F(x, t)) + F_{\bar t}(x, t)[u_x^2(x, t) \\
&- u_x^2(x, t-h)] + F(x, t)[u_{xx}^2(x, t) + u_{x\bar x}^2(x, t) \\
&+ h u_{x\bar t}^2(x, t)] + F_x(x, t)[u_x(x, t) \\
&+ u_x(x+h, t)]u_{xx}(x, t) + F_{\bar x}(x, t)[u_x(x, t) \\
&+ u_x(x-h, t)]u_{x\bar x}(x, t).
\end{aligned}
\tag{11.6}
$$

因为

$$
F_x(x, t) = -2t(2x+h)(a^2 - x^2) + ht(2x+h)^2,
$$

所以

$$
\begin{aligned}
F(x,t)&u_{xx}^2(x,t) + F_x(x,t)[u_x(x,t) + u_x(x+h,t)]u_{xx}(x,t) \\
&= t\{(a^2 - x^2)u_{xx}(x, t) - (2x+h)[u_x(x, t) \\
&\quad + u_x(x+h, t)]\}^2 - t(2x+h)^2[u_x(x, t) \\
&\quad + u_x(x+h, t)]^2 + ht(2x+h)^2[u_x(x, t) \\
&\quad + u_x(x+h, t)]u_{xx}(x, t) \\
&\geqslant -t(2x+h)^2[u_x(x, t) + u_x(x+h, t)]^2 \\
&\quad + t(2x+h)^2[u_x^2(x+h, t) - u_x^2(x, t)] \\
&= -t(2x+h)^2[2u_x^2(x, t) + 2u_x(x, t)u_x(x+h, t)] \\
&\geqslant -t(2x+h)^2(3u_x^2(x, t) + u_x^2(x+h, t)).
\end{aligned}
$$

类似地有

$$F(x,t)u_{x\bar{x}}^2(x,t) + F_{\bar{t}}(x,t)[u_x(x,t) + u_x(x-h,t)]u_{x\bar{x}}(x,t)$$
$$\geqslant -t(2x-h)^2(3u_x^2(x,t) + u_x^2(x-h,t)).$$

把上面两式代入(11.6)，并注意到 $F(x,t)>0$，$F_{\bar{t}}(x,t)>0$，即有

$$\begin{aligned}
L_h(w) \geqslant\ & c[u_x^2(x+h,t) + u_x^2(x,t) + u_x^2(x-h,t) \\
& + u_x^2(x,t-h)] + L_h(F(x,t))u_x^2(x,t) \\
& - F_{\bar{t}}(x,t)u_x^2(x,t-h) - t(2x+h)^2(3u_x^2(x,t) \\
& + u_x^2(x+h,t)) - t(2x-h)^2(3u_x^2(x,t) \\
& + u_x^2(x-h,t)) \\
=\ & [c + L_h(F(x,t)) - 3t(2x+h)^2 \\
& - 3t(2x-h)^2]u_x^2(x,t) + [c - t(2x+h)^2] \\
& \times u_x^2(x+h,t) + [c - t(2x-h)^2]u_x^2(x-h,t) \\
& + [c - F_{\bar{t}}(x,t)]u_x^2(x,t-h).
\end{aligned}$$

选取 c 适当大，则上式右端各项都非负，从而 $L_h(w)\geqslant 0$。由引理11.1，$w(x,t)$ 在 Γ_Q 上达到最大值，其中 Γ_Q 由直线 $t=0$，$x=-a$ 和 $x=a$ 所组成。但在 Γ_Q 上，$F(x,t)=0$，且由(11.3)，$w(x,t)\leqslant 3cM_0^2$。因此结合 $v(x,t)\geqslant 0$ 后即有

$$u_x^2(x,t) \leqslant \frac{3cM^2}{t(a^2-x^2)^2}. \tag{11.7}$$

这样，在包含于 Q 内的每个矩形 $Q^{(1)}$ 内，$u_x(x,t)$ 一致有界。由于 $u_{\bar{x}}(x,t)$ 也是(11.2)的解，因此 $u_{x\bar{x}}(x,t)$ 也一致有界。再由(11.2)式可知，$u_{\bar{t}}(x,t)$ 也一致有界。依此类推下去即得所证。

现在把 $\bar{D}_h$ 中的每个正方形划分为两个三角形。在每个三角形中把 $u(x,t)$ 线性插值为 $U_h(x,t)$，在 $D/\bar{D}_h$ 上可任意补充一些值，使得由此得到的 $U_h(x,t)$ 保持连续和各阶差商的一致有界性。类似地可由 $u_x(x,t)$，$u_{\bar{t}}(x,t)$ 和 $u_{x\bar{x}}(x,t)$ 等得到函数 $V_h(x,t)$，$W_h(x,t)$ 和 $Z_h(x,t)$ 等。由于 $Q^{(1)}$ 可由有限个 Q 来覆盖，因此 $\{U_h(x,t)\}$，$\{V_h(x,t)\}$，$\{W_h(x,t)\}$ 和 $\{Z_h(x,t)\}$ 都是一致有界和等度连续的。根据 Arzela 引理，可从它们中分别选出子序列，使得各自一致收敛到连续函数。

今假定 $\{D_{h_m}\}$ 是一个区域序列，

$$\overline{D}_{h_m}\subset D,\ D_{h_m}\subset D_{h_{m+1}},\ \bigcup_{m=1}^{\infty} D_{h_m}=D.$$

先在 $\{U_h(x,t)\}$, $\{V_h(x,t)\}$, $\{W_h(x,t)\}$ 和 $\{Z_h(x,t)\}$ 中选取子列，使得它们在 D_{h_1} 上一致收敛．再从中选取子列，使得在 D_{h_2} 上一致收敛．依此类推下去，就得到一个子列，记为

$$\{U_{h_m}(x,t)\},\ \{V_{h_m}(x,t)\},\ \{W_{h_m}(x,t)\}\ \text{和}\ \{Z_{h_m}(x,t)\},$$

使得在整个 D 上，都一致收敛到

$$U(x,t),\ V(x,t),\ W(x,t)\ \text{和}\ Z(x,t)$$

可仿 § 5.1 中的方法证明

$$V=\frac{\partial U}{\partial x},\quad W=\frac{\partial U}{\partial t},\quad Z=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

最后把 U_{h_m} 代入 (11.2)，并令 $m\to\infty$，即知 $U(x,t)$ 满足热传导方程．

下面来验证定解条件．

命题 11.2 假设点 $A=(x',0)$，那末

$$\lim_{\substack{(x,t)\in D\\(x,t)\to A}} U(x,t)=g(A).$$

证明 作辅助函数 $w(x,t)=(x-x')^2+3t$．显然，在 $\overline{D}/A$ 上 $w(x,t)>0$，并且 $L_h(w)<0$．设 ε 是任意小的正数，$D^{(\varepsilon)}$ 是 A 的充分小邻域，并当 h_m 充分小时，在 $D^{(\varepsilon)}\cap\Gamma_{D_{h_m}}$ 中一致地有

$$|g_{h_m}(x,t)-g(A)|<\varepsilon.$$

又设 c 为某个正常数，使得在 $\overline{D}/D^{(\varepsilon)}$ 中，

$$cw(x,t)>2\max_{x\in\Gamma_D}|g(x,t)|.$$

记

$$\varphi(x,t)=g(A)-\varepsilon-cw(x,t)-U_{h_m}(x,t),$$

$$\phi(x,t)=-g(A)-\varepsilon-cw(x,t)+U_{h_m}(x,t),$$

则 $L_{h_m}(\varphi)>0$, $L_{h_m}(\phi)>0$，因此 φ 和 ϕ 只能在 $\Gamma_{D_{h_m}}$ 上达到最大值．但在其边界上 $\varphi\leqslant 0$, $\phi\leqslant 0$，所以在 $\overline{D}_{h_m}$ 的一切网格点上都有

$$g(A)-\varepsilon-cw(x,t)\leqslant U_{h_m}(x,t)\leqslant g(A)+\varepsilon+cw(x,t).$$

如果当 h_m 充分小时，(x, t) 是 D_{h_m} 中的网格点，则在上式中令 $m\to\infty$ 后就得到

$$g(A)-\varepsilon-cw(x,t)\leqslant U(x,t)\leqslant g(A)+\varepsilon+cw(x,t).$$

由于网格点在 D 中稠密，所以上式对一切 (x, t) 都成立。又因为当 $(x,t)\to A$ 时，$w(x,t)\to 0$，因此得到

$$g(A)-\varepsilon\leqslant \varliminf_{(x,t)\to A} U(x,t)\leqslant \varlimsup_{(x,t)\to A} U(x,t)\leqslant g(A)+\varepsilon.$$

在上式中令 $\varepsilon\to 0$，即得所要证的结论。

命题 11.3 假设点 $A=(x',t')$，$x'=\varphi_l(t')$，并存在满足下列条件的闸函数 $v_A(x,t)$，

(i) $v_A(x,t)$ 在 $\overline{D}$ 与 A 的某邻域（其中 $t\leqslant t'$）的公共部分 $D^{(A)}$ 中有定义且连续，

(ii) $v_A(A)=0$，并在 $D^{(A)}/A$ 上 $v_A(x,t)>0$，

(iii) 当 h_m 充分小时，在 D_{h_m} 的属于 $D^{(A)}$ 的网格点上，

$$L_h(v_A)<0,$$

那末

$$\lim_{\substack{(x,t)\in D\\(x,t)\to A}} U(x,t)=g(A).$$

证明 假设 $x'=\varphi_1(t')$. 选取适当小的正常数 α，使得由直线 $t=t'-\alpha$，$t=t'$，$x=x'+\alpha$，$x=\varphi_1(t)$ 所围成的区域 $D^{(\alpha)}\subset D^{(A)}$. 假设 ε 是任意小的正数，$D^{(\varepsilon)}$ 是 A 的充分小邻域，使得当 h_m 适当小时，在 $\Gamma_{D_h}\cap D^{(\varepsilon)}$ 上成立下列不等式

$$|g_{h_m}(x,t)-g(A)|<\varepsilon. \tag{11.8}$$

又设 c 是正常数，使得在 $D^{(\alpha)}/D^{(\varepsilon)}$ 上，

$$cv_A(x,t)>2\max_{(x,t)\in\Gamma_D}|g(x,t)|.$$

于是可仿照证明命题 11.2 的方法得到，当 h_m 充分小时，对 $D_{h_m}\cap D^{(\alpha)}$ 的一切网格点 (x,t)，都有

$$\begin{aligned}g(A)-\varepsilon-cv_A(x,t)&\leqslant U_{h_m}(x,t)\\&\leqslant g(A)+\varepsilon+cv_A(x,t).\end{aligned}\tag{11.9}$$

令 $m\to\infty$, $\varepsilon\to 0$, 即得到

$$\lim_{\substack{(x,t)\to A\\ t\leqslant t'}} U(x,t)=g(A).$$

因为 $U_A(A)=0$, 所以根据 (11.9), 还可找到点 A 的一个小邻域 $D^{(A)}$, 使得在 $D_{h_m}\cap D^{(A)}$ 的一切网格点上, 只要 $t\leqslant t'$, 都有

$$|U_{h_m}(x,t)-g(A)|<2\varepsilon. \tag{11.10}$$

不妨假定 $D^{(A)}\subset D^{(\varepsilon)}$, 并作函数

$$w(x,t)=(x-x')^2+3(t-t').$$

又设 c 是这样的正常数, 使得在 $D/D^{(A)}$ 上, 对一切 $t\geqslant t'-\delta$ 的点, 都有

$$cw(x,t)>2\max_{(x,t)\in\Gamma_D}|g(x,t)|,$$

其中 δ 是充分小的正数. 用 H_m 表示 $t>t'-h_m$ 的那些网格点的全体. 下面证明在一切属于 $\Gamma_{D_{h_m}}\cap H_m$ 和 H_m 的最下面一列网格点上成立下列不等式

$$g(A)-3\varepsilon-cw(x,t)\leqslant U_{h_m}(x,t)\leqslant g(A)+3\varepsilon+cw(x,t). \tag{11.11}$$

事实上, 若点 $(x,t)\bar{\in}D^{(A)}$, 则由 c 的选择方法, (11.11) 式一定成立. 若 $(x,t)\in D^{(A)}$, $w(x,t)<0$, 则由于 $t>t'-h_m$, 故当 h_m 充分小时, $cw(x,t)>-\varepsilon$, 从而可由 (11.10) 推出 (11.11). 若 $(x,t)\in D^{(A)}$, $w(x,t)>0$, 则由 (11.8), (11.10) 推得 (11.11).

因为 $L_h(w)<0$, 所以在 H_m 上, (11.11) 一致地成立. 从而即可仿前证得

$$\lim_{\substack{(x,t)\to A\\ t\geqslant t'}} U(x,t)=g(A).$$

定理 11.1 如果下列条件满足, 则问题 (11.1) 具有唯一的古典解.

(i) 对于曲线 $x=\varphi_1(t)$ 上的每一点 (x',t'), 都存在正常数 c_1, 使得当 $t<t'$, 且 $t'-t$ 充分小时, $\varphi_1(t)-\varphi_1(t')>c_1(t-t')$;

(ii) 对于曲线 $x=\varphi_2(t)$ 上的每一点 (x',t'), 都存在正常数

c_2，使得当 $t < t'$，且 $t' - t$ 充分小时，

$$\varphi_2(t) - \varphi_2(t') < -c_2(t - t').$$

证明 如果能找到满足命题 11.3 中条件的闸函数 $v_A(x, t)$，就证明了古典解的存在性。

当 $A(x', t')$ 满足条件 $x' = \varphi_1(t')$ 时，可取
$v_A(x, t) =$

$$\frac{1}{[(x' - x'')^2 + (t' - t'')^2]^d} - \frac{1}{[(x - x'')^2 + (t - t'')^2]^d},$$

其中 d 是充分大的正数，$b > 0$，

$$x'' = x' - \frac{b}{\sqrt{1 + c_1^2}}, \quad t'' = t' + \frac{c_1 b}{\sqrt{1 + c_1^2}},$$

当 $A(x', t')$ 满足条件 $x' = \varphi_2(t')$ 时，则可取
$v_A(x, t) =$

$$\frac{1}{[(x' - x'')^2 + (t' - t'')^2]^d} - \frac{1}{[(x - x'')^2 + (t - t'')^2]^d},$$

其中

$$x'' = x' + \frac{b}{\sqrt{1 + c_2^2}}, \quad t'' = t' + \frac{c_2 b}{\sqrt{1 + c_2^2}}.$$

显然，这样的 $v_A(x, t)$ 满足闸函数条件 (i)，(ii)．只要应用 $v_A(x, t)$ 在点 (x, t) 上的 Taylor 展开式，并注意到当 d 充分大时，在 A 的充分小邻域内

$$\frac{\partial^2 v_A(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial v_A(x, t)}{\partial t} < 0,$$

就可证明 $v_A(x, t)$ 满足条件 (iii)

唯一性的证明是显然的。

11.2 变系数方程，变时间步长方法

上节介绍的极值原理可推广到更一般的情况，例如考虑下列问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial t} - a_0 \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a_1 \dfrac{\partial U}{\partial x} + a_2 U = f, \\
\qquad 0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant T, \\
U(0, t) = g_0(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \\
U(1, t) = g_1(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \\
U(x, 0) = U_0(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,
\end{cases}
\tag{11.12}
$$

其中 $a_0(x, t)$, $a_1(x, t)$, $a_2(x, t)$, $g_0(t)$, $g_1(t)$ 和 $U_0(x)$ 都是连续函数，$a_0(x, t) \geqslant c_0 > 0$, 并且 $U_0(0) = g_0(0)$, $U_0(1) = g_1(0)$, 可以应用 § 10.1 和 § 10.2 中的显式格式来解 (11.12)。 本节则利用隐式格式，记

$$
\mathscr{I}_h = \{x \mid x = jh,\ 1 \leqslant j \leqslant J-1\},\ \bar{\mathscr{I}}_h = \{x / x = jh,\ 0 \leqslant j \leqslant J\},\ Jh = 1.\ v^k(x) = v(x, k\tau),
$$

又记

$$
\|v^k\|_\infty = \max_{x \in \mathscr{I}_h} |v^k(x)|, \quad \|v^k\|_{\infty, \bar{\mathscr{I}}_h} = \max_{x \in \bar{\mathscr{I}}_h} |v^k(x)|,
$$

$$
\|g^k\|_{\infty, \Gamma_h} = \max(|g_0^k|, |g_1^k|),
$$

$$
|||v|||_\infty = \max_{0 \leqslant k\tau \leqslant T} \|v^k\|_{\infty, \bar{\mathscr{I}}_h}, \quad |||g|||_{\infty, \Gamma_h} = \max_{0 \leqslant k\tau \leqslant T} \|g^k\|_{\infty, \Gamma_h}.
$$

求解 (11.12) 的格式是

$$
\begin{cases}
L_h u^k(x) = u_{\bar{t}}^k(x) - a_0^k(x) u_{x\bar{x}}^k(x) + a_1^k(x) u_{\hat{x}}^k(x) \\
\qquad + a_2^k(x) u^k(x) = f^k(x), \qquad x \in \mathscr{I}_h, k \geqslant 0, \\
u^k(0) = g_0^k, \qquad k \geqslant 0, \\
u^k(1) = g_1^k, \qquad k \geqslant 0, \\
u^0(x) = U_0(x), \qquad x \in \bar{\mathscr{I}}_h.
\end{cases}
\tag{11.13}
$$

引理 11.2 若 h, τ 适当小，并且

$$
f^k(x) \geqslant 0,\ g_0^k(x) \geqslant 0,\ g_1^k(x) \geqslant 0,\ U_0(x) \geqslant 0,
$$

则对一切 $x \in \bar{\mathscr{I}}_h$, $k \geqslant 0$, 都有 $u^k(x) \geqslant 0$.

证明 可把 (11.13) 改写为

$$
b_{-1}^k(x) u^k(x-h) + b_0^k(x) u^k(x) + b_1^k(x) u^k(x+h) = d^k(x),
$$

其中，当 $x \in \mathscr{I}_h$ 时，

$$
b_{-1}^k(x) = -\frac{\tau}{h^2} a_0^k(x) - \frac{\tau}{2h} a_1^k(x),
$$

$$b_1^k(x) = -\frac{\tau}{h^2} a_0^k(x) + \frac{\tau}{2h} a_1^k(x),$$

$$b_0^k(x) = 1 + \frac{2\tau}{h^2} a_0^k(x) + \tau a_2^k(x),$$

$$d^k(x) = u^{k-1}(x) + \tau f^k(x),$$

当 $x = 0, 1$ 时，

$$b_0^k(0) = b_0^k(1) = 1,\ b_{-1}^k(0) = b_1^k(0) = b_{-1}^k(1) = b_1^k(1) = 0,$$
$$d^k(0) = g_0^k,\ d^k(1) = g_1^k.$$

把由系数 $b_m^k(jh)$ 所组成的矩阵记为 B^k，则它是正型矩阵，因此存在 $(B^k)^{-1} > 0$，由此就可用归纳法证明，对一切 $x \in \mathscr{I}_h$ 和 $k \geqslant 0$，都有 $u^k(x) \geqslant 0$。

由引理 11.2 不难得到下面的结果。

引理 11.3 若 h, τ 适当小，并且

$$\begin{cases} |L_h u^k(x)| \leqslant L_h v^k(x), & x \in \mathscr{I}_h,\ k \geqslant 0, \\ |u^k(0)| \leqslant v^k(0), & k \geqslant 0, \\ |u^k(1)| \leqslant v^k(1), & k \geqslant 0, \\ |u^0(x)| \leqslant v^0(x), & x \in \mathscr{I}_h, \end{cases}$$

则 $|||u|||_\infty \leqslant |||v|||_\infty$。

定理 11.2 若 h, τ 适当小，$a_2(x, t) \geqslant c_1 > 0$，则

$$|||u|||_\infty \leqslant \max\left(\|U_0\|_\infty,\ \frac{|||f|||_\infty}{c_1},\ |||g|||_{\infty,\Gamma_h}\right).$$

证明 作强函数 $v^k(x)$

$$v^k(x) \equiv \max\left(\|U_0\|_\infty,\ \frac{|||f|||_\infty}{c_1},\ |||g|||_{\infty,\Gamma_h}\right).$$

于是 $v^k(x)$ 满足引理 11.3 中的条件，并由此推得所证的结论。

定理 11.3 若 h, τ 适当小，那末存在依赖于 T 的正常数 c_2，使得

$$|||u|||_\infty \leqslant c_2 \max(\|U_0\|_\infty,\ |||f|||_\infty,\ |||g|||_{\infty,\Gamma_h}).$$

证明 对每个固定的 k，定义差分算子

$L_h^{(k)} u^k(x) =$

$$b_{-1}^k(x)u^k(x-h)+b_0^k(x)u^k(x)+b_1^k(x)u^k(x+h),$$

于是，$L_h^k(x)$ 是正型算子，且 $L_h^{(k)}u^k(x)=d^k(x)$。作强函数

$$v^k(x)=\frac{\phi^k}{d},$$

其中

$$\phi^k=\max(\|u^{k-1}\|_\infty+\tau\|f^k\|_\infty,\ \|g^k\|_{\infty,\Gamma_h}),$$

$$d=1-\tau\max_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant t\leqslant T}}|a_2(x,t)|.$$

于是，当 $x\in\mathscr{I}_h$ 时，$L_h^kv^k(x)\geqslant\|u^{k-1}\|_\infty+\tau\|f^k\|_\infty$，当 $x=0,1$ 时，$L_h^kv^k(x)\geqslant\|g^k\|_{\infty,\Gamma_h}$，故由定理 4.17

$$\|u^k\|_{\infty,\mathscr{I}_h}\leqslant\|v^k\|_{\infty,\mathscr{I}_h}=\frac{\phi^k}{d}. \tag{11.14}$$

因此，或者 $\|u^k\|_{\infty,\mathscr{I}_h}\leqslant\dfrac{1}{d}\|g^k\|_{\infty,\Gamma_h}$，或者

$$\|u^k\|_{\infty,\mathscr{I}_h}\leqslant\frac{1}{d}(\|u^{k-1}\|_\infty+\tau\|f^k\|_\infty).$$

依此递推下去，并注意到 $d=1+O(\tau)$，即得到所证的结果。

隐式格式的缺点是工作量较大，因此有时采用变步长来克服它。例如考虑下列问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}=\dfrac{\partial^2U}{\partial x^2}, & 0<x<1,\ 0\leqslant t\leqslant T,\\ U(0,t)=U(1,t)=0, & 0\leqslant t\leqslant T,\\ U(x,0)=U_0(x), & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases} \tag{11.15}$$

与其对应的特征值问题是

$$\begin{cases}\dfrac{d^2\phi}{dx^2}+\mu\phi=0, & 0<x<1,\\ \phi(0)=\phi(1)=0.\end{cases}$$

可以证明，它具有特征值 $\mu^{(l)}=l^2\pi^2$，$\mu^{(l)}$ 所对应的特征函数为 $\eta^{(l)}(x)=\sqrt{2}\sin(l\pi x)$，并且 $\{\eta^{(l)}(x)\}$ 是规范正交的，因此原问题的解可表达为

$$U(x,t)=\sum_{l=1}^{\infty}\beta_l e^{-l^2\pi^2 t}\eta^{(l)}(x), \tag{11.16}$$

$$\beta_l=\int_0^1 U_0(x)\eta^{(l)}(x)dx.$$

今采用 (11.13) 来解 (11.15)，其中 $t_{k+1}=t_k+\tau_k$。记

$$\tilde{u}^k(x)=u^k(x)-U^k(x),$$

则有

$$\begin{cases}\tilde{u}_t^k(x)=\tilde{u}_{x\bar{x}}^k(x)+\left(\dfrac{h^2}{12}+\dfrac{\tau_{k-1}}{2}\right)\left(\dfrac{\partial^2\bar{U}^k(x)}{\partial t^2}\right),\\ \qquad\qquad x\in\mathscr{I}_h,\ k\geqslant 0,\\ \tilde{u}^k(0)=\tilde{u}^k(1)=0,\qquad k\geqslant 0,\\ \tilde{u}^0(x)=0,\qquad x\in\mathscr{I}_h,\end{cases} \tag{11.17}$$

其中

$$\frac{\partial^2\bar{U}^k(x)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x+2\theta_0 h-h,k\tau+\theta_1\tau-\tau),$$

$$0\leqslant\theta_0,\ \theta_1\leqslant 1.$$

可仿照 (11.14) 得到

$$\|\tilde{u}^k\|_\infty\leqslant\|\tilde{u}^{k-1}\|_\infty+\tau_{k-1}\left(\frac{h^2}{12}+\frac{\tau_{k-1}}{2}\right)\left\|\left(\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial t^2}\right)^{k-1}\right\|_\infty$$

$$\leqslant\sum_{\xi=0}^{k-1}\tau_\xi\left(\frac{h^2}{12}+\frac{\tau_\xi}{2}\right)\left\|\left(\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial t^2}\right)^{\xi}\right\|_\infty. \tag{11.18}$$

另一方面由 (11.16) 得到

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\pi^4 e^{-\pi^2 t}\sum_{l=1}^{\infty}\beta_l l^4 e^{-(l^2-1)\pi^2 t}\eta^{(l)}(x),$$

若 $U_0(x)\in C^5(\mathscr{I})$，则存在正常数 c_3，使得

$$\left|\sum_{l=1}^{\infty}\beta_l l^4 e^{-(l^2-1)\pi^2 t}\eta^{(l)}(x)\right|\leqslant\sqrt{2}\sum_{l=1}^{\infty}l^4|\beta_l|=c_3,$$

从而

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right|\leqslant c_3\pi^4 e^{-\pi^2 t},$$

把上式代入 (11.18) 后得到

$$\|\tilde{u}^k\|_\infty \leqslant c_3\pi^4 \sum_{\xi=0}^{k-1} \tau_\xi \left(\frac{h^2}{12} + \frac{\tau_\xi}{2}\right) e^{-\pi^2 t_\xi}.$$

若取 $\tau_k = h^2 e^{\frac{\pi^2 t_k}{2}}$，则由上式得到

$$\|\tilde{u}^k\|_\infty \leqslant c_3\pi^4 h^4 \sum_{\xi=0}^{k-1} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{2} e^{\frac{\pi^2 t_\xi}{2}}\right) e^{-\pi^2 t_\xi}$$

$$= \frac{c_3\pi^4 h^4}{2} \sum_{\xi=0}^{k-1} \left(1 + \frac{1}{6} e^{-\frac{\pi^2 t_\xi}{2}}\right) \leqslant \frac{7}{12} c_3 k\pi^4 h^4. \qquad (11.19)$$

由于

$$t_{k+1} = t_k + \tau_k = t_k + h^2 e^{\frac{\pi^2 t_k}{2}}$$

$$\geqslant t_k + h^2\left(1 + \frac{\pi^2 t_k}{2}\right) \geqslant t_k\left(1 + \frac{\pi^2 h^2}{2}\right) + h^2,$$

因此

$$t_k \geqslant h^2 + h^2\left(1 + \frac{\pi^2 h^2}{2}\right) + \cdots + h^2\left(1 + \frac{\pi^2 h^2}{2}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\left(\left(1 + \frac{\pi^2 h^2}{2}\right)^k - 1\right) > kh^2.$$

把它代入 (11.19) 后即有

$$\|\tilde{u}^k\|_\infty \leqslant \frac{7}{12} c_3 T\pi^4 h^2.$$

显然，变步长格式的解的误差仍为 $O(h^2)$，但却减少了工作量.

隐式格式比显式格式稳定，但并不等于前者的解就一定比后者的解更精确. 事实上，在一定条件下，两者从不同方向来逼近真解. 例如假设当 $t > 0$ 时，$\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} > 0$，那末若采用等步长隐式格式，则对任意的 k，都有

$$L_h^{(k)}\tilde{u}^k(x) = \begin{cases} \tilde{u}_{x\bar{x}}^k(x) - \tilde{u}_{\bar{t}}^k(x) < 0, & x \in \mathscr{I}_h,\ k \geqslant 1, \\ \tilde{u}^k(0) = \tilde{u}^k(1) = 0, & k \geqslant 0, \\ \tilde{u}^0(x) = 0, & x \in \mathscr{I}_h. \end{cases}$$

根据引理 11.1，对一切 $x \in \mathscr{I}_h$，$\tilde{u}^k(x) \geqslant 0$，即 $u^k(x)$ 不会小于真解 $U^k(x)$. 反之，若采用古典显式格式，则有

$$\begin{cases} \tilde{u}_t^k(x) = \tilde{u}_{xx}^k(x) + \left(\frac{h^2}{12} - \frac{\tau}{2}\right)\frac{\partial^2 \overline{U}(x)}{\partial t^2}, & x \in \mathscr{I}_h,\ k \geqslant 0, \\ \tilde{u}^k(0) = \tilde{u}^k(1) = 0, & k \geqslant 0, \\ \tilde{u}^0(x) = 0, & x \in \mathscr{I}_h. \end{cases}$$

若 $\frac{1}{6} < \frac{\tau}{h^2} \leqslant \frac{1}{2}$，则可用归纳法证明 $\tilde{u}^k(x) \leqslant 0$，即 $u^k(x)$ 不会大于真解 $U^k(x)$. 如果交替地使用两种格式或把两种格式的解进行某种平均，则会获得较好的数值结果.（详见 Саульев (1960)）.

11.3 高阶方程的初、边值问题

前面介绍的各种方法都可推广到高阶方程，但要合理地处理边界条件. 解高阶方程的差分格式在每一时刻的系数矩阵，一般都不是正型的，因此较难判别它的单调性，或者它根本不是单调的. 对于常系数方程，人们经常用 Fourier 方法分析它的稳定性. 对于变系数方程，则往往应用能量法来研究稳定性.

今考虑一根单位长度，均匀介质的梁的自由振动，它的两端固定并满足简支条件. 用 $U(x, t)$ 表示梁对平衡位置的偏移. 经适当简化后得到

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}, & 0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant T, \\ U(0, t) = U(1, t) = 0, & 0 \leqslant t \leqslant T, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(1, t) = 0, & 0 \leqslant t \leqslant T, \\ \frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = U_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ U(x, 0) = U_0(x), & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{11.20}$$

用 σ 和 β 表示参数，$0 \leqslant \sigma \leqslant 1$，$0 \leqslant \beta \leqslant 1$，Crandall (1957) 提出了下列计算格式

$$u_{t\bar{t}}^k(x) + \beta h^2 u_{x\bar{x}t\bar{t}}^k(x, t) = -u_{x\bar{x}x\bar{x}}^k(x) - \sigma\tau^2 u_{x\bar{x}x\bar{x}t\bar{t}}^k(x).$$

在边界上引入假想网格点 $x = -h$ 和 $x = 1 + h$，并且令

$$u^k(0)=u^k(1)=u^k_{\bar{x}x}(0)=u^k_{\bar{x}x}(1)=0,$$

由此还推得

$$u^k(-h)=-u^k(h),\quad u^k(1+h)=-u^k(1-h).$$

设 $\lambda=\frac{\tau}{h^2}$ 是常数，那末一般来说，上述格式的逼近精度是 $O(h^2)$。若 $\beta=\frac{1}{2}$，则逼近误差是 $O(h^4)$。又若 $\lambda^2(1-12\sigma)=\frac{1}{60}$，则逼近误差为 $O(h^6)$。根据分离变量法，此格式的稳定性条件是

$$\lambda\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-4\beta}{1-4\sigma}}.$$

还有许多其它类型的格式，例如 Nishimura (1954) 提出了下列格式

$$u^{k+1}(x)=u^{k-1}(x)+\frac{1}{8}(u^k(x+3h)+u^k(x-3h))$$
$$-\frac{9}{8}(u^k(x+h)+u^k(x-h)).$$

Albrecht (1957) 则采用下列格式

$$\left(\frac{4\tau^2}{h^4}+1\right)u^{k+2}(x)-\frac{8\tau^2}{h^4}(u^{k+1}(x+h)+u^{k+1}(x-h))$$
$$+\frac{4\tau^2}{h^4}(u^k(x+2h)+u^k(x-2h))$$
$$+2\left(\frac{8\tau^2}{h^4}-1\right)u^k(x)-\frac{8\tau^2}{h^4}(u^{k-1}(x+h)$$
$$+u^{k-1}(x-h))+\left(\frac{4\tau^2}{h^4}+1\right)u^{k-2}(x)=0.$$

这个格式是显式的，并对一切 λ，都是稳定的。其缺点是格式层数太多，从而增加了存贮量。

为了避免假想网格点并且减少格式的层数，还可把(11.20)化为下列等价方程组(见 Richtmyer, Morton (1967))，

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial V}{\partial t} = -\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \\[2mm]
\dfrac{\partial W}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2},
\end{cases}
$$

其中 $V = \dfrac{\partial U}{\partial t}$，$W = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$.

若对上面方程组中的两式都用古典显式格式逼近，会得到一个不稳定的格式。若混合地采用隐式-显式格式，则有

$$
\begin{cases}
v_t^k(x) = -w_{x\bar{x}}^k(x), \\
w_t^k(x) = v_{x\bar{x}}^{k+1}(x).
\end{cases}
$$

它实际上是显式格式。记 $a = 2\lambda \sin^2 \dfrac{\beta h}{2}$，由分离变量法得到 (11.21) 的增长矩阵

$$
G(\beta, \tau) = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ -2a & 1 - 4a^2 \end{pmatrix},
$$

它的特征方程是

$$
(\lambda(G) - 1)^2 + 4a^2(\lambda(G) - 1) + 4a^2 = 0.
$$

特征值是

$$
\lambda^{(1)}(G) = 1 - 2a^2 + 2a\sqrt{a^2 - 1},
$$

$$
\lambda^{(2)}(G) = 1 - 2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - 1},
$$

若 $\lambda > \dfrac{1}{2}$，则对某些 βh，$a^2 > 1$，从而得到

$$
|\lambda^{(2)}(G)| > 1 + 2a\sqrt{a^2 - 1} > 1,
$$

即不满足 Von Neumann 条件，因此格式 (11.21) 是不稳定的。若 $\lambda = \dfrac{1}{2}$，则当 $a = 1$ 时，$\lambda^{(1)}(G) = \lambda^{(2)}(G) = -1$，并且初等因子是 2，所以 $(G(\beta, \tau))^k$ 无界，(11.21) 也是不稳定的。若 $\lambda < \dfrac{1}{2}$，则 $\lambda^{(1)}(G)$ 和 $\lambda^{(2)}(G)$ 是共轭复数，且 $|\lambda^{(l)}(G)| = 1$。用 $\eta^{(l)}$ 表示与 $\lambda^{(l)}(G)$ 相对应的特征向量，则不难验证

$$
|\mathrm{Det}(\eta^{(1)}, \eta^{(2)})| = 2\sqrt{1 - a^2} > 0.
$$

根据定理 4.6，格式 (11.21) 是稳定的。

解 (11.20) 的另一个格式是

$$\begin{cases} v_t^k(x) = -\frac{1}{2}\left(w_{x\bar{x}}^k(x) + w_{x\bar{x}}^{k+1}(x)\right), \\ w_t^k(x) = \frac{1}{2}\left(v_{x\bar{x}}^k(x) + v_{x\bar{x}}^{k+1}(x)\right). \end{cases} \tag{11.22}$$

它的逼近误差为 $O(\tau^2 + h^2)$. 增长矩阵是

$$G(\beta, \tau) = \begin{pmatrix} \frac{1 - a^2}{1 + a^2} & \frac{2a}{1 + a^2} \\ \frac{-2a}{1 + a^2} & \frac{1 - a^2}{1 + a^2} \end{pmatrix}.$$

显然，它是一个酉矩阵，因此既满足 Von Neumann 条件又是规范阵. 根据定理 4.4，格式 (11.22) 是稳定的.

另一类高阶方程是

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = (-1)^{p+1}\frac{\partial^{2p} U}{\partial x^{2p}}, \quad 0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant T, \\ \frac{\partial^{2q} U(0, t)}{\partial x^{2q}} = \frac{\partial^{2q} U(1, t)}{\partial x^{2q}} = 0, \\ \quad 0 \leqslant q \leqslant p - 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \\ U(x, 0) = U_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

计算它的一类格式是

$$u_t^k(x) = (-1)^{p+1}\Big(\sigma u^{k+1}_{\underbrace{x\cdots x}_{p}\underbrace{\bar{x}\cdots\bar{x}}_{p}}(x) + (1 - \sigma)u^{k}_{\underbrace{x\cdots x}_{p}\underbrace{\bar{x}\cdots\bar{x}}_{p}}(x)\Big).$$

在边界上引入假想网格点

$$x = -qh \text{ 和 } x = 1 + qh,\ 1 \leqslant q \leqslant p - 1,$$

并且用下式逼近边界条件

$$u^{k}_{\underbrace{x\cdots x}_{q}\underbrace{\bar{x}\cdots\bar{x}}_{q}}(0) = u^{k}_{\underbrace{x\cdots x}_{q}\underbrace{\bar{x}\cdots\bar{x}}_{q}}(1) = 0, \quad 0 \leqslant q \leqslant p - 1.$$

由上式推得

$$\begin{cases} u^k(0) = u^k(1) = 0, \\ u^k(-qh) = -u^k(qh), \quad 1 \leqslant q \leqslant p - 1, \\ u^k(1 + qh) = -u^k(1 - qh) \quad 1 \leqslant q \leqslant p - 1. \end{cases}$$

令 $u^k=(u^k(h),\cdots,u^k(1-h))^*$，则可把上述格式记为下列向量形式

$$Au^{k+1}=Bu^k,$$

其中

$$A=I+\frac{(-1)^p\sigma\tau}{h^{2p}}C^p$$

$$B=I+\frac{(-1)^{p+1}(1-\sigma)\tau C^p}{h^{2p}},$$

$$C=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & & \cdots & \\ 0 & \cdots & & \cdots 1 & -2\end{pmatrix},$$

I 表示 $(J-1)$ 阶单位矩阵，$Jh=1$。因为

$$\lambda^{(l)}(C)=-4\sin^2\frac{l\pi h}{2},\qquad 1\leqslant l\leqslant J-1,$$

所以

$$\lambda^{(l)}(A)=1+\tau\sigma\left(\frac{2\sin\frac{l\pi h}{2}}{h}\right)^{2p},$$

$$\lambda^{(l)}(B)=1-\tau(1-\sigma)\left(\frac{2\sin\frac{l\pi h}{2}}{h}\right)^{2p}.$$

显然，对一切 $\sigma\geqslant 0$，$\lambda^{(l)}(A)\neq 0$，因此 A^{-1} 存在，即上述格式总是可解的．还不难证明，当 $\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 1$ 时，格式总是稳定的，否则要求

$$\frac{\tau}{h^{2p}}\leqslant\frac{1}{2^{2p-1}(1-2\sigma)}.$$

第三类高阶方程是下列双抛物型方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} - 2\dfrac{\partial^3 U}{\partial t\partial x^2} + \dfrac{\partial^4 U}{\partial x^4} = 0, \quad 0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant T, \\
\dfrac{\partial U}{\partial t}(0, t) - \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(0, t) = \dfrac{\partial U(1, t)}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 U(1, t)}{\partial x^2} = 0, \\
\qquad\qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \\
U(0, t) = U(1, t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\
\dfrac{\partial U}{\partial t}(x, 0) - \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, 0) = U_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\
U(x, 0) = U_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.
\end{cases}
$$

可采用下列格式计算它

$$
u^k_{\bar{t}t}(x) - 2u^k_{\bar{t}x\bar{x}}(x) - u^k_{\bar{x}x\bar{x}x}(x) = 0.
$$

这个格式的逼近精度是 $O(\tau^2 + h^2)$，并且当 $\lambda \leqslant \dfrac{1}{2}$ 时，格式是稳定的.

Саульев (1960) 等还详细讨论了另一些高阶方程的差分格式.

在理论物理中，还会遇到下列 Соболев 型方程

$$
\frac{\partial U}{\partial t} + a\frac{\partial U}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \gamma\frac{\partial^3 U}{\partial t\partial x^2} = bU + f,
$$

它并不是抛物型方程，但可用类似的方法来处理. Douglas, Thomée (1981) 还研究了这类问题近似解的超收敛性.

11.4 积分关系法

如同 § 1 中所述，可以用积分关系法建立抛物型方程的差分格式，有时称此类格式为 Box 格式，它的解往往满足离散形式的守恒律. 例如用 $U(x, t)$ 表示温度，$\nu(x, t)$ 表示热传导系数，$\nu(x, t) \geqslant \nu_0 > 0$，$f(x, t)$ 表示热源，在端点 $x = 0$ 或 $x = 1$ 处保持零度，那末在区间 $\mathscr{I} = (0, 1)$ 内的温度满足下列初、边值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial t}-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\nu\dfrac{\partial U}{\partial x}\right)=f, \qquad 0<x<1,\ 0\leqslant t\leqslant T,\\
U(0,t)=U(1,t)=0, \qquad 0\leqslant t\leqslant T,\\
U(x,0)=U_0(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant 1.
\end{cases}
\tag{11.23}
$$

它的解满足守恒律

$$
\int_0^1 U(x,t)dx=\int_0^1 U_0(x)dx+\int_0^t\Big(\nu(1,\xi)\frac{\partial U}{\partial x}(1,\xi)
$$

$$
-\nu(0,\xi)\frac{\partial U}{\partial x}(0,\xi)\Big)d\xi+\int_0^t\int_0^1 f(x,\xi)dxd\xi
$$

和

$$
\|U(t)\|^2_{L^2(\mathscr{I})}+2\int_0^t\int_0^1\nu(x,\xi)\left(\frac{\partial U(x,\xi)}{\partial x}\right)^2dxd\xi
$$

$$
=\|U_0\|^2_{L^2(\mathscr{I})}+2\int_0^t\int_0^1 U(x,\xi)f(x,\xi)f(x,\xi)dxd\xi.
$$

并由此推得，存在正常数 c_1，使得对一切 $t\leqslant T$，都有

$$
\|U(t)\|^2_{L^2(\mathscr{I})}+2\int_0^t\int_0^1\nu(x,\xi)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2dxd\xi
$$

$$
\leqslant c_1\Big(\|U_0\|^2_{L^2(\mathscr{I})}+\int_0^t\|f(\xi)\|^2_{L^2(\mathscr{I})}d\xi\Big).
$$

现在用积分关系法来建立计算 (11.23) 的差分格式. 假设

$$
Jh=1,\ x_j=jh,\ t_k=k\tau.
$$

在矩形 $\{(x,t)/x_{j-\frac{1}{2}}\leqslant x\leqslant x_{j+\frac{1}{2}},\ t_k\leqslant t\leqslant t_{k+1}\}$ 内积分 (11.23)，并记

$$
V(x,t)=-\nu\frac{\partial U}{\partial x}, \tag{11.24}
$$

那末有

$$
\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}(U(x,t_{k+1})-U(x,t_k))dx
$$

$$
+\int_{t_k}^{t_{k+1}}(V(x_{j+\frac{1}{2}},t)-V(x_{j-\frac{1}{2}},t))dt
$$

$$
=\int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}f(x,t)dxdt, \tag{11.25}
$$

它表示热量的平衡关系。由(11.24)还得到

$$U(x_j,t)-U(x_{j-1},t)=-\int_{x_{j-1}}^{x_j}\frac{V(x,t)}{\nu(x,t)}dx.$$

记

$$a(x_j,t)=h\left(\int_{x_{j-1}}^{x_j}\frac{dx}{\nu(x,t)}\right)^{-1},$$

则

$$V(x_{j-\frac{1}{2}},t)\approx\frac{-a(x_j,t)}{h}(U(x_j,t)-U(x_{j-1},t))$$
$$=-a(x_j,t)U_{\bar{x}}(x_j,t),$$

因此

$$V(x_{j+\frac{1}{2}},t)-V(x_{j-\frac{1}{2}},t)\approx-h(a(x_j,t)U_{\bar{x}}(x_j,t))_x.$$

此外又有

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}U(x,t_k)dx\approx hU(x_j,t_k),$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}}V(x_{j+\frac{1}{2}},t)dt$$
$$\approx\tau\sigma V(x_{j+\frac{1}{2}},t_{k+1})+\tau(1-\sigma)V(x_{j+\frac{1}{2}},t_k),$$

其中 $0\leqslant\sigma\leqslant1$. 令 $w^k(x_j)=w(x_j,t_k)$,并把以上各式代入(11.25),则得到

$$U_t^k(x_j)-\sigma(a^{k+1}(x_j)U_{\bar{x}}^{k+1}(x_j))_x-(1-\sigma)(a^k(x_j)U_{\bar{x}}^k(x_j))_x$$
$$=\bar{f}^k(x_j)+R^k(x_j),$$

其中

$$\bar{f}^k(x_j)=\frac{1}{\tau h}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}f(x,t)dxdt,$$

$R^k(x_j)$ 是逼近误差。若 U 适当光滑,则 $|R^k(x_j)|=O(\tau+h^2)$. 若 $\sigma=\frac{1}{2}$,则 $|R^k(x_j)|=O(\tau^2+h^2)$. 根据上式即得到计算(11.23)的下列差分格式

$$\begin{cases}u_t^k(x_j)-\sigma(a^{k+1}(x_j)u_{\bar{x}}^{k+1}(x_j))_x-(1-\sigma)(a^k(x_j)u_{\bar{x}}^k(x_j))_x\\ \qquad=\bar{f}^k(x_j),\qquad 1\leqslant j\leqslant J-1,\ k\geqslant0,\\ u^k(0)=u^k(1)=0,\qquad k\geqslant0,\\ u^0(x_j)=U_0(x_j),\qquad 0\leqslant j\leqslant J.\end{cases}\tag{11.26}$$

在具体计算时，还需要用数值积分方法计算 $a^k(x_i)$ 和 $\bar{f}^k(x_i)$，但所选取的积分公式的误差阶，应该不低于逼近误差阶，否则会影响计算的精度. 一般取

$$a^k(x_i) = \nu^k(x_{i-\frac{1}{2}}),$$

或者

$$a^k(x_i) = \frac{1}{2}(\nu^k(x_{i+1}) + \nu^k(x_{i-1})),$$

以及

$$\bar{f}^k(x_i) = f(x_i, t_{k-\frac{1}{2}}).$$

可以看出，对于不均匀网格，或者 $\nu(x, t)$, $f(x, t)$ 具有第一类间断点，上面的全部推导过程都可行，这是积分关系法的重要优点之一. 特别若把间断点也取为网格点，那末逼近精度与原来无间断系数问题的精度相同，但此时宜把 $\nu(x, t)$ 的值用左，右极限平均值来代替. 例如若 $\nu(x, t)$ 在点 x_i 发生间断，则可取

$$a^k(x_i) = \frac{1}{2}(\nu(x_{i-\frac{1}{2}} - 0, t_k) + \nu(x_{i-\frac{1}{2}} + 0, t_k)).$$

下面来分析 (11.26) 的解的性质. 首先有下列守恒律

$$\begin{aligned} h\sum_{j=1}^{J-1} u^k(x_j) = h\sum_{j=1}^{J-1} u^0(x_j) + \tau \sum_{\xi=0}^{k-1} [\sigma a^{\xi+1}(1) u_{\bar{x}}^{\xi+1}(1) \\ + (1-\sigma) a^\xi(1) u_{\bar{x}}^\xi(1) - \sigma a^{\xi+1}(h) u_x^{\xi+1}(h) \\ - (1-\sigma) a^\xi(h) u_x^\xi(h)] + h\tau \sum_{j=1}^{J-1} \bar{f}^\xi(x_j). \end{aligned}$$

其次，令

$$E(w) = h\sum_{j=1}^{J-1} a(x_j)(w_{\bar{x}}(x_j))^2.$$

若 $v(0) = w(0) = v(1) = w(1) = 0$, 则由 Abel 公式得到

$$\begin{aligned} h\sum_{j=1}^{J-1} (a(x_j) v_{\bar{x}}(x_j))_x w(x_j) = -h\sum_{j=1}^{J-1} a(x_j) v_{\bar{x}}(x_j) w_{\bar{x}}(x_j) \\ - \frac{1}{h} a(1) v(1-h) w(1-h), \end{aligned} \tag{11.27}$$

特别有

$$h\sum_{j=1}^{J-1}(a(x_j)w_{\bar{x}}(x_j))_x w(x_j)$$

$$=-E(w)-\frac{1}{h}a(1)w^2(1-h).\qquad(11.28)$$

为简便计,设 $\sigma=\frac{1}{2}$. 把 (11.26) 对 $(u^k(x_j)+u^{k+1}(x_j))$ 求内积,则由 (11.28) 得到

$$\|u^k\|_t^2+\frac{1}{2}E(u^k+u^{k+1})$$

$$+\frac{1}{2h}a(1)(u^k(1-h)+u^{k+1}(1-h))^2$$

$$=h\sum_{j=1}^{J-1}f(x_j)(u^k(x_j)+u^{k+1}(x_j)).$$

若记

$$\rho(k\tau)=(1+\tau)\|u^0\|^2+\frac{\tau}{2}\sum_{\xi=0}^{k-1}\|f^\xi\|^2,$$

则由上式得到

$$(1-\tau)\|u^k\|^2+\frac{\tau}{2}\sum_{\xi=0}^{k-1}E(u^\xi+u^{\xi+1})$$

$$\leqslant\rho(k\tau)+2\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}\|u^\xi\|^2,$$

从而推得,存在正常数 c_2, c_3, 使得对一切 $k\tau\leqslant T$,

$$\|u^k\|^2+\frac{\tau}{2}\sum_{\xi=0}^{k-1}E(u^\xi+u^{\xi+1})\leqslant c_2\rho(k\tau)e^{c_3k\tau}.$$

上式表明, 格式 (11.26) 是对初值和右端按 l^2 范数稳定的. 又若 $U(x,t)$ 充分光滑,那末 $\|U^k-u^k\|=O(\tau^2+h^2)$.

还可以直接分析差商的计算稳定性和收敛速度. 事实上, 若 $U_0(x)\in H^1(\mathscr{I})$, 则把 (11.23) 对 $\frac{\partial U}{\partial t}$ 求内积后得到

$$\left\|\frac{\partial U}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\mathscr{I})}+\int_0^1 \nu \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x}dx=\int_0^1\frac{\partial U}{\partial t}f(x,t)dx.$$

为简便计，设 ν 与 t 无关，那末得到

$$\left\|\frac{\partial U}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\mathscr{I})}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \nu(x)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2dx$$

$$\leqslant\left\|\frac{\partial U}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\mathscr{I})}+\frac{1}{4}\|f(t)\|^2_{L^2(\mathscr{I})},$$

所以

$$\int_0^1 \nu(x)\left(\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\right)^2dx$$

$$\leqslant\int_0^1 \nu(x)\left(\frac{dU_0}{dx}\right)^2dx+\frac{1}{2}\int_0^t\|f(\xi)\|^2_{L^2(\mathscr{I})}d\xi.$$

现在假设 $\sigma=\frac{1}{2}$，ν 与 t 无关，并把 (11.26) 对 $u_t^k(x_i)$ 求内积，则由 (11.27) 得到

$$\|u_t^k\|^2+\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{J-1}a(x_i)(u_{\bar{x}}^k(x_i)+u_{\bar{x}}^{k+1}(x_i))u_{t\bar{x}}^k(x_i)$$

$$+\frac{a(1)}{2h}(u^k(1-h)+u^{k+1}(1-h))u_t^k(1-h)$$

$$=h\sum_{i=1}^{J-1}\bar{f}^k(x_i)u_t^k(x_i).$$

由于

$$(u_{\bar{x}}^k(x_i)+u_{\bar{x}}^{k+1}(x_i))u_{t\bar{x}}^k(x_i)=[(u^k(x_i))^2]_t,$$

$$(u^k(1-h)+u^{k+1}(1-h))u_t^k(1-h)=[(u^k(1-h))^2]_t,$$

因此

$$\|u_t^k\|^2+\frac{1}{2}[E(u^k)]_t+\frac{a(1)}{2h}[(u^k(1-h))^2]_t$$

$$\leqslant\|u_t^k\|^2+\frac{1}{4}\|\bar{f}^k\|^2.$$

所以

$$E(u^k)+\frac{a(1)}{h}(u^k(1-h))^2$$

$$\leqslant E(u^0)+\frac{a(1)}{h}(u^0(1-h))^2+\frac{\tau}{2}\sum_{\xi=0}^{k-1}\|f^\xi\|^2.$$

上式表明了差商计算是稳定．若解 U 充分光滑，初值计算无误差，那末 $E(U^k-u^k)=O(h^4+\tau^4)$，即

$$\|U_{\bar{x}}^k-u_{\bar{x}}^k\|=O(h^2+\tau^2).$$

根据嵌入定理，还有

$$\|U^k-u^k\|_\infty=O(h^2+\tau^2).$$

Less (1959, 1960a), Самарский (1961a) 等最早用能量法研究了抛物型方程的差分格式．还可用能量法证明初、边值问题解的存在性，例如 Lions, Raviart (1966) 就用它讨论了抛物型-双曲型耦合方程组的解的存在性．

11.5 Keller 的 Box 格式

本节考虑下列问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\nu\dfrac{\partial U}{\partial x}\right), & 0<x<1,\ 0<t\leqslant T,\\ \alpha U(0,t)-\nu(0)\dfrac{\partial U}{\partial x}(0,t)=g_0(t), & 0\leqslant t\leqslant T,\\ \beta U(1,t)+\nu(1)\dfrac{\partial U}{\partial x}(1,t)=g_1(t), & 0\leqslant t\leqslant T,\\ U(x,0)=U_0(x), & 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}\tag{11.29}$$

其中 $0<\nu_0\leqslant\nu(x)\leqslant\nu_1$, α, β 是正常数．

可以在边界上用差商逼近 $\dfrac{\partial U}{\partial x}$，但这样会使精度变差或者出现高阶差商，而后者又往往导致计算不稳定性． Keller (1969a) 提出了一种计算常微分方程边值问题的有效的 Box 格式． 以后 Keller (1971) 又把这方法推广到抛物型方程．我们简述如下，把

(11.29) 改写成下列方程组形式

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial t}=\dfrac{\partial V}{\partial x}, \quad 0<x<1,\ 0<t\leqslant T,\\
V=\nu(x)\dfrac{\partial U}{\partial x}, \quad 0<x<1,\ 0\leqslant t\leqslant T,\\
\alpha U(0,t)-V(0,t)=g_0(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T,\\
\beta U(1,t)+V(1,t)=g_1(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T,\\
U(x,0)=U_0(x), \quad 0\leqslant x\leqslant 1,
\end{cases}
\tag{11.30}
$$

这样，就不必在边界上用差商逼近 $\dfrac{\partial U}{\partial x}$，从而提高了精度.

用 x_j 和 t_k 表示网格点，$x_0=0$，$x_j=x_{j-1}+h_j$，$x_J=1$，$t_0=0$，$t_k=t_{k-1}+\tau_k$，$t_N=T$. 又记

$$
x_{j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(x_j+x_{j+1}), \quad t_{k+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(t_k+t_{k+1}).
$$

用 $w^k(x_j)$ 表示 $w(x_j,t_k)$，并定义

$$
w^k(x_{j+\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}(w^k(x_j)+w^k(x_{j+1})),
$$

$$
w^{k+\frac{1}{2}}(x_j)=\frac{1}{2}(w^k(x_j)+w^{k+1}(x_j)),
$$

$$
w^k_{\bar{x}}(x_j)=\frac{1}{h_j}(w^k(x_j)-w^k(x_{j-1})),
$$

$$
w^k_{\bar{t}}(x_j)=\frac{1}{\tau_k}(w^k(x_j)-w^{k-1}(x_j)).
$$

应用与上节类似的推导方法，即得到下列类型的 Box 格式

$$
\begin{cases}
u^k_{\bar{t}}(x_{j-\frac{1}{2}})=v^{k-\frac{1}{2}}_{\bar{x}}(x_j)+R^{k-\frac{1}{2}}(x_{j-\frac{1}{2}}),\\
\qquad 1\leqslant j\leqslant J-1,\ k\geqslant 1,\\
v^k(x_{j-\frac{1}{2}})=\nu(x_{j-\frac{1}{2}})u^k_{\bar{x}}(x_j)+S^k(x_{j-\frac{1}{2}}),\\
\qquad 1\leqslant j\leqslant J-1,\ k\geqslant 1,\\
\alpha u^k(0)-v^k(0)=g^k_0, \quad k\geqslant 0,\\
\beta u^k(1)+v^k(1)=g^k_1, \quad k\geqslant 0,\\
u^0(x_j)=U_0(x_j), \quad 0\leqslant j\leqslant J,\\
v^0(x_j)=\nu(x_j)\dfrac{dU_0(x_j)}{dx}. \quad 0\leqslant j\leqslant J.
\end{cases}
\tag{11.31}
$$

如果 $U_0(x)$ 是逐段光滑函数，则把间断点取为网格点 x_i，并用下式代替初值

$$v^0(x_{i-\frac{1}{2}}) = \nu(x_{i-\frac{1}{2}})\frac{dU_0(x_{i-\frac{1}{2}})}{dx} + S^0(x_{i-\frac{1}{2}}),$$

其中 $\nu(x_{i-\frac{1}{2}})$ 和 $\frac{dU_0}{dx}(x_{i-\frac{1}{2}})$ 不再分别是 $\nu(x)$ 和 $\frac{dU_0(x)}{dx}$ 在点 x_{i-1} 和 x_i 上的值的平均值，而是它们在点 $x_{i-\frac{1}{2}}$ 上的真正的函数值. 同时，当 $k=1$ 时，要把 (11.31) 中的第一式作相应的修改.

如果 $g_0(t)$, $g_1(t)$ 是逐段光滑函数，则把它们的间断点取为网格点 t_k，并把边界条件改为

$$\begin{cases}\alpha u^{k-\frac{1}{2}}(0) - v^{k-\frac{1}{2}}(0) = g_0^{k-\frac{1}{2}},\\ \beta u^{k-\frac{1}{2}}(1) + v^{k-\frac{1}{2}}(1) = g_1^{k-\frac{1}{2}}.\end{cases}$$

下面来分析稳定性，为简便计，假设

$$\begin{cases}\alpha u^k(0) - v^k(0) = 0,\\ \beta u^k(1) + v^k(1) = 0.\end{cases} \tag{11.32}$$

定义下列内积与范数

$$(w^k, z^k)_{AV} = \sum_{j=1}^{J} h_j w^k(x_{j-\frac{1}{2}}) z^k(x_{j-\frac{1}{2}}),$$

$$\|w^k\|_{AV}^2 = (w^k, w^k)_{AV}.$$

可以验证

$$\sum_{j=1}^{J} h_j w_{\bar{x}}^k(x_j) z^k(x_{j-\frac{1}{2}}) + \sum_{j=1}^{J} h_j z_{\bar{x}}^k(x_j) w^k(x_{j-\frac{1}{2}})$$
$$= w^k(1)z^k(1) - w^k(0)z^k(0), \tag{11.33}$$

$$2(w_{\bar{t}}^k, w^{k-\frac{1}{2}})_{AV} = (\|w^k\|_{AV}^2)_{\bar{t}} \tag{11.34}$$

把 (11.31) 的第一式对 $2u^{k-\frac{1}{2}}(x_{j-\frac{1}{2}})$ 求内积，且由 (11.34) 得到

$$(\|u^k\|_{AV}^2)_{\bar{t}} = 2\sum_{j=1}^{J} h_j u^{k-\frac{1}{2}}(x_{j-\frac{1}{2}}) v_{\bar{x}}^{k-\frac{1}{2}}(x_j) + (u^{k-\frac{1}{2}}, R^{k-\frac{1}{2}})_{AV}. \tag{11.35}$$

又由 (11.31) 的第二式得到

$$v^{k-\frac{1}{2}}(x_{i-\frac{1}{2}}) = \nu(x_{i-\frac{1}{2}})u_{\bar{x}}^{k-\frac{1}{2}}(x_i) + S^{k-\frac{1}{2}}(x_{i-\frac{1}{2}}),$$

所以

$$2\sum_{i=1}^{J} h_i \frac{(v^{k-\frac{1}{2}}(x_{i-\frac{1}{2}}))^2}{\nu(x_{i-\frac{1}{2}})} = 2\sum_{i=1}^{J} h_i v^{k-\frac{1}{2}}(x_{i-\frac{1}{2}})u_{\bar{x}}^{k-\frac{1}{2}}(x_i)$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{J} h_i \frac{v^{k-\frac{1}{2}}(x_{i-\frac{1}{2}})S^{k-\frac{1}{2}}(x_{i-\frac{1}{2}})}{\nu(x_{i-\frac{1}{2}})}.$$

把上式与 (11.35) 相加后得到

$$(\|u^k\|_{AV}^2)_{\bar{t}} = F_1 + F_2 + F_3, \tag{11.36}$$

其中

$$F_1 = 2u^{k-\frac{1}{2}}(1)v^{k-\frac{1}{2}}(1) - 2u^{k-\frac{1}{2}}(0)v^{k-\frac{1}{2}}(0),$$

$$F_2 = -2\sum_{i=1}^{J} h_i \frac{(v^{k-\frac{1}{2}}(x_{i-\frac{1}{2}}))^2}{\nu(x_{i-\frac{1}{2}})},$$

$$F_3 = 2\sum_{i=1}^{J} h_i \frac{v^{k-\frac{1}{2}}(x_{i-\frac{1}{2}})S^{k-\frac{1}{2}}(x_{i-\frac{1}{2}})}{\nu(x_{i-\frac{1}{2}})} + (u^{k-\frac{1}{2}}, R^{k-\frac{1}{2}})_{AV}.$$

由边界条件得到

$$F_1 = -2\beta(u^{k-\frac{1}{2}}(1))^2 - 2\alpha(u^{k-\frac{1}{2}}(0))^2 \leqslant 0.$$

当且仅当 $u^{k-\frac{1}{2}}(0) = u^{k-\frac{1}{2}}(1) = 0$ 时,上式才等于零. 又有

$$F_2 \leqslant \frac{-2}{\nu_1}\|v^{k-\frac{1}{2}}\|_{AV}^2,$$

$$|F_3| \leqslant c_1\|u^{k-\frac{1}{2}}\|_{AV}^2 + \varepsilon\|v^{k-\frac{1}{2}}\|_{AV}^2$$

$$+ c_1\|R^{k-\frac{1}{2}}\|_{AV}^2 + \frac{c_1}{\varepsilon}\|S^{k-\frac{1}{2}}\|_{AV}^2.$$

把它们代入 (11.36), 并令 ε 适当小,于是

$$(\|u^k\|_{AV}^2)_{\bar{t}} \leqslant c_2\|u^{k-\frac{1}{2}}\|_{AV}^2 + c_3(\|R^{k-\frac{1}{2}}\|_{AV}^2 + \|S^{k-\frac{1}{2}}\|_{AV}^2).$$

因此当 $k\tau \leqslant T$ 时,

$$\|u^k\|_{AV}^2 \leqslant c_4\max(\max_{1\leqslant \xi\leqslant k}(\|R^{\xi-\frac{1}{2}}\|_{AV}^2, \|S^{\xi-\frac{1}{2}}\|_{AV}^2), \|u^0\|_{AV}^2).$$

若 U 和 V 具有分段连续的四阶导数, $h = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant J} h_i$, $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant N} \tau_k = rh$, 其中 r 是正常数,则 $\|U^k - u^k\|_{AV} = O(h^2)$. 类似地可证明

$$\|V^k - v^k\|_{AV} = O(h^2).$$

11.6 配置法，超收敛性

De Boor, Swartz (1972) 和 Douglas, Dupont (1972, 1973, 1974) 最早提出了抛物型方程的配置格式，并得到热传导方程的超收敛的结果．为简单计，本节只考虑下列问题．

$$
\begin{cases}
LU = \dfrac{\partial U}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant T, \\
U(0, t) = U(1, t) = 0, & 0 \leqslant t \leqslant T, \\
U(x, 0) = U_0(x), & 0 \leqslant x \leqslant 1.
\end{cases}
\tag{11.37}
$$

并假定$\left|\dfrac{\partial^{17} U}{\partial x^{17}}\right|$一致有界．

记 $\mathscr{I} = (0, 1)$．令 $Jh = 1$, $x_j = jh$, $\mathscr{I}_j = (x_{j-1}, x_j)$, $N\tau = T$, $t_k = k\tau$, $\delta_k = (t_{k-1}, t_k)$．用 $P_r(\mathscr{I}_j)$ 和 $P_s(\delta_k)$ 分别表示在 $\mathscr{I}_j$ 和 δ_k 上次数不超过 r 的多项式的集合，并记

$$
M_1(h, r) = \{\varphi \in C^1(\mathscr{I}) / \varphi \in P_r(\mathscr{I}_j),\quad 1 \leqslant j \leqslant J\}, r \geqslant 3,
$$
$$
M_0(\tau, s) = \{\varphi \in C^0[0, T] / \varphi \in P_s(\delta_k),\quad 1 \leqslant k \leqslant N\}, s \geqslant 1.
$$

用 a_f 和 ω_f 分别表示 $[0, 1]$ 中的 Gauss 点及其权，其中

$$
0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{r-1} < 1, \qquad \omega_f > 0.
$$

于是对一切 $p(x) \in P_{2r-3}(\mathscr{I})$，都有

$$
\int_0^1 p(x)dx = \sum_{f=1}^{r-1} \omega_f p(a_f).
$$

类似地用 b_m 和 ϖ_m 表示 $[0, 1]$ 中的 Gauss 点及其权，其中

$$
0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_s < 1, \qquad \varpi_m > 0,
$$

于是对一切 $p(x) \in P_{2s-1}(\mathscr{I})$，都有

$$
\int_0^1 p(x)dx = \sum_{m=1}^{s} \varpi_m p(b_m).
$$

记

$$
a_{jl} = x_{j-1} + h a_l, \quad b_{km} = t_{k-1} + \tau b_m.
$$

今寻找 $u(x, t) \in M_1(h, r) \times M_0(\tau, s)$，使得

$$\begin{cases} Lu(a_{jl},b_{km})=0, & 1\leqslant j\leqslant J,\ 1\leqslant l\leqslant r-1, \\ & 1\leqslant k\leqslant N,\ 1\leqslant m\leqslant s, \\ u(0,t)=u(1,t)=0, & 0\leqslant t\leqslant T, \\ u(x,0)\in M_t(h,r), & 0\leqslant x\leqslant 1, \end{cases} \tag{11.38}$$

其中 $u(x,0)$ 是由 $U_0(x)$ 插值得到的．这就是所谓的配置格式。

配置格式的优点在于它的解在网格点上具有高精度$O(h^{2r-2}+\tau^{2s})$，即超收敛性．为简便计，下面假定 $r=4$，$s=2$，于是

$$a_1=\frac{5-\sqrt{15}}{10},\quad a_2=\frac{1}{2},\quad a_3=\frac{5+\sqrt{15}}{10},$$

$$b_1=\frac{3-\sqrt{3}}{6},\quad b_2=\frac{3+\sqrt{3}}{6}.$$

又记

$$|||U|||_{\infty,a}=\sup_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant T\leqslant T}}\left|\frac{\partial^a U}{\partial x^a}\right|.$$

我们分两步来估计误差．先不考虑 t 方向的离散化．令

$$B(x)=\frac{1}{6!}\frac{d}{dx}(x^3(x-1)^3),\qquad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

$$E_q(x)=\frac{5!}{(4+q)!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{q-1}B(x),$$

$$q=1,2,\cdots,\ 0\leqslant x\leqslant 1.$$

由于 $x=0$ 和 $x=1$ 是 $B(x)$ 的二重根，$x=\frac{1}{2}$ 是 $B(x)$ 的单重根，所以可定义一个把 $v\in C^1(\mathscr{I})$ 映到 $P_1(.\mathscr{I})$ 的插值算子 A，使得

$$\begin{cases}(Av)(x)=v(x), & 当\ x=0,\frac{1}{2},1, \\ (Av)^{(1)}(x)=v^{(1)}(x), & 当\ x=0,1,\end{cases} \tag{11.39}$$

其中 $v^{(l)}(x)=\frac{d^lv(x)}{dx^l}$．根据 Peano 定理(见 Davis (1963))，

$$(v-Av)(x)=\sum_{q=1}^{p}v^{(4+q)}\left(\frac{1}{2}\right)E_q(x)+S_p(x), \tag{11.40}$$

$$S_p(x) = \int_0^1 K_p(x, y) v^{(5+p)} dy,$$

其中 $K_p(x, y)$ 是 Peano 核.

若 $v \in H^{5+p}(\mathscr{I})$, 则 $S_p(x)$ 能形式地微分 $4+p$ 次. 记 $x_{j+\frac{1}{2}} = \left(j + \frac{1}{2}\right)h$, A_h 是从 $C^1(\mathscr{I})$ 到 $M_1(h, 4)$ 的插值算子,它使得

$$\begin{cases} (A_h v)(x_j) = v(x_j), & 0 \leqslant j \leqslant J, \\ (A_h v)(x_{j-\frac{1}{2}}) = v(x_{j-\frac{1}{2}}), & 1 \leqslant j \leqslant J, \\ (A_h v)^{(1)}(x_j) = v^{(1)}(x_j), & 0 \leqslant j \leqslant J. \end{cases} \tag{11.41}$$

若 $v \in C^{5+p}(\mathscr{I})$, $x \in \mathscr{I}_j$, 则

$$\begin{aligned} (v - A_h v)^{(\alpha)}(x) = & \sum_{q=1}^{p} v^{(4+q)}(x_{j-\frac{1}{2}}) E_q^{(\alpha)}\left(\frac{x - x_{j-1}}{h}\right) h^{4+q-\alpha} \\ & + O(h^{5+p-\alpha} \| v^{(5+p)} \|_{\infty,0}), \quad \alpha = 0, 1, 2, \end{aligned} \tag{11.42}$$

因为 $B^{(2)}(x)$ 是 $\mathscr{I}$ 上的三阶 Legendre 多项式的倍数,所以

$$E_1^{(2)}(a_l) = 0, \quad l = 1, 2, 3, \tag{11.43}$$

从而由 (11.42) 和 (11.43) 得到

$$\begin{aligned} & L(U - A_h U)(a_{jl}, t) \\ & = -h^4 \frac{\partial^6 U}{\partial x^6}(x_{j-\frac{1}{2}}, t) E_2^{(2)}(a_l) - h^5 \frac{\partial^7 U}{\partial x^7}(x_{j-\frac{1}{2}}, t) E_3^{(2)}(q_l) \\ & \quad + h^5 \frac{\partial^6 U}{\partial x^5 \partial t}(x_{j-\frac{1}{2}}, t) E_1(a_l) + O(h^6) \\ & = -h^4 \frac{\partial^6 U}{\partial x^6}(x_{j-\frac{1}{2}}, t) E_2^{(2)}(a_l) \\ & \quad + h^5 \frac{\partial^7 U}{\partial x^7}(x_{j-\frac{1}{2}}, t)(E_1(a_l) - E_3^{(2)}(a_l)) + O(h^6). \end{aligned} \tag{11.44}$$

下面设法把 $A_h U$ 修正为 $\bar{U}$, 并且使得 $L(U - \bar{U}) = O(h^6)$. 我们先定义 $D_0(x, t) \in M_1(h, 4)$, 它满足

$$\begin{cases} h^2 \dfrac{\partial^2 D_0}{\partial x^2}(a_{jl}, t) = \dfrac{\partial^6 U}{\partial x^6}(x_{j-\frac{1}{2}}, t) E_2^{(2)}(a_l), \\ \qquad 1 \leqslant j \leqslant J, \ l = 1, 2, 3, \\ D_0(x_j, t) = \dfrac{\partial}{\partial x} D_0(x_j, t) = 0, \qquad 0 \leqslant j \leqslant J. \end{cases} \tag{11.45}$$

当 $x\in \mathscr{I}_j$ 时，由上式得到

$$D_0(x,t)=-\frac{1}{6!\times 8h^4}(x-x_{j-1})^2(x-x_j)^2\frac{\partial^6 U}{\partial x^6}(x_{j-\frac{1}{2}},t),$$

因此

$$D_0(x_j,t)=0,\ D_0=O(|||U|||_{\infty,6}),$$

$$\frac{\partial D_0}{\partial t}=O(|||U|||_{\infty,8}). \tag{11.46}$$

令 $\bar{U}_1=A_hU+h^6D_0$，则由 (11.44)—(11.46) 得到

$$L(U-\bar{U}_1)(a_{jl},t)=h^5\frac{\partial^7 U}{\partial x^7}(x_{j-\frac{1}{2}},t)(E_1(a_l)$$

$$-E_3^{(2)}(a_l))+O(h^6). \tag{11.47}$$

下面再设法消去上式中的 $O(h^5)$ 的项．为此令

$$v(y)=\begin{cases}0, & \text{当 } y\leqslant 0 \text{ 时},\\ 3y^2-2y^3, & \text{当 } 0\leqslant y\leqslant 1 \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } y>1 \text{ 时},\end{cases}$$

和

$$F_j(x,t)=Q\frac{\partial^7 U}{\partial x^7}(x_{j-\frac{1}{2}},t)v\left(\frac{x-x_{j-1}}{h}\right),\qquad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

$$Q=(v^{(2)}(a_l))^{-1}(E_3^{(2)}(a_l)-E_1(a_l)),\qquad l=1,3.$$

又选取

$$D_1(x,t)=\sum_{j=1}^{J}(F_j(x,t)-xF_j(1,t))$$

$$=Q\sum_{j=1}^{J}\frac{\partial^7 U}{\partial x^7}(x_{j-\frac{1}{2}},t)\left(v\left(\frac{x-x_{j-1}}{h}\right)-x\right).$$

显然有

$$D_1\in M_1(h,4),\ D_1(0,t)=D_1(1,t)=0,$$

$$D_1=O(h^{-1}|||U|||_{\infty,7}),\ \frac{\partial D_1}{\partial t}=O(h^{-1}|||U|||_{\infty,9}),$$

并由 D_1 和 F_j 的定义得到

$$h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}D_1(a_{jl},t)=-\frac{\partial^7 U}{\partial x^7}(x_{j-\frac{1}{2}},t)(E_1(a_l)-E_3^{(2)}(a_l)).$$

令 $\bar{U} = A_h U + h^6 D_0 + h^7 D_1$，则由 (11.47) 得到

$$L(U - \bar{U})(a_{jl}, t) = O(h^6). \tag{11.48}$$

其次考虑 $\bar{U}$ 在 t 方向的插值. 设 G_τ 是由下式决定的插值算子

$$\begin{cases} G_\tau \omega(t) = \omega(t), & t = t_{k-1}, t_{k-\frac{1}{2}}, t_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant N, \\ G_\tau \omega(t) \in P_2(\bar{\delta}_k), & 1 \leqslant k \leqslant N, \end{cases} \tag{11.49}$$

若记

$$\bar{E}_q(s) = \frac{1}{(q+2)!} s\left(s - \frac{1}{2}\right)^q (s-1), \quad q = 1, 2,$$

则由插值理论,当 $t \in \delta_k$ 时,

$$\begin{aligned}(\bar{U} - G_\tau \bar{U})(x, t) &= \tau^3 \frac{\partial^3 \bar{U}}{\partial t^3}(x, t_{k-\frac{1}{2}}) \bar{E}_1\left(\frac{t - t_{k-1}}{\tau}\right) \\ &\quad + \tau^4 \frac{\partial^4 \bar{U}}{\partial t^4}(x, t_{k-\frac{1}{2}}) \bar{E}_2\left(\frac{t - t_{k-1}}{\tau}\right) \\ &\quad + O\left(\tau^5 \max\left|\frac{\partial^5 \bar{U}}{\partial t^5}\right|\right).\end{aligned} \tag{11.50}$$

因为 $\bar{E}_1^{(1)}(b_m) = 0$, $m = 1, 2$, 所以由上式得到

$$\begin{aligned}L(\bar{U} - G_\tau \bar{U})(a_{jl}, b_{km}) &= -(I - G_\tau) \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2}(a_{jl}, b_{km}) \\ &\quad + \tau^3 \frac{\partial^4 \bar{U}}{\partial t^4}(a_{jl}, t_{k-\frac{1}{2}}) \bar{E}_2^{(1)}(b_m) + O\left(\tau^4 \max\left|\frac{\partial^5 \bar{U}}{\partial t^5}\right|\right) \\ &= \tau^3 \left\{-\frac{\partial^5 \bar{U}}{\partial x^2 \partial t^3}(a_{jl}, t_{k-\frac{1}{2}}) \bar{E}_1(b_m)\right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^4 \bar{U}}{\partial t^4}(a_{jl}, t_{k-\frac{1}{2}}) \bar{E}_2^{(1)}(b_m)\right\} + O(\tau^4).\end{aligned} \tag{11.51}$$

现在设法消去上式中的 $O(\tau^3)$ 项,令

$$\bar{F}(s) = s(s-1), \qquad 0 \leqslant s \leqslant 1,$$

$$\begin{aligned}D_2(x, t) &= \left(\bar{Q}_1 \frac{\partial^5 \bar{U}}{\partial x^2 \partial t^3}(x, t_{k-\frac{1}{2}}) + \bar{Q}_2 \frac{\partial^4 \bar{U}}{\partial t^4}(x, t_{k-\frac{1}{2}})\right) \\ &\quad \times \bar{F}\left(\frac{t - t_{k-1}}{\tau}\right), \qquad \text{当 } t \in \bar{\delta}_k,\end{aligned} \tag{11.52}$$

其中

$$\bar{Q}_1 = \frac{-\bar{E}_1(b_m)}{\bar{F}^{(1)}(b_m)}, \quad \bar{Q}_2 = \frac{\bar{E}_2^{(1)}(b_m)}{\bar{F}^{(1)}(b_m)}, \qquad m = 1, 2.$$

显然，$D_2(x, t_k) = 0$，并且

$$\tau \frac{\partial D_2}{\partial t}(a_{jl}, b_{km}) = -\frac{\partial^5 \bar{U}}{\partial x^2 \partial t^3}(a_{jl}, t_{k-\frac{1}{2}})\bar{E}_1(b_m) + \frac{\partial^4 \bar{U}}{\partial t^4}(a_{jl}, t_{k-\frac{1}{2}})\bar{E}_2^{(1)}(b_m). \tag{11.53}$$

由 (11.52) 和 $\bar{U}(x, t)$ 的定义又有

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2} D_2(a_{jl}, t)\right| = O(\|U\|_{\infty,10} + h^2). \tag{11.54}$$

令 $\bar{\bar{U}} = G_\tau \bar{U} + \tau^4 D_2$，则由 (11.48)，(11.51)，(11.53) 和 (11.54) 得到

$$L(U - \bar{\bar{U}})(a_{jl}, b_{km}) = f(a_{jl}, b_{km}),$$

其中 $|f(a_{jl}, b_{km})| = O(h^6 + \tau^4)$。记 $\tilde{u} = u - \bar{\bar{U}}$。由于

$$L(U - u)(a_{jl}, b_{km}) = 0,$$

所以

$$L\tilde{u}(a_{jl}, b_{km}) = f(a_{jl}, b_{km}). \tag{11.55}$$

定义下列内积与范数

$$(v_1, v_2)_\omega = h \sum_{j=1}^{J} \sum_{l=1}^{3} \omega_l v_1(a_{jl}) v_2(a_{jl}),$$

$$\|v\|_\omega^2 = (v, v)_\omega$$

Douglas, Dupont (1972) 指出，若

$$v(x) \in M_1(h, 4), \quad v(0) = v(1) = 0,$$

则存在正常数 c_1 和 c_2，使得

$$\begin{cases} \|v\|_\omega^2 \leqslant c_1 \|v\|_{L^2(\mathscr{I})}^2, \\ \left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^2(\mathscr{I})}^2 \leqslant -\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, v\right)_\omega \leqslant 2\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^2(\mathscr{I})}^2, \\ \frac{1}{4}\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^2(\mathscr{I})}^2 \leqslant \left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^2(\mathscr{I})}^2 + \|v\|_\omega^2 \leqslant c_2 \left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^2(\mathscr{I})}^2. \end{cases} \tag{11.56}$$

又若 $v(x, t) \in M_1(h, 4)$，$v(0, t) = v(1, t) = 0$，则

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 v(t)}{\partial x^2}, v(t)\right)_\omega = 2\left(\frac{\partial^2 v(t)}{\partial x^2}, \frac{\partial v(t)}{\partial t}\right)_\omega.$$

因为 $\tilde{u}(x,t) \in M_1(h,4) \times M_0(\tau, 2), \tilde{u}(0, t) = \tilde{u}(1, t) = 0$,
所以

$$\left(f(b_{km}), \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(b_{km})\right)_\omega = \left(\frac{\partial \tilde{u}(b_{km})}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tilde{u}(b_{km})}{\partial x^2}, \frac{\partial \tilde{u}(b_{km})}{\partial t}\right)_\omega$$

$$= \left\|\frac{\partial \tilde{u}(b_{km})}{\partial t}\right\|_\omega^2 - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}(t)}{\partial x^2}, \tilde{u}(t)\right)_\omega\Big|_{t=b_{km}},$$

并由此得到

$$\left\|\frac{\partial \tilde{u}(b_{km})}{\partial t}\right\|_\omega^2 - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}(t)}{\partial x^2}, \tilde{u}(t)\right)_\omega\Big|_{t=b_{km}} \leqslant \|f(b_{km})\|_\omega^2.$$

由于 $\left\|\frac{\partial \tilde{u}(t)}{\partial t}\right\|_\omega^2 \in P_3(\delta_k)$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}(t)}{\partial x^2}, \tilde{u}(t)\right)_\omega \in P_3(\delta_k)$,因此Gauss积分公式对它们是精确成立的,从而

$$\tau\sum_{m=1}^{2}\varpi_m\left\{\left\|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(b_{km})\right\|_\omega^2 - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(t), \tilde{u}(t)\right)_\omega\Big|_{t=b_{km}}\right\}$$

$$= \int_{\delta_k}\left\|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(\xi)\right\|_\omega^2 d\xi - \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}(t_k)}{\partial x^2}, \tilde{u}(t_k)\right)_\omega$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}(t_{k-1})}{\partial x^2}, \tilde{u}(t_{k-1})\right)_\omega.$$

把上式对 k 求和后得到

$$\int_0^T\left\|\frac{\partial \tilde{u}(\xi)}{\partial t}\right\|_\omega^2 d\xi + \max_{1\leqslant k\leqslant N}\left(-\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}(t_k)}{\partial x^2}, \tilde{u}(t_k)\right)_\omega\right)$$

$$\leqslant \tau\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{2}\varpi_m\|f(b_{km})\|_\omega^2 - \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}(0)}{\partial x^2}, \tilde{u}(0)\right)_\omega$$

$$\leqslant \rho - \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}(0)}{\partial x^2}, \tilde{u}(0)\right)_\omega, \tag{11.57}$$

其中 $\rho = O(h^6 + \tau^4)$. 所以由 (11.56)、(11.57) 得到

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left\|\frac{\partial \tilde{u}(t_k)}{\partial x}\right\|_{L^2(I)}^2 \leqslant c_4\left(\rho + \left\|\frac{\partial \tilde{u}(0)}{\partial x}\right\|_{L^2(I)}^2\right).$$

因为

$$\tilde{u}(x, 0) = u(x, 0) - \bar{U}(x, 0),$$

因此，为了达到最大精度，还必须选择 $u(x, 0)$，使得

$$\left\| \frac{\partial \tilde{u}(0)}{\partial x} \right\|_{L^2(\mathscr{I})} = O(h^6).$$

我们有

$$\bar{U}(x, 0) = G_\tau \bar{U}(x, 0) + \tau^4 D_2(x, 0) = \bar{U}(x, 0)$$
$$= A_h U_0(x) + h^6 D_0(x, 0) + h^7 D_1(x, 0)$$

和

$$\frac{\partial}{\partial x} D_1(x, t) = O(h^{-1} |||U|||_{\infty,7}),$$

故若选取

$$u(x, 0) = A_h U_0(x) + h^6 D_0(x, 0),$$

则可满足上述条件，并由此推得

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant N} \|\tilde{u}(t_k)\|^2_{L^\infty(\mathscr{I})} \leqslant c_5 \rho.$$

又由于 $D_0(x_j, t) = 0$，$A_h U(x_j, t) = U(x_j, t)$，从而

$$|U(x_j, t_k) - \bar{U}(x_j, t_k)| = h^7 |D_1(x_j, t_k)| \leqslant c_6 h^6 |||U|||_{\infty,7},$$

以及

$$\max_{\substack{0 \leqslant k \leqslant N \\ 0 \leqslant j \leqslant J}} |u(x_j, t_k) - U(x_j, t_k)| \leqslant c_7 \rho^{\frac{1}{2}} = O(h^6 + \tau^4).$$

还有许多其它类型的配置法，可见 Gottlieb, Orszag (1977) 的文章. 配置法可应用于许多不同类型的问题，例如 Houstis (1977) 就把它应用于双曲型方程.

11.7 边界层型奇异摄动问题，Ильин 方法

Lindstedt (1882) 和 Poincaré (1886) 从行星轨道摄动问题出发，最早研究了奇异摄动问题. 在 § 10.6 中，我们曾介绍了一类奇异摄动问题，并用Петров-Галеркин 方法计算它. 对于初、边值问题来说，当系数 ν 很小时，解的性质，特别在边界附近就更加复杂。如果采用通常的差分格式，就很难得到理想的近似解.

为了把问题讲得清楚些，我们先回顾一下最简单的常微分方

程边值问题.

$$\begin{cases} \nu \dfrac{d^2U^{(\nu)}}{dx^2} + \dfrac{dU^{(\nu)}}{dx} = 0, \qquad 0 < x < 1, \\ U^{(\nu)}(0) = \alpha,\ U^{(\nu)}(1) = \beta. \end{cases} \tag{11.58}$$

它的解为

$$U^{(\nu)} = \beta + \frac{(\alpha - \beta)(e^{\frac{1-x}{\nu}} - 1)}{e^{\frac{1}{\nu}} - 1}. \tag{11.59}$$

当 $\nu \to 0$ 时，(11.58) 退化为一阶常微分方程. 它的解 $U^{(0)}(x)$ 是常数，若要求 $U^{(0)}(1) = \beta$，则 $U^{(0)}(x) \equiv \beta$. 不难看出，在区间 $\{x \mid 0 < x < 1\}$ 的任一闭子区间上，当 $\nu \to 0$ 时，$U^{(\nu)}(x)$ 一致收敛到 β，但在 $x = 0$ 附近，则并非如此. 按照 Prandtl 的大 Reynolds 数绕流理论(见 Prandtl (1905) 和 Meyer (1971) 等)，称 $x = 0$ 附近的区域为边界层，而 (11.58) 是属于边界层型的奇异摄动问题.

下面记 $x_j = jh$, $Jh = 1$, $\mathscr{I}_h = \{x \mid x = x_j, 1 \leqslant j \leqslant J - 1\}$. 通常解 (11.58) 的中心差分格式是

$$\begin{cases} \nu u_{x\bar{x}}^{(\nu)}(x) + u_{\hat{x}}^{(\nu)}(x) = 0, \qquad x \in \mathscr{I}_h, \\ u^{(\nu)}(0) = \alpha,\ u^{(\nu)}(1) = \beta. \end{cases} \tag{11.60}$$

特别当 $\alpha = 0, \beta = 1, \nu = \dfrac{h}{2}$ 时，它的解是

$$u^{(\nu)}(x_j) = \frac{1 - \left(\dfrac{2\nu - h}{2\nu + h}\right)^j}{1 - \left(\dfrac{2\nu - h}{2\nu + h}\right)^J},$$

而相应的 (11.58) 的解为

$$U^{(\nu)}(x) = \frac{1 - e^{\frac{-x}{\nu}}}{1 - e^{\frac{-1}{\nu}}}.$$

记 $\tilde{u}^{(\nu)}(x_j) = u^{(\nu)}(x_j) - U^{(\nu)}(x_j)$，于是可以看出，当 $h > 2\nu$ 时，$\tilde{u}^{(\nu)}(x_j)$ 发生振荡. 而且对固定的 h 来说，ν 越小，振荡也越严重.

另一方面，即使 $h < 2\nu$, (11.60) 仍有可能给出不一致收敛的近似解。例如当 $h = \nu \to 0$ 时，

$$\tilde{u}^{(\nu)}(h) = \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{h}}\right)^{-1} - (1 - e^{-1})\,(1 - e^{\frac{-1}{h}})^{-1}$$

$$\to e^{-1} - \frac{1}{3} \neq 0.$$

为了提高计算精度，Pearson (1968) 采用了局部加密网格的方法，但这会增大工作量，并且在实际计算中会出现不稳定现象．Barret (1971) 等则采用非中心差分格式，例

$$\begin{cases} \nu u_{x\bar{x}}^{(\nu)}(x) + u_x^{(\nu)}(x) = 0, & x \in \mathscr{I}_h, \\ u^{(\nu)}(0) = \alpha, \ u^{(\nu)}(1) = \beta. \end{cases}$$

当 $\alpha = 0$, $\beta = 1$ 时，它的解是

$$u^{(\nu)}(x_j) = \frac{1 - \left(\frac{\nu}{\nu + h}\right)^j}{1 - \left(\frac{\nu}{\nu + h}\right)^J}.$$

这种方法虽然克服了振荡现象，但是精度较差，而且它的解仍然对 $\nu \in (0, 1)$ 不一致收敛到 (11.58) 的解。

根据上面的分析，我们发现主要问题在于解在边界层的性态。事实上，由 (11.59)，当 $x \in (0, \delta)$, $\delta > 0$ 时，$\left|\frac{\partial^m U^{(\nu)}}{\partial x^m}\right| = O(\nu^{-m})$，所以当 ν 很小时，$U^{(\nu)}(x)$ 在 $x = 0$ 附近的变化十分剧烈，而通常的差分格式则未能反映这一特性，所以不可能给出理想的近似解。

为了使差分格式的解保持边界层的主要特性，并对 ν 一致收敛到相应的微分方程的解，Ильин (1969) 提出了拟合因子方法．为简便计，考虑下列模型问题

$$\begin{cases} \nu \dfrac{d^2U^{(\nu)}(x)}{dx^2} + a(x)U^{(\nu)}(x) = f(x), & 0 < x < 1, \\ U^{(\nu)}(0) = \alpha, \ U^{(\nu)}(1) = \beta, \end{cases} \tag{11.61}$$

其中 $a(x) \geqslant a_0 > 0$. 由 Вищик, Люстерник (1957) 的渐近分析方法得到，(11.61) 的解在 $x = 0$ 附近发生边界层现象，边界层函

数是

$$V^{(\nu)}(x) = \exp\left(-\frac{a(x)x}{\nu}\right).$$

Ильин 格式即为

$$\begin{cases} r(x)u^{(\nu)}_{\bar{x}x}(x) + a(x)u^{(\nu)}_{\hat{x}}(x) = f(x), & x \in \mathscr{I}_h, \\ u^{(\nu)}(0) = \alpha, & u^{(\nu)}(1) = \beta, \end{cases} \tag{11.62}$$

其中 $r(x)$ 是拟合因子，它使得对于常系数齐次微分方程($a(x) \equiv \bar{a}$, $f(x) \equiv 0$) 的指数形式的精确解 $e^{-\frac{\bar{a}x}{\nu}}$，也是相应的差分格式($r(x) \equiv \bar{r}$) 的解，即

$$\bar{r}v^{(\nu)}_{\bar{x}x}(x) + \bar{a}v^{(\nu)}_{\hat{x}} = 0,$$

所以 $\bar{r} = \frac{\bar{a}h}{2}\operatorname{cth}\frac{\bar{a}h}{2\nu}$, 且相应地有 $r(x) = \frac{a(x)h}{2}\operatorname{cth}\frac{a(x)h}{2\nu}$.

不难验证 $|r(x) - \nu| \leqslant \frac{c_1h^2}{\nu}$, 其中 c_1 是与 h, ν 无关的正常数. 显然，对固定的 ν，(11.62) 对(11.61)的逼近是相容的，逼近误差是 $O\left(\frac{h^2}{\nu}\right)$. 因为 (11.62) 是正型格式，所以又有

$$\|U^{(\nu)} - u^{(\nu)}\|_\infty = O\left(\frac{h^2}{\nu}\right).$$

Ильин 还证明，存在与 h, ν 无关的正常数 M_1, 使得

$$\|U^{(\nu)} - u^{(\nu)}\|_\infty \leqslant M_1h,$$

所以格式(11.62)是对 ν 一致收敛的. 此外，对固定的 h, 当 $\nu \to 0$ 时，$r(x) \to \frac{a(x)h}{2}$，所以 (11.62) 趋向于一个与 (11.62) 相对应的退化问题的相容逼近格式.

Kellogg, Tsan (1978) 和 Miller (1979) 研究了更一般的问题，并证明了相应的格式的一致收敛性. Kreiss (1976) 和 Емельянов (1978) 也研究了常微分方程和方程组的奇异摄动问题. Doolan, Miller, Schilders (1980)的著作还总结了这方面的工作.

近年来，Титов (1980), Duffy (1980) 等把 Ильин 方法推

广应用到抛物型方程. 为简便计,考虑下列问题

$$\begin{cases} L^{(\nu)}U^{(\nu)}(x,t) = \dfrac{\partial U^{(\nu)}}{\partial t} - \nu\dfrac{\partial^2 U^{(\nu)}}{\partial x^2} - a(x,t)\dfrac{\partial U^{(\nu)}}{\partial x} \\ \quad + b(x,t)U^{(\nu)} = f(x,t), \qquad 0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant T, \\ U^{(\nu)}(0,t) = g_0(t),\ U^{(\nu)}(1,t) = g_1(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ U^{(\nu)}(x,0) = U_0(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{11.63}$$

其中 $a(x,t) \geqslant a_0 > 0$, $b(x,t) \geqslant b_0 > 0$. 相应的退化问题是

$$\begin{cases} L^{(0)}W(x,t) = \dfrac{\partial W}{\partial t} - a(x,t)\dfrac{\partial W}{\partial x} + b(x,t)W = f(x,t), \\ \qquad\qquad 0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant T, \\ W(1,t) = g_1(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ W(x,0) = U_0(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{11.64}$$

(11.63) 的解的渐近表达式是

$$U^{(\nu)}_{(x,t)} = W_{(x,t)} + V^{(\nu)}_{(x,t)}G^{(\nu)}_{(x,t)}, \tag{11.65}$$

其中 $W(x,t)$ 是 (11.64) 的解,

$$V^{(\nu)}(x,t) = (g_0(t) - W(0,t))e^{\frac{-a(0,t)x}{\nu}},$$

$$|G^{(\nu)}(x,t)| \leqslant M_3\nu,$$

M_3 是与 ν 无关的正常数.

设 x_j 和 $\mathscr{I}_h$ 如上所述, $t_k = k\tau$, $N\tau = T$, $v^k(x) = v(x,t_k)$, $r^k(x) = \dfrac{a^k(x)h}{2}\operatorname{cth}\dfrac{a^k(x)h}{2\nu}$. Duffy 格式是

$$\begin{cases} L_h^{(\nu)}(u^{(\nu)}(x))^k = (u_{\bar t}^{(\nu)}(x))^k - r^k(x)(u_{\bar x x}^{(\nu)}(x))^k \\ \qquad - a^k(x)(u_{\hat x}^{(\nu)}(x))^k + b^k(x)(u^{(\nu)}(x))^k = f^k(x), \\ \qquad\qquad x \in \mathscr{I}_h,\ k \geqslant 1, \\ (u^{(\nu)}(0))^k = g_0^k,\ (u^{(\nu)}(1))^k = g_1^k, \qquad k \geqslant 0, \\ (u^{(\nu)}(x))^0 = U_0(x), \qquad x \in \mathscr{I}_h, \end{cases} \tag{11.66}$$

记 $|||v|||_\infty = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant N}\|v^k\|_\infty$, $|||g|||_{\infty,\Gamma_h} = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant N}(|g_0^k|, |g_1^k|)$. 于是由定理 11.2 得到

$$|||u^{(\nu)}|||_\infty \leqslant \max\left(\|U_0\|_\infty, \frac{|||f|||_\infty}{b_0}, |||g|||_{\infty,\Gamma_h}\right). \qquad (11.67)$$

定理 11.4 对固定的 $\nu > 0$,

$$|||u^{(\nu)} - U^{(\nu)}||| \leqslant M_3\left(\frac{h^2}{\nu} + \tau\right),$$

其中 M_3 是与 h, τ 和 ν 无关的正常数。

证明 我们有

$$(u^{(\nu)}(x))^0 = (U^{(\nu)}(x))^0, \ (u^{(\nu)}(0))^k = (U^{(\nu)}(0))^k,$$
$$(u^{(\nu)}(1))^k = (U^{(\nu)}(1))^k$$

和

$$L_h^{(\nu)}((u^{(\nu)}(x))^k - (U^{(\nu)}(x))^k)$$
$$= (L^{(\nu)} - L_h^{(\nu)})[U^{(\nu)}(x)]^k = R^k(x),$$

其中

$$R^k(x) = \left(\frac{\partial U^{(\nu)}(x)}{\partial t}\right)^k - (U_{\bar{t}}^{(\nu)}(x))^k - \nu\left(\left(\frac{\partial^2 U^{(\nu)}(x)}{\partial x^2}\right)^k\right.$$
$$\left.- (U_{\bar{x}x}^{(\nu)}(x))^k\right) - a^k(x)\left(\left(\frac{\partial U^{(\nu)}(x)}{\partial x}\right)^k - (U_{\hat{x}}^{(\nu)}(x))^k\right)$$
$$+ (r^k(x) - \nu)(U_{\bar{x}x}^{(\nu)}(x))^k.$$

由于 $|r^k(x) - \nu| \leqslant \frac{c_2 h^2}{\nu}$, 所以

$$|R^k(x)| \leqslant M_4\left(|||\nu - r|||_\infty \left|\left|\left|\frac{\partial^2 U^{(\nu)}}{\partial x^2}\right|\right|\right|_\infty\right.$$
$$+ h^2\left|\left|\left|\frac{\partial^3 U^{(\nu)}}{\partial x^3}\right|\right|\right|_\infty + \nu h^2\left|\left|\left|\frac{\partial^4 U^{(\nu)}}{\partial x^4}\right|\right|\right|_\infty$$
$$\left.+ \tau\left|\left|\left|\frac{\partial^2 U^{(\nu)}}{\partial t^2}\right|\right|\right|_\infty\right) \leqslant M_5\left(\frac{h^2}{\nu^3} + \tau\right),$$

故可仿 (11.67) 推出定理的结论.

引理 11.4 如果 $|f^k(x)| \leqslant c_3 + c_4 e^{\frac{-a_0 x}{\nu}}$, 并且

$$\begin{cases} L_h^{(\nu)} w^k(x) = f^k(x), & x \in \mathscr{I}_h, \ k \geqslant 1, \\ w^k(0) = w^k(1) = 0, & k \geqslant 0, \\ w^0(x) = 0, & x \in \mathscr{I}_h, \end{cases}$$

则

$$|||w|||_\infty \leqslant \frac{c_3}{b_0} + c_4 \max(h, \nu) e^{\frac{-a_0 x}{\nu}}.$$

证明 记 $\xi(x) = e^{\frac{-a_0 x}{\nu}}$，$\delta = e^{\frac{a_0 h}{\nu}}$，则

$$L_h^{(\nu)}\xi(x) = -\frac{(\delta-1)^2}{2h\delta} a^k(x)\xi(x)\operatorname{cth}\frac{a^k(x)h}{2\nu}$$

$$-\frac{(1-\delta^2)}{2h\delta} a^k(x)\xi(x) + b^k(x)\xi(x)$$

$$\geqslant \frac{(\delta-1)^2}{2h\delta} a^k(x)\xi(x) d^k(x),$$

其中 $d^k(x) = \operatorname{cth}\frac{a_0 h}{2\nu} - \operatorname{cth}\frac{a^k(x)}{2\nu}$.

若 $h \leqslant \nu$，则存在正常数 c_5，c_6，使得 $c_5 y \leqslant \operatorname{sh} y \leqslant c_6 y$，因此

$$d^k(x) = \operatorname{sh}\left(\frac{(a^k(x) - a_0)h}{2\nu}\right)\operatorname{sh}^{-1}\frac{a_0 h}{2\nu}\operatorname{sh}^{-1}\frac{a^k(x)h}{2\nu} \geqslant \frac{c_7 \nu}{h}.$$

又因为 $\delta^{-1}(\delta-1)^2 = 4\operatorname{sh}^2\frac{a_0 h}{2\nu} \geqslant c_8\left(\frac{h}{\nu}\right)^2$，所以

$$L_h^{(\nu)}\xi(x) \geqslant \frac{c_9}{\nu}\xi(x).$$

如果 $h \geqslant \nu$，那么存在正常数 c_{10}，c_{11}，使得 $c_{10}e^y \leqslant \operatorname{sh} y \leqslant c_{11}e^y$，因此

$$d^k(x) \geqslant c_{12} e^{\frac{(a^k(x) - a_0)h}{2\nu}} e^{\frac{-a_0 h}{2\nu}} e^{\frac{-a^k(x)h}{2\nu}} = c_{12}\delta^{-1}.$$

又因为 $\delta - 1 \geqslant c_{13}\delta$，所以 $L_h^{(\nu)}\xi(x) \geqslant \frac{c_{14}}{h}\xi(x)$.

现在作强函数 $v^k(x)$，

$$v^k(x) = \frac{c_3}{\beta} + \frac{c_4}{c_{15}}\max(h, \nu)\xi(x),$$

$$c_{15} = \min(c_9, c_{14}) > 0,$$

则 $v^k(0) \geqslant v^k(1) \geqslant 0$，$v^0(x) \geqslant 0$，并且

$$L_h^{(\nu)} v^k(x) = \frac{c_3 b^k(x)}{\beta} + \frac{c_4}{c_{15}}\max(h, \nu) L_h^{(\nu)}\xi(x) \geqslant c_3 + c_4 e^{\frac{-a_0 x}{\nu}},$$

从而由引理 11.3 得到所证的结论.

定理 11.5 对固定的 $\nu>0$, 存在与 h,τ,ν 无关的正常数 c_{16}, 使得

$$|||u^{(\nu)}-U^{(\nu)}|||_\infty\leqslant M_6(h+\tau+\nu).$$

证明 由 (11.65) 得到

$$L_h^{(\nu)}[(u^{(\nu)}(x))^k-W^k(x)-(V^{(\nu)}(x))^k]\leqslant M_7(h+\tau+e^{\frac{-a_0x}{\nu}}),$$

故由引理 11.4,

$$\begin{aligned}|||u^{(\nu)}-W-V^{(\nu)}|||_\infty&\leqslant M_8(h+\tau+\nu e^{\frac{-a_0x}{\nu}})\\&\leqslant M_9(h+\tau+\nu),\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}|||u^{(\nu)}-U^{(\nu)}|||_\infty&\leqslant|||u^{(\nu)}-W-V^{(\nu)}|||_\infty+|||G^{(\nu)}|||_\infty\\&\leqslant M_{10}(h+\tau+\nu).\end{aligned}$$

定理 11.6 差分格式 (11.66) 对 ν 是一致收敛的,并且

$$|||u^{(\nu)}-U^{(\nu)}|||_\infty\leqslant M_{11}(h^{\frac{1}{2}}+\tau).$$

证明 若 $h\leqslant\nu^2$, 则由定理 11.4 得到

$$|||u^{(\nu)}-U^{(\nu)}|||_\infty\leqslant M_{12}\left(\frac{h^2}{\nu^3}+\tau\right)\leqslant M_{13}(h^{\frac{1}{2}}+\tau).$$

若 $h\geqslant\nu^2$, 则由定理 11.5 得到

$$|||u^{(\nu)}-U^{(\nu)}|||_\infty\leqslant M_{14}(h+\tau+\nu)\leqslant M_{15}(h^{\frac{1}{2}}+\tau).$$

O'Riordan (1984) 等人还把上述思想与 Петров-Галеркин 方法结合起来, 即用指数有限元方法来解常微分方程的两点边值问题. 该方法可推广应用于抛物型方程的初、边值问题.

11.8 Stefan 问题

许多实际问题都归结为抛物型方程的不定边界问题,或 Stefan 问题. 为简单计, 本节仅以一个与一维熔解问题有关的简单模型来说明这类问题的数值方法.

用 $U^{(1)}$ 和 $U^{(2)}$ 分别表示液体区和固体区的解, $X=V(t)$ 是双相问题的交界面, $\rho^{(l)}$, $\nu^{(l)}$ 和 s 是正常数, $g_l(t)$ 和 $U_0(x)$ 是已知

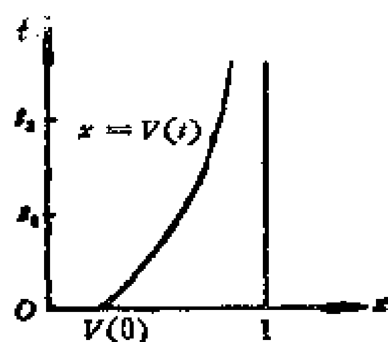


图 11.2

函数，那末它们满足下列方程组

$$
\begin{cases}
\rho^{(1)}\dfrac{\partial U^{(1)}}{\partial t}-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\nu^{(1)}\dfrac{\partial U^{(1)}}{\partial x}\right)=0, \\
\qquad 0<x<V(t),\ 0<t\leqslant T, \\
\rho^{(2)}\dfrac{\partial U^{(2)}}{\partial t}-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\nu^{(2)}\dfrac{\partial U^{(2)}}{\partial x}\right)=0, \\
\qquad V(t)<x<1,\ 0<t\leqslant T, \\
s\dfrac{dV}{dt}=\nu^{(2)}\dfrac{\partial U^{(2)}}{\partial x}-\nu^{(1)}\dfrac{\partial U^{(1)}}{\partial x}, \\
\qquad x=V(t),\ 0\leqslant t\leqslant T, \\
U^{(1)}=U^{(2)}=0, \quad x=V(t),\ 0\leqslant t\leqslant T, \\
U^{(1)}(0,t)=g_0(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T, \\
U^{(2)}(1,t)=g_1(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T, \\
U^{(1)}(x,0)=U_0^{(1)}(x) \quad 0\leqslant x\leqslant V(0), \\
U^{(2)}(x,0)=U_0^{(2)}(x), \quad V(0)<x\leqslant 1.
\end{cases}
\tag{11.68}
$$

通常有两条途径计算这一个问题．第一种是直接从 (11.68) 出发，并拟合分界面，这种方法需要直接离散分界面条件，往往误差较大，也较难计算．另一种方法是引入函数 H, U 和 ν，其中当 $0\leqslant x\leqslant V(t)$ 时，$U=U^{(1)}$, $\nu=\nu^{(1)}$, $H=\rho^{(1)}U^{(1)}+s$，当 $V(t)<x<1$ 时，$U=U^{(2)}$, $\nu=\nu^{(2)}$, $H=\rho^{(2)}U^{(2)}$．当 $x=V(t)$ 时，$0\leqslant H\leqslant s$．于是可把 (11.68) 改写为下列 Enthalpy 方程

$$
\frac{\partial H}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial U}{\partial x}\right)=0. \tag{11.69}
$$

用 $\Psi(t_1, t_2)$ 表示在 $\{(x, t)/0 \leqslant x \leqslant 1,\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2\}$ 内 Lipschitz 连续，而在侧向边界上为零的函数的集合，把 (11.69) 式对 $\psi \in \Psi(t_1, t_2)$ 求内积即得到下列弱形式

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^1 H \frac{\partial \psi}{\partial t} dxdt + \int_{t_1}^{t_2}\int_0^1 \nu \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} dxdt + \int_0^1 H(x, t_2)\psi dx - \int_0^1 H(x, t_1)\psi dx = 0. \tag{11.70}$$

弱形式的优点是自动地吸取了分界面的跳跃条件.

令 $t_k = k\tau$, $\delta_k = \{(x, t)/0 < x < 1,\ t_k < t < t_{k+1}\}$. 用 $u^k(x)$, v^k 分别表示 $U(x, t)$ 和 $V(t)$ 在 t_k 时刻的近似值，假设 $u^k(x)$, v^k 已知,则需要计算 $u^{k+\frac{1}{2}}(x)$, $u^{k+1}(x)$, $v^{k+\frac{1}{2}}$ 和 v^{k+1}，并用过点 (v^k, t_k), $(v^{k-\frac{1}{2}}, t_{k+\frac{1}{2}})$ 和 (v^{k+1}, t_{k+1}) 的抛物线近似地表示分界面.

可以用不同的方法来离散 (11.60)，例如仿照 Bonnerot, Jamet (1979) 的方法,即用双二次等参数有限元方法. 具体地说，把 $[0, v^{k+\mu}]$ 分成 J_1 个小单元 $\{x/x_j^{k+\mu} \leqslant x \leqslant x_{j+1}^{k+\mu}\}$, $0 \leqslant j \leqslant J_1 - 1$, $\mu = 0, \frac{1}{2}, 1$. 又把 $[v^{k+\mu}, 1]$ 分成 J_2 个小单元 $\{x/x_j^{k+\mu} \leqslant x \leqslant x_{j+1}^{k+\mu}\}$, $J_1 \leqslant j \leqslant J_1 + J_2 - 1$, $\mu = 0, \frac{1}{2}, 1$, 如图 11.3. 记

$$x_{j+\frac{1}{2}}^{k+\mu} = \frac{1}{2}(x_j^{k+\mu} + x_{j+1}^{k+\mu}),$$

并用 $P_{j+l}^{k+\mu}$ 表示点 $(x_{j+l}^{k+\mu}, t_{k+\mu})$, 其中 $\mu, l = 0, \frac{1}{2}, 1$, 然后把这些点排列为

$$P_{\frac{1}{2}}^k,\ P_{\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}},\ P_{\frac{1}{2}}^{k+1},\ \cdots,\ P_j^{k+1}, P_{j+\frac{1}{2}}^k,\ P_{j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}},\ P_{j+\frac{1}{2}}^{k+1},\ \cdots.$$

为书写方便计，把这些点记为 Q_l, $1 \leqslant l \leqslant 6(J_1 + J_2) - 3$, 并令 $u_l = u(Q_l)$, $u^{(1)} = (u_1, u_2, \cdots, u_{6J_1-3})^*$, $u^{(2)} = (u_{6J_1+1}, \cdots, u_{6(J_1+J_2)-3})^*$.

由上述编号方法和分界面条件得到

$$u_{6J_1-2} = u_{6J_1-1} = u_{6J_1} = 0.$$

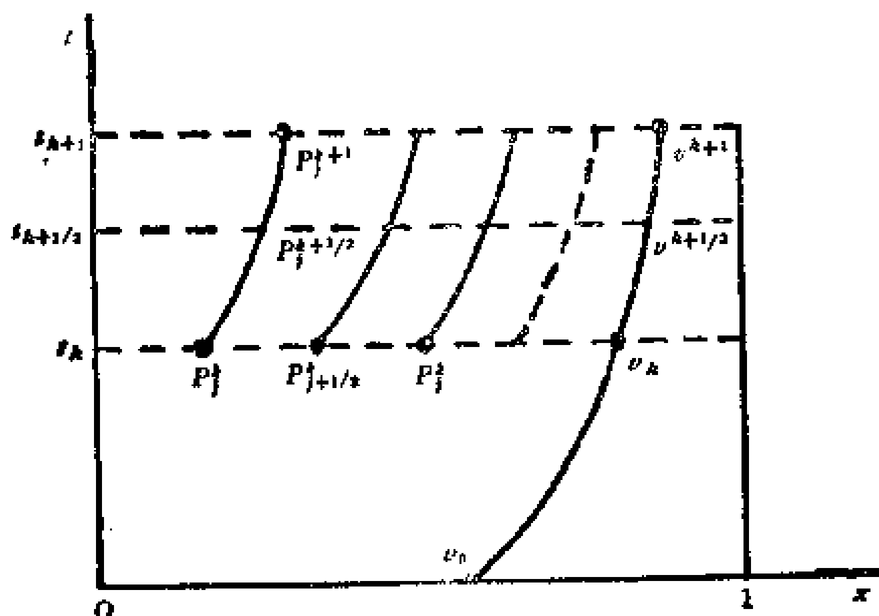


图 11.3

把具体的基函数代入 (11.70)，并采用 Simpson 公式进行数值积分，则有

$$\begin{cases} A_1 u^{(1)} = f^{(1)}, \\ A_2 u^{(2)} = f^{(2)}, \end{cases} \tag{11.71}$$

其中 A_l 是分块五对角线矩阵，$f^{(l)}$ 是向量.

为了得到 $P_{j_1}^{k+\frac{1}{2}}$，$P_{j_1}^{k+1}$ 的位置，则可取 $\phi(x)$ 为与它们相对应的基函数. 经过计算，并由 (11.70) 得到

$$\begin{cases} \left(\dfrac{2d_1}{v^{k+\frac{1}{2}}} - a_1\alpha\right) u_{6J_1-7} - \left(\dfrac{16d_1}{v^{k+\frac{1}{2}}} - 4b_1\alpha\right) u_{6J_1-4} \\ \qquad - \left(\dfrac{16d_2}{(1-v^{k+\frac{1}{2}})} + 4b_2\alpha\right) u_{6J_1+2} + \left(\dfrac{2d_2}{(1-v^{k+\frac{1}{2}})} + a_2\alpha\right) \\ \qquad \times u_{6J_1+5} + 6\alpha s = 0, \\ \left(\dfrac{2d_1}{v^{k+1}} - a_1\beta\right) u_{6J_1-6} - \left(\dfrac{16d_1}{v^{k+1}} - 4b_1\beta\right) u_{6J_1-3} \\ \qquad - \left(\dfrac{16d_2}{(1-v^{k+1})} + 4b_2\beta\right) u_{6J_1+3} + \left(\dfrac{2d_2}{(1-v^{k+1})} + a_2\beta\right) \\ \qquad \times u_{6J_1+6} + 6\beta s = 0, \end{cases} \tag{11.72}$$

其中

$$\alpha = v^{k+1} - v^k,\ \beta = v^k - 4v^{k+\frac{1}{2}} + 3v^{k+1},$$

$$d_l = v^{(l)}J_l,\ a_l = \frac{\rho^{(l)}(J_l - 1)}{J_l},$$

$$b_l = \frac{\rho^{(l)}\left(J_l - \frac{1}{2}\right)}{J_l}, \qquad l = 1, 2.$$

在具体计算时，先给出 $v^{k+\frac{1}{2}}$ 和 v^{k+1} 的试探值 $v_0^{k+\frac{1}{2}}$ 和 v_0^{k+1}. 假定第 l 次的迭代值 $v_l^{k+\frac{1}{2}}$ 和 v_l^{k+1} 已得到，则由(11.71)计算 $u_l^{(1)}$ 和 $u_l^{(2)}$，然后把 $u_{6J_1-8,l}, \cdots, u_{6J_1+6,l}$ 代入(11.72)，并由此得到 $v_{l+1}^{k+\frac{1}{2}}$ 和 v_{l+1}^{k+1}. 如果

$$\frac{|v_{l+1}^{k+\mu} - v_l^{k+\mu}|}{|v_{l+1}^{k+\mu}|} \leqslant \varepsilon, \quad \mu = \frac{1}{2}, 1,$$

其中 ε 是给定的误差界，则就把前面结果作为 $v^{k+\mu}$ 和 $u^{(1)}, u^{(2)}$，否则重分网格，并由 (11.71) 计算新的 $u_{l+1}^{(1)}$ 和 $u_{l+1}^{(2)}$.

关于二维双相问题的研究及其有关工作，可见 Каменомостская, Friedman (1968), Rubinstein (1971) 和 Chin Hsien Li (1983) 等人的著作。

§ 12 非线性抛物型方程

本节讨论非线性抛物型方程的差分方法. 如果非线性项对各变量都满足一致 Lipschitz 条件，那么可仿照线性方程的情况来研究稳定性和收敛性，例如可以利用正型条件和极值原理. 本节还介绍了半线性方程的极值原理，并应用它研究半线性反应扩散方程解的渐近行为与收敛性，也简述了拟线性反应扩散方程组的数值方法. 本节的第二部分以 Burgers 方程为例，研究拟线性方程的数值方法. 我们基于守恒律和传输律，构造了各种格式，严格估计了误差，并证明了原微分方程解的存在性. 本节的第三部分着重讨论粘性流体动力学的差分方法，例如涡度方程，Navier-Stokes 方程，低 Mach 数流动，可压缩流动，电磁流体和大气方程组的计

算等等.

12.1 一些简单的非线性方程

二阶非线性抛物型方程的一般形式是

$$F\left(x,\,t,\,U,\,\frac{\partial U}{\partial t},\,\frac{\partial U}{\partial x},\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)=f(x,\,t),$$

$$(x,\,t)\in D, \tag{12.1}$$

其中 D 是 $(x,\,t)$ 平面上的有界或无界区域. 记

$$F_l=\frac{\partial F(x,\,t,\,y_0,\,y_1,\,y_2,\,y_3)}{\partial y_l},\qquad 0\leqslant l\leqslant 3,$$

我们暂时假定当 $(x,\,t)\in D$ 时，F 是 y_l 的连续函数，$|F_l|$ 一致有界，并且存在正常数 a 和 ν_0，使得 $F_1\geqslant a$，$F_3\leqslant-\nu_0$，关于解满足这个条件的方程的差分方法，很早就开始研究了，例如 Douglas (1956b) 就研究了下列方程

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=G(x,\,t,\,U)\,\frac{\partial U}{\partial t}+d(x,\,t,\,U),$$

其中 $G\geqslant a>0$.

对于某些格式，可用正型条件来分析稳定性. 今后用 h 和 τ 分别表示 x 和 t 的步长，$\lambda=\frac{\tau}{h^2}$，$t_k=k\tau$，$u^k(x)=u(x,\,t_k)$. 计算 (12.1) 的初值问题的一种两层格式是

$$\begin{cases}F(x,\,t_k,\,u^k(x),\,u_t^k(x),\,u_{\hat{x}}^k(x),\,u_{x\bar{x}}^k(x))=f^k(x), & k\geqslant 0,\\ u^0(x)=U_0(x).\end{cases} \tag{12.2}$$

因为 $F_1\neq 0$，所以它是可解的.

假设 $f^k(x)$ 和 $u^k(x)$ 发生误差 $\tilde{f}^k(x)$ 和 $\tilde{u}^k(x)$，则有

$$\tilde{F}_0\tilde{u}^k(x)+\tilde{F}_1\tilde{u}_t^k(x)+\tilde{F}_2\tilde{u}_{\hat{x}}^k(x)+\tilde{F}_3\tilde{u}_{x\bar{x}}^k(x)=\tilde{f}^k(x),$$

其中“～”表示 F_l 取相应的中间值，它与 x 和 k 有关，但此处略去了这些足标. 上式又可改写为

$$\tilde{u}^{k+1}(x)=\left(\frac{-\lambda\tilde{F}_3}{\tilde{F}_1}+\frac{\lambda h\tilde{F}_2}{2\tilde{F}_1}\right)\tilde{u}^k(x-h)$$

$$+\left(1+\frac{2\lambda\widetilde{F}_3}{\widetilde{F}_1}-\frac{\lambda h^2\widetilde{F}_0}{\widetilde{F}_1}\right)\widetilde{u}^k(x)$$

$$+\left(\frac{-\lambda\widetilde{F}_3}{\widetilde{F}_1}-\frac{\lambda h\widetilde{F}_2}{2\widetilde{F}_1}\right)\widetilde{u}^k(x+h)+\frac{\widetilde{f}^k(x)}{\widetilde{F}_1}. \qquad (12.3)$$

若 h 充分小，并且

$$\lambda\leqslant\frac{\min\widetilde{F}_1}{2\max|\widetilde{F}_3|+h^2\max|\widetilde{F}_0|},$$

则 (12.3) 满足 § 10.1 中的王型条件，因此存在正常数 c_1，使得当 $k\tau\leqslant T$ 时，

$$\|\widetilde{u}^k\|_\infty\leqslant c_1(\|\widetilde{u}^0\|_\infty+\max_{k\tau\leqslant T}\|\widetilde{f}^k\|_\infty).$$

Dufort, Frankel (1953) 也研究了下列方程的三层格式

$$\frac{\partial U}{\partial t}=G\left(x, t, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right).$$

对于非线性方程的初、边值问题，则经常应用极值原理，例如 Rose (1956) 就用极值原理讨论了下列方程

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=G\left(x, t, U, \frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial U}{\partial x}\right),$$

其中 G 对 $\frac{\partial U}{\partial t}$ 的偏导数有正的下界。为简便计，本节只考虑下列问题

$$\begin{cases}\frac{\partial U}{\partial t}=G\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)+f, & 0<x<1,\ 0<t\leqslant T,\\ U(0, t)=U(1, t)=0, & 0\leqslant t\leqslant T,\\ U(x, 0)=U_0(x), & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases} \qquad (12.4)$$

其中 $G'=\frac{\partial G(y)}{\partial y}\geqslant\nu_0>0$.

令 $\mathscr{I}_h=\{x/x=jh, 1\leqslant j\leqslant J-1\}$, $Jh=1$，并用下列格式计算 (12.4)，

$$\begin{cases}u_t^k(x)=G(u_{x\bar{x}}^{k+1}(x))+f^{k+1}(x), & x\in\mathscr{I}_h,\ k\geqslant 0,\\ u^k(0)=u^k(1)=0, & k\geqslant 0,\\ u^0(x)=U_0(x), & x\in\mathscr{I}_h,\end{cases} \qquad (12.5)$$

对于固定的 k，则采用下列迭代过程计算 $u^{k+1}(x)$，

$$\begin{cases} u_l^{k+1}(x) = u_{l-1}^{k+1}(x) + \beta(\tau G(u_{\bar{x}x,l-1}^{k+1}(x)) \\ \quad - u_{l-1}^{k+1}(x) + u^k(x) + \tau f^{k+1}(x)), \quad l \geqslant 1, \\ u_0^{k+1}(x) = u^k(x), \end{cases}$$

其中 β 是松弛因子，l 是迭代次数. 用 $\tilde{u}_l^{k+1}(x)$ 表示第 l 次迭代误差，则有

$$\begin{cases} \tilde{u}_l^{k+1}(x) = (1-\beta)\tilde{u}_{l-1}^{k+1}(x) + \beta\tau G'\tilde{u}_{\bar{x}x,l-1}^{k+1}(x), \\ \tilde{u}_l^{k+1}(0) = \tilde{u}_l^{k+1}(1) = 0. \qquad l \geqslant 1 \end{cases}$$

记

$$\tilde{u}_l^{k+1} = (\tilde{u}_l^{k+1}(h), \cdots, \tilde{u}_l^{k+1}(1-h))^*,$$

则有

$$\tilde{u}_l^{k+1} = A\tilde{u}_{l-1}^k,$$

其中 A 是相应的系数矩阵. 若

$$0 < \beta \leqslant \frac{1}{1 + 2\lambda \max G'},$$

则 $\|A\| = 1 - \beta < 1$，并由此推得

$$\|\tilde{u}_l^{k+1}\| = (1-\beta)^l \|\tilde{u}_0^{k+1}\|.$$

因此迭代是收敛的.

下面来分析稳定性. 假设 $u^k(x)$ 和 $f^k(x)$ 发生误差 $\tilde{u}^k_{(x)}$ 和 $\tilde{f}^k(x)$，则有下列误差方程

$$\begin{cases} \tilde{u}_t^k(x) = \tilde{G}'\tilde{u}_{\bar{x}x}^{k+1}(x) + \tilde{f}^k(x), \qquad x \in \mathscr{I}_h, \ k \geqslant 0, \\ \tilde{u}^k(0) = \tilde{u}^k(1) = 0, \qquad k \geqslant 0, \\ \tilde{u}^0(x) = \tilde{u}^0(x). \qquad x \in \mathscr{I}_h, \end{cases}$$

或写为

$$-\lambda\tilde{G}'\tilde{u}^{k+1}(x-h) + (1+2\lambda\tilde{G}')\tilde{u}^{k+1}(x) - \lambda\tilde{G}'\tilde{u}^{k+1}(x+h) \\ = \tilde{u}^k(x) + \tau\tilde{f}^k(x).$$

故由 § 11.2 中的极值原理，存在正常数 c_2，使得对一切 $k\tau \leqslant T$，

$$\|\tilde{u}^k\|_\infty \leqslant c_2(\|\tilde{u}^0\|_\infty + \max_{0\leqslant k\tau\leqslant T} \|\tilde{f}^k\|_\infty).$$

研究此类问题的另一个方法是能量法，Less (1960b) 较早地使用了这一方法.

12.2 半线性方程的极值原理,反应扩散方程及其渐近行为

在化学,生物学等实际问题中，经常遇到半线性抛物型方程．为了研究解的性质，需要建立非线性抛物型方程的极值原理．记 $\Omega=\{x/0<x_m<1,\ 1\leqslant m\leqslant n\}$，$\Gamma$ 是其边界．我们考虑下列反应扩散方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}=\nu\Delta U+f(U), & x\in\Omega,\ t>0,\\ U(x,t)=0, & x\in\Gamma,\ t\geqslant 0,\\ U(x,0)=U_0(x), & x\in\bar{\Omega}.\end{cases}\tag{12.6}$$

其中 ν 是正常数，$f(z)=\alpha z+g(z)$，$g(z)$ 是连续函数．当 $n=1$，$f(z)=z(1-z)$ 或 $f(z)=z(1-z)(z-a)$，$0<a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，(12.6) 就是 Fisher 方程．Fisher (1937), Aronson, Weinberger (1975, 1978), Fife, Mcleod (1975) 等研究了这类方程． Weinberger (1978, 1982) 等还讨论了相应的时间方向离散的模型．但是，为了研究 (12.6) 的数值解，我们需要详细分析相对应的全离散模型,而且某些实际问题本身就是全离散的．

记 $\Omega_h=\{x/x_m=j_mh,\ 1\leqslant j_m\leqslant J-1,\ 1\leqslant m\leqslant n\}$，$\Gamma_h$ 是其边界．又记

$$L_hu^k(x)=u_t^k(x)-\frac{\nu}{2}\left(\Delta_hu^k(x)+\Delta_hu^{k+1}(x)\right)$$

$$-\frac{\alpha}{2}\left(u^k(x)+u^{k+1}(x)\right)-g(u^k(x)).$$

与 (12.6) 相对应的一个全离散模型是

$$\begin{cases}L_hu^k(x)=0, & x\in\Omega_h,\ k\geqslant 0,\\ u^k(x)=0, & x\in\Gamma_h,\ k\geqslant 0,\\ u^0(x)=U_0(x), & x\in\bar{\Omega}_h.\end{cases}\tag{12.7}$$

Guo Ben-yu, Mitchell (1986) 对 $n=1$，$f(z)=z(1-z)$ 的情况建立了极值原理． Guo Ben-yu, Chen Sui-yang (1986) 则把它推广到更一般的情况．下面假定 $g(z)$ 满足下列条件：

$$\begin{cases} g(z_1)-g(z_2)=(z_1-z_2)(a(z_1,z_2)+b(z_1,z_2)(z_1-z_2)), \\ |a(z_1,z_2)|\leqslant c_1+c_2|z_2|^\gamma, \\ b(z_1,z_2)\leqslant 0, \end{cases} \tag{12.8}$$

其中 c_1, c_2 和 γ 都是非负常数.

引理 12.1 如果下列条件满足

(i) 条件 (12.8) 满足，并对一切 $x\in\bar{\Omega}_h$, $k\geqslant 0$, 都有

$$|\xi^k(x)|\leqslant c_3;$$

(ii) $\begin{cases} L_h\eta^k(x)\leqslant L_h\xi^k(x), & x\in\Omega_h,\ k\geqslant 0, \\ \eta^k(x)\leqslant\xi^k(x), & x\in\Gamma_h,\ k\geqslant 0, \\ \eta^0(x)\leqslant\xi^0(x), & x\in\bar{\Omega}_h; \end{cases}$

(iii) $\tau<\tau_1=\min\left(\dfrac{2}{\alpha},\ 2h^2(2n\nu+2c_1h^2+2c_2c_3^\gamma h^2-\alpha h^2)^{-1}\right)$,

那末，对一切 $x\in\bar{\Omega}_h$ 和 $k\geqslant 0$, 都有 $\eta^k(x)\leqslant\xi^k(x)$.

证明 记 $\tilde{\eta}^k(x)=\eta^k(x)-\xi^k(x)$. 显然有 $\tilde{\eta}^0(x)\leqslant 0$. 现在假定对一切 $x\in\bar{\Omega}_h$, $\tilde{\eta}^k(x)\leqslant 0$. 由 (12.7) 得到

$$\tilde{\eta}_t^k(x)-\frac{\nu}{2}(\Delta_h\tilde{\eta}^k(x)+\Delta_h\tilde{\eta}^{k+1}(x))$$

$$-\frac{\alpha}{2}(\tilde{\eta}^k(x)+\tilde{\eta}^{k+1}(x))\leqslant g(\eta^k(x))-g(\xi^k(x)),$$

所以

$$\begin{aligned} &\left(1-\frac{\alpha\tau}{2}\right)\tilde{\eta}^{k+1}(x)-\frac{\nu\tau}{2}\Delta_h\tilde{\eta}^{k+1}(x) \\ &\quad\leqslant\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)\tilde{\eta}^k(x)+\frac{\nu\tau}{2}\Delta_h\tilde{\eta}^k(x) \\ &\qquad+\tau\tilde{\eta}^k(x)[a(\eta^k(x),\xi^k(x)) \\ &\qquad+b(\eta^k(x),\xi^k(x))\tilde{\eta}^k(x)]. \end{aligned} \tag{12.9}$$

设 $\tilde{\eta}^{k+1}(x')=\max\limits_{x\in\bar{\Omega}_h}\tilde{\eta}^{k+1}(x)$, 则

$$-\Delta_h\tilde{\eta}^{k+1}(x')\geqslant 0,\quad \Delta_h\tilde{\eta}^k(x')\leqslant-\frac{2n}{h^2}\tilde{\eta}^k(x'),$$

从而由 (12.9) 得到

$$\left(1-\frac{\alpha\tau}{2}\right)\bar{\eta}^{k+1}(x')$$

$$\leqslant\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}-\frac{n\nu\tau}{h^2}-c_1\tau-c_2c_3^{\gamma}\tau\right)\bar{\eta}^k(x').$$

因为 $\tau<\tau_1$, 所以 $\bar{\eta}^{k+1}(x')\leqslant 0$, 这就完成了归纳法.

注记 12.1 若 $g(0)\leqslant 0$,

$$\tau<\min\left(\frac{2}{\alpha},\ 2h^2(2n\nu+2c_1h^2-\alpha h^2)^{-1}\right),$$

并且

$$\begin{cases}L_h\eta^k(x)\leqslant 0, & x\in\Omega_h,\ k\geqslant 0,\\ \eta^k(x)\leqslant 0, & x\in\Gamma_h,\ k\geqslant 0,\\ \eta^0(x)\leqslant 0, & x\in\bar{\Omega}_h,\end{cases}$$

则对一切 $x\in\bar{\Omega}_h$ 和 $k\geqslant 0$, 都有 $\eta^k(x)\leqslant 0$.

注记 12.2 若 $g(0)\geqslant 0$, $|\eta^k(x)|\leqslant c_3$, $\tau<\tau_1$, 并且

$$\begin{cases}L_h\eta^k(x)\geqslant 0, & x\in\Omega_h,\ k\geqslant 0,\\ \eta^k(x)\geqslant 0, & x\in\Gamma_h,\ k\geqslant 0,\\ \eta^0(x)\geqslant 0, & x\in\bar{\Omega}_h,\end{cases}$$

则对一切 $x\in\bar{\Omega}_h$ 和 $k\geqslant 0$, 都有 $u^k(x)\geqslant 0$.

定理 12.1 设 $u^k(x)$ 是 (12.7) 的解,并满足下列条件:

(i) $0\leqslant U_0(x)\leqslant c_4$, 并存在正常数 $c_5\geqslant c_4$, 使得 $f(c_5)\leqslant 0$;

(ii) $g(0)\geqslant 0$, 并满足条件 (12.8);

(iii) $\tau<\tau_2=\min\left(\dfrac{2}{\alpha},\ 2h^2(2n\nu+2c_1h^2+2c_2c_6^{\gamma}h^2-\alpha h^2)^{-1}\right)$.

其中,当 $f(c_4)\leqslant 0$ 时, $c_6=c_4$; 当 $f(c_4)>0$ 时, $c_6=c_5$, 那末,对一切 $x\in\bar{\Omega}_h$ 和 $k\geqslant 0$, 都有 $0\leqslant u^k(x)\leqslant c_6$.

证明 首先令 $\eta^k(x)=u^k(x)$, $\xi^k(x)=c_6$, 则

$$\begin{cases}L_h\eta^k(x)\leqslant L_h\xi^k(x), & x\in\Omega_h,\ k\geqslant 0,\\ \eta^k(x)\leqslant\xi^k(x), & x\in\Gamma_h,\ k\geqslant 0,\\ \eta^0(x)\leqslant\xi^k(x), & x\in\bar{\Omega}_h,\end{cases}$$

所以由引理 12.1 得到 $u^k(x)\leqslant c_6$.

再在注记 12.2 中令 $\eta^k(x) = u^k(x)$, $\xi^k(x) = 0$, 即得到

$$u^k(x) \geqslant 0.$$

下面来研究 (12.7) 的解的渐近行为. 考虑与 (12.7) 相对应的椭圆型差分方程

$$\begin{cases} -\nu\Delta_h v(x) - f(v(x)) = 0, & x \in \Omega_h, \\ v(x) = 0, & x \in \Gamma_h. \end{cases} \tag{12.10}$$

如果

$$\begin{cases} -\nu\Delta_h \eta(x) - f(\eta(x)) \geqslant 0, & x \in \Omega_h, \\ \eta(x) \geqslant 0, & x \in \Gamma_h, \end{cases}$$

则称 $\eta(x)$ 为 (12.10) 的一个上解. 特别若 $\eta(x)$ 不是 (12.10) 的解,则称它是正规上解. 若在上式中至少有一个不等号严格成立,则称它是严格上解.

如果

$$\begin{cases} -\nu\Delta_h \eta(x) - f(\eta(x)) \leqslant 0, & x \in \Omega_h, \\ \eta(x) \leqslant 0, & x \in \Gamma_h, \end{cases}$$

则称 $\eta(x)$ 为 (12.10) 的一个下解.特别若 $\eta(x)$ 不是(12.10)的解,则称它是正则下解. 若在上式中至少有一个不等号严格成立, 则称它是严格下解.

定理 12.2 设 $u^k(x)$ 是 (12.7) 的解, $U_0(x)$ 是 (12.10) 的上解,并且满足定理 12.1 的条件,那末对一切 $x \in \bar{\Omega}_h$, $u^k(x)$ 是 k 的不增函数,并且当 $k \to \infty$ 时, $u^k(x) \to v(x)$, 其中 $v(x)$是 (12.10) 的满足 $v(x) \leqslant U_0(x)$ 的最大解. 若 $U_0(x)$ 是 (12.10) 的严格上解,则 $u^k(x)$ 是 k 的严格减函数.

证明 首先由定理 12.1 得到, $0 \leqslant u^k(x) \leqslant c_6$.又在引理 12.1 中令 $\eta^k(x) = u^k(x)$, $\xi^k(x) = U_0(x)$. 因为 $c_4 \leqslant c_6$, $\tau < \tau_3$, 所以

$$0 \leqslant u^k(x) \leqslant U_0(x), \qquad x \in \bar{\Omega}_h, \ k \geqslant 0.$$

特别有 $u^1(x) \leqslant u^0(x)$. 再在引理 12.1 中令

$$\eta^k(x) = u^{k+1}(x), \ \xi^k(x) = u^k(x),$$

于是有

$$0 \leqslant u^{k+1}(x) \leqslant u^k(x), \qquad x \in \bar{\Omega}_h, \ k \geqslant 0.$$

从而存在函数 $v(x)$，使得对一切 $x\in\bar{\Omega}_h$，当 $k\to\infty$ 时，$u^k(x)\to v(x)$，而且 $v(x)\leqslant U_0(x)$。在 (12.7) 中令 $k\to\infty$，则知 $v(x)$ 是 (12.10) 的解。

若 $w(x)$ 也是 (12.10) 的解，且 $w(x)\leqslant U_0(x)$，则在引理 12.1 中令 $\eta^k(x)=w(x)$，$\xi^k(x)=u^k(x)$ 后得到 $w(x)\leqslant u^k(x)$。让 $k\to\infty$，就有 $w(x)\leqslant v(x)$。

若 $U_0(x)$ 是严格上解，则可仿前证明，$u^k(x)$ 是 k 的严格减函数。

问题 (12.10) 可能有若干个解 $w(x)\geqslant U_0(x)$，把这个集合记为 $\mathscr{F}(U_0)$。

定理 12.3 设 $u^k(x)$ 是 (12.5) 的解，$U_0(x)$ 是 (12.10) 的下解，定理 12.1 的条件 (i)，(ii) 满足，且 $c_7=\max\left(\max\limits_{w\in\mathscr{F}(U_0)}\|w\|_\infty, c_6\right)$，

$$\tau<\tau_3=\min\left(\frac{2}{\alpha},\ 2h^2(2n\nu+2c_1h^2+2c_2c_7^{\,}h^2-\alpha h^2)^{-1}\right),$$

那末，对一切 $x\in\bar{\Omega}_h$，$u^k(x)$ 是 k 的不减函数，并且当 $k\to\infty$ 时，$w^k(x)\to v(x)$，其中 $v(x)$ 是 (12.10) 的满足 $v(x)\geqslant U_0(x)$ 的最小解。若 $U_0(x)$ 是 (12.10) 的严格下解，则 $u^k(x)$ 是 k 的严格增函数。

证明 首先有 $0\leqslant u^k(x)\leqslant c_6$。在引理 12.1 中令 $\eta^k(x)=U_0(x)$，$\xi^k(x)=u^k(x)$。因为 $\tau<\tau_3$，所以

$$0\leqslant U_0(x)\leqslant u^k(x),\qquad x\in\bar{\Omega}_h,\ k\geqslant 0.$$

特别有 $u^1(x)\geqslant U_0(x)$。故可仿照定理 12.2 的证明过程知道，对一切 $x\in\bar{\Omega}_h$ 和 $k\geqslant 0$，

$$U_0(x)\leqslant u^k(x)\leqslant u^{k+1}(x).$$

因此存在函数 $v(x)$，使得对一切 $x\in\bar{\Omega}_h$，当 $k\to\infty$ 时，$u^k(x)\to v(x)$，其中 $v(x)$ 是 (12.10) 的解，$v(x)\geqslant U_0(x)$。进一步可证明 $v(x)$ 是 (12.10) 的满足 $v(x)\geqslant U_0(x)$ 的最小解，并且当 $U_0(x)$ 是 (12.10) 的严格下解时，$u^k(x)$ 是 k 的严格增函数。

下面来证明格式 (12.7) 的收敛性。我们有

$$\begin{cases} L_h U^k(x) = R_h^k(x), & x \in \Omega_h,\ k \geqslant 0, \\ U^k(x) = 0, & x \in \Gamma_h,\ k \geqslant 0, \\ U^0(x) = U_0(x), & x \in \Omega_h, \end{cases}$$

其中 $R_h^k(x)$ 是逼近误差，并记 $R_h = \max\limits_{k \geqslant 0} \max\limits_{x \in \Omega_h} |R_h^k(x)|$。我们假定 $\frac{\partial U}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial^2 U}{\partial x_m^2}$ 连续，于是，当 $h \to 0$ 时，$R_h \to 0$。

定理 12.4 设 h 适当小，$\tau < \frac{h^2}{n\nu} - \sigma$，$\sigma > 0$，条件 (12.8) 满足，那末，存在正常数 c_8，使得对一切 $k\tau \leqslant T$，

$$\|U^k - u^k\|_\infty \leqslant R_h e^{c_8 k\tau}.$$

证明 先记 $\xi^k(x) = U^k(x) + R_h e^{c_8 k\tau}$，于是

$$L_h \xi^k(x) = L_h U^k(x) + R_h e^{c_8 k\tau} \left(\frac{e^{c_8 \tau} - 1}{\tau} \right)$$

$$- \frac{\alpha}{2} R_h e^{c_8 k\tau} (e^{c_8 \tau} + 1) + S^k(x),$$

其中

$$S^k(x) = -g(\xi^k(x)) + g(U^k(x)).$$

因为

$$S^k(x) = -R_h e^{c_8 k\tau} (a(\xi^k(x), U^k(x)) + R_h e^{c_8 k\tau} b(\xi^k(x), U^k(x))),$$

所以

$$S^k(x) \geqslant -M_1 R_h e^{c_8 k\tau}, \quad M_1 = c_1 + c_2 \max_{0 \leqslant k\tau \leqslant T} \|U^k\|_\infty^r.$$

并由此得到

$$L_h \xi^k(x) \geqslant R_h \left(c_8 e^{c_8 k\tau} - \frac{\alpha}{2} e^{c_8 k\tau} (e^{c_8 \tau} + 1) - M_1 e^{c_8 k\tau} - 1 \right).$$

让 c_8 适当大而 h 适当小，于是

$$\begin{cases} L_h \xi^k(x) \geqslant L_h u^k(x), & x \in \Omega_h,\ k \geqslant 0, \\ \xi^k(x) \geqslant u^k(x), & x \in \Gamma_h,\ k \geqslant 0, \\ \xi^0(x) \geqslant u^0(x), & x \in \Omega_h, \end{cases}$$

故由引理 12.1 得到 $u^k(x) \leqslant U^k(x) + R_h e^{c_8 k\tau}$。

再令 $\xi^k(x) = U^k(x) - R_h e^{c_8 k\tau}$，则可仿前得到

$$L_h \xi^k(x) = L_h U^k(x) - R_h e^{c_8 k\tau} \left(\frac{e^{c_8 \tau} - 1}{\tau} \right)$$

$$+\frac{\alpha}{2}R_h e^{c_8 k\tau}(e^{c_8\tau}+1)+S^k(x).$$

因为

$$S^k(x)=R_h e^{c_8 k\tau}(a(\xi^k(x),U^k(x))-R_h e^{c_8 k\tau}b(\xi^k(x),U^k(x)),$$

所以存在仅与 T, R_h, c_8 和 $\max\limits_{0\leqslant k\tau\leqslant T}\|U^k\|_\infty$ 有关的正常数 M_2，使得

$$L_h\xi^k(x)\leqslant -R_h\left(c_8 e^{c_8 k\tau}-\frac{\alpha}{2}e^{c_8 k\tau}(e^{c_8\tau}+1)-M_2 e^{c_8 k\tau}-1\right).$$

所以当 c_8 适当大，h 适当小时，由引理 12.1 和定理 12.1 得到，

$$u^k(x)\geqslant U^k(x)-R_h e^{c_8 k\tau}.$$

综合上面的分析，就证明了本定理.

定理 12.5 假设定理 12.1 的条件满足，并且 ν 适当大，则对一切 k，$\|u^k-U^k\|_\infty\leqslant(n+1)R_h$.

证明 令 $\xi^k(x)=U^k(x)+R_h q(x)$，其中

$$q(x)=n-|x|^2+1,$$

则

$$L_h\xi^k(x)=L_hU^k(x)+2n\nu R_h-\alpha R_h q(x)+S^k(x),$$

其中 $S^k(x)\geqslant -M_1R_hq(x)$。因为 ν 适当大，所以

$$\begin{cases}L_h\xi^k(x)\geqslant R_h(2n\nu-\alpha q(x)-M_1q(x)-1)\geqslant 0,\\ \qquad\qquad x\in\Omega_h,\ k\geqslant 0,\\ \xi^k(x)\geqslant u^k(x),\qquad x\in\Gamma_h,\ k\geqslant 0,\\ \xi^0(x)\geqslant u^0(x),\qquad x\in\Omega_h,\end{cases}$$

故由引理 12.1 得到，$u^k(x)\leqslant U^k(x)+(n+1)R_h$. 类似地可证明 $u^k(x)\geqslant U^k(x)-(n+1)R_h$.

若 $f(z)=z(1-z)$，则满足条件 (12.8)，其中 $\alpha=1$, $c_1=0$, $c_2=2$, $\gamma=1$，而 (12.7) 和 (12.10) 相应地为

$$\begin{cases}u_t^k(x)=\frac{\nu}{2}(\Delta_h u^k(x)+\Delta_h u^{k+1}(x))\\ \qquad\qquad+\frac{1}{2}(u^k(x)+u^{k+1}(x))-(u^k(x))^2,\\ \qquad\qquad x\in\Omega_h,\ k\geqslant 0,\\ u^k(x)=0,\qquad x\in\Gamma_h,\ k\geqslant 0,\\ u^0(x)=U_0(x),\qquad x\in\Omega_h,\end{cases}\tag{12.11}$$

和

$$\begin{cases}-\nu\Delta_h v(x)-v(x)(1-v(x))=0, & x\in\Omega_h,\\ v(x)=0, & x\in\Gamma_h.\end{cases} \tag{12.12}$$

记

$$\nu_h^*=\frac{h^2}{4\nu\sin^2\frac{\pi h}{2}}. \tag{12.13}$$

在§17.4中，我们将证明，当 $\nu>\nu_h^*$ 时，(12.12) 没有不恒为零的非负解；当 $\nu<\nu_h^*$ 时，则恰有一个不恒为零的非负解 $v(x)$，$\|v\|_\infty<1$，并且当 $\nu\to\nu_h^*$ 时，$\|v\|_\infty\to 0$. 事实上，$\nu=\nu_h^*$ 还是 (12.12) 对平凡解的分歧点.

在定理 12.1 中取 $c_6=\max(1, c_4)$，就得到下面的结果:

定理 12.6 设 $u^k(x)$ 是 (12.11) 的解，$0\leqslant U_0(x)\leqslant c_4$，并且

$$\tau<\tau_4=\min(2, 2h^2(2n\nu+4h^2\max(1, c_4)-h^2)^{-1}),$$

则对一切 $x\in\bar{\Omega}_h$ 和 $k\geqslant 0$，都有

$$0\leqslant u^k(x)\leqslant\max(1, c_4).$$

为了讨论 (12.11) 的解的渐近行为，我们先考察下列辅助问题

$$\begin{cases}\bar{L}_h w^k(x)=w_t^k(x)-\frac{\nu}{2}(\Delta_h w^k(x)+\Delta_h w^{k+1}(x))\\ \qquad\qquad -\frac{1}{2}(w^k(x)+w^{k+1}(x))=0,\\ \qquad\qquad x\in\Omega_h,\ k\geqslant 0,\\ w^k(x)=0, \qquad x\in\Gamma_h,\ k\geqslant 0,\\ w^0(x)=U_0(x), \qquad x\in\Omega_h.\end{cases} \tag{12.14}$$

记

$$\beta=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n),$$
$$\mathfrak{M}=\{\beta/\beta_m=1, 2, \cdots, J-1, 1\leqslant m\leqslant n\},$$

则

$$w^k(x)=\sum_{\beta\in\mathfrak{M}}a(\beta)b^k(\beta)\varphi(\beta, x),$$

其中

$$b(\beta)=\frac{1+\frac{\tau}{2}-\frac{2\nu\tau}{h^2}\sum_{m=1}^{n}\sin^2\frac{\beta_m\pi h}{2}}{1-\frac{\tau}{2}+\frac{2\nu\tau}{h^2}\sum_{m=1}^{n}\sin^2\frac{\beta_m\pi h}{2}},$$

$$\varphi(\beta, x)=\prod_{m=1}^{n}\sin\beta_m\pi x,$$

故当 $\nu>\nu_h^*$ 时,对一切 β, $0<b(\beta)<1$. 因此,对任意的 $U_0(x)$, 当 $k\to\infty$ 时, $w^k(x)\to 0$.

因为对一切 $x\in\bar{\Omega}_h$ 和 $k\geqslant 0$, 都有

$$\bar{L}_h u^k(x)=-[u^k(x)]^2\leqslant 0,$$

所以 $0\leqslant u^k(x)\leqslant w^k(x)$, 从而得到下面的结果.

定理 12.7 设 $u^k(x)$ 是 (12.11) 的解, $\nu>\nu_h^*$, 并满足定理 12.6 的条件,则对一切 $x\in\bar{\Omega}_h$, 当 $k\to\infty$ 时, $u^k(x)\to 0$.

定理 12.8 设 $u^k(x)$ 是 (12.11) 的解, $\nu<\nu_h^*$, $0\leqslant U_0(x)\leqslant c_1$, $U_0(x)\not\equiv 0$, 并且

$$\tau<\tau_5=\min(2, 2h^2(2n\nu+4h^4\max(1, c_1)-h^2)^{-1}),$$

那末,对一切 $x\in\bar{\Omega}_h$, 当 $k\to\infty$ 时, $u^k(x)\to v(x)$, 其中 $v(x)$ 是 (12.12) 的唯一的不恒等于零的非负解.

证明 不失一般性, 假定对 $x\in\Omega_h$, $0<m\leqslant U_0(x)\leqslant c_1$. 设 $\varphi(x)$ 是下列问题的解,

$$\begin{cases}-\nu'\Delta_h\varphi(x)-\varphi(x)(1-\varphi(x))=0, & x\in\Omega_h,\\ \varphi(x)=0, & x\in\Gamma_h,\end{cases}\tag{12.15}$$

其中 $\nu<\nu'<\nu_h^*$, 且 $|\nu'-\nu_h^*|$ 充分小, 于是 $0<\|\varphi\|_\infty<m$. 因为

$$\begin{aligned}-\nu\Delta_h\varphi(x)-\varphi(x)(1-\varphi(x))&=(\nu'-\nu)\Delta_h\varphi(x)\\&=\frac{\nu'-\nu}{\nu'}\varphi(x)(\varphi(x)-1)<0,\end{aligned}$$

所以 $\varphi(x)$ 还是 (12.12) 的严格下解.

再考虑下列两个问题

$$\begin{cases} \eta_t^k(x) - \frac{\nu}{2}(\Delta_h\eta^k(x) + \Delta_h\eta^{k+1}(x)) \\ \qquad\qquad - \frac{1}{2}(\eta^k(x) + \eta^{k+1}(x)) + (\eta^k(x))^2 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad x \in \Omega_h,\ k \geqslant 0, \\ \eta^k(x) = 0, \qquad x \in \Gamma_h,\ k \geqslant 0, \\ \eta^0(x) = c_9 = \max(1, c_4), \qquad x \in \Omega_h, \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \xi_t^k(x) - \frac{\nu}{2}(\Delta_h\xi^k(x) + \Delta_h\xi^{k+1}(x)) \\ \qquad\qquad - \frac{1}{2}(\xi^k(x) + \xi^{k+1}(x)) + (\xi^k(x))^2 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad x \in \Omega_h,\ k \geqslant 0, \\ \xi^k(x) = 0, \qquad x \in \Gamma_h,\ k \geqslant 0, \\ \xi^0(x) = \varphi, \qquad x \in \Omega_h. \end{cases}$$

因为 c_9 与 φ 分别是(12.11)的上解与下解，所以当 $k \to \infty$ 时，$\eta^k(x) \to v_1(x)$，$\xi^k(x) \to v_2(x)$，其中 $v_1(x)$ 是(12.12)的满足 $v_1(x) \leqslant c_9$ 的最大解，$v_2(x)$是(12.12)的满足 $v_2(x) \geqslant \varphi(x)$ 的最小解. 因为(12.12)的解是唯一的，所以 $v_1(x) = v_2(x) = v(x)$. 又由定理 12.6 与引理 12.1 得到

$$\xi^k(x) \leqslant u^k(x) \leqslant \eta^k(x), \qquad x \in \Omega_h,\ k \geqslant 0,$$

让 $k \to \infty$，即得所要证的结论.

最后，由定理 12.4 和 12.5 得到

定理 12.9 设 $f(z) = z(1-z)$，h 适当小，$\tau < \frac{h^2}{n\nu} - \sigma, \sigma > 0$，则对一切 $k\tau \leqslant T$，都有 $\|u^k - U^k\|_\infty \leqslant R_h e^{c_{10}k\tau}$，其中 $c_{10} = \frac{5}{2} + 2c_9 + \delta, \delta > 0$. 又若 $2n\nu \geqslant n + 2 + 2c_9(n+1) + \delta$，则对一切 $k \geqslant 0$，都有 $\|u^k - U^k\|_\infty \leqslant (n+1)R_h$.

Chen Sui-yang, Guo Ben-yu (1984, 1985) 还研究了解下列问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial t} = \nu\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial U}{\partial \rho}\right) + f(U), & 0 < \rho < 1, t > 0, \\
\dfrac{\partial U}{\partial \rho}(0, t) = 0, & t \geqslant 0, \\
U(0, t) = 0, & t \geqslant 0, \\
U(\rho, 0) = U_0(\rho), & 0 < \rho < 1,
\end{cases}
$$

的数值方法，其中 $f(z) = z(1 - z)$ 或者

$$
f(z) = z - \frac{z^2}{Q} - \frac{z^2}{R(1 + z^2)}, \quad Q > 3\sqrt{3}, \quad R > 0,
$$

并得到许多有趣的结果.

关于 (12.4) 的数值研究工作还可见 Manoranjan, Mitchell, Sleeman, Kuo Pen-yu (1984) 等人的文章.

在实际问题中，还要研究半线性方程组，例如 Hodgkin-Huxley 方程组（见 Hodgin, Huxley (1952)）. 它的特例之一是下列 Fitzhugh-Nagumo 方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + U(1 - U)(U - a) - V, \\
\quad 0 < a \leqslant \dfrac{1}{2}, \ 0 < x < 1, \ t > 0, \\
\dfrac{\partial V}{\partial t} = b_1(U - b_2 V), \qquad b_1 \geqslant 0, b_2 \geqslant 0, 0 < x < 1, t > 0,
\end{cases}
\tag{12.16}
$$

Fitzhugh (1961), Nagumo, Asimoto, Yoshizawa (1962), Rinzel, Keller (1973), Green, Sleeman (1974) 等研究了这个方程组. Riznel (1977), Meiring, Mitchell, Sleeman (1980) 等还研究了它的数值方法.

12.3 拟线性反应扩散方程组

如果考虑到传输项的作用，就需要研究拟线性反应扩散方程或方程组，例如

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial t} = D(x,t,U)\Delta U + Q(x,t,U)\dfrac{\partial U}{\partial x} + F(x,t,U), \\
\qquad\qquad\qquad x \in \mathscr{I},\ t > 0, \\
U(0,t) = G_0, \qquad t \geqslant 0, \\
U(1,t) = G_1, \qquad t \geqslant 0, \\
U(x,0) = U_0(x), \qquad x \in \mathscr{I},
\end{cases}
\tag{12.17}
$$

其中 $\mathscr{I} = \{x/0 < x < 1\}$, U, F 和 G_m 是 n 维向量,其分量分别记为 U_l, f_l 和 $g_{m,l}$, D 和 Q 是对角阵,其元素分别为 d_l 和 q_l. 我们假定:

(i) d_l, q_l 和 f_l 是 x, t 和 U 的连续函数;

(ii) 存在正常数 c_1, 使得对一切 $x \in \mathscr{I}$, $t \geqslant 0$ 和

$$U \in S = \{Y/a_l \leqslant Y_l \leqslant b_l,\ 0 \leqslant l \leqslant n\},$$

都有

$$d_l(x,t,U) \geqslant \frac{c_1}{2} q_l(x,t,U);$$

(iii) 存在正常数 c_2, 使得对一切 $x \in \mathscr{I}$, $t \geqslant 0$ 和 $U \in S$,都有

$$\left|\frac{\partial f_l}{\partial U_l}(x,t,U)\right| \leqslant c_2;$$

(iv) 对一切 $x \in \mathscr{I}$, $t \geqslant 0$ 和 $U \in \partial S$,都有

$$F(x,t,U) \cdot N_S(U) \leqslant 0,$$

其中 ∂S 是 S 的边界, $N_S(U)$ 是其外法向单位向量,

(v) $U_0(x) \in S$, $G_m \in S$, $m = 0, 1$.

Chueh, Conley, Smoller (1977) 和 Conway, Hoff, Smoller (1978) 证明,在上述假定下, (12.17) 有唯一的解 $U(x,t) \in S$, 并且可以有任意阶的连续导数, 只要对 D, Q, U_0 和 F 附加某些条件,今后我们总假定 $U(x,t) \in S$, 并适当光滑.

记 $\mathscr{I}_h = \{x = x_j | x_j = jh, 1 \leqslant j \leqslant J-1\}$, $Jh = 1$, $t_k = k\tau$, $\lambda = \dfrac{\tau}{h^2}$,并用 $u^k(x)$ 表示网格函数 u 在点 $x \in \mathscr{I}_h$ 和 $t = t_k$ 的值,其分量为 $u_l^k(x)$. 计算 (12.17) 的一类差分格式是

$$\begin{cases} u_t^k(x) = D(x, t_k, u^k(x))(u_{\bar{x}x}^k(x) + \sigma\tau u_{t\bar{x}x}^k(x)) \\ \qquad\qquad + Q(x, t_k, u^k(x))(u_{\hat{x}}^k(x) + \sigma\tau u_{t\hat{x}}^k(x)) \\ \qquad\qquad + F(x, t_k, u^k(x)), \qquad x \in \mathscr{I}_h, \ k \geqslant 0, \\ u^k(0) = G_0, \qquad\qquad k \geqslant 0, \\ u^k(1) = G_1, \qquad\qquad k \geqslant 0, \\ u^0(x) = \bar{u}(x), \qquad\qquad x \in \mathscr{I}_h, \end{cases} \tag{12.18}$$

其中 $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $\bar{u}(x)$ 是对 $U_0(x)$ 的适当逼近.

今后记

$$v^k = (v_1^k, \cdots, v_{J-1}^k)^*, \ \mathscr{F}^k = (\mathscr{F}_1^k, \cdots, \mathscr{F}_{J-1}^k)^*,$$

$$p^k = (p_1^k, \cdots, p_{J-1}^k)^*,$$

其中

$$v_j^k = u^k(x_j), \ \mathscr{F}_j^k = F(x_j, t_k, u^k(x_j)),$$

$$p_1^k = (\lambda D(h, t_k, u^k(h)) - \frac{\lambda h}{2} Q(h, t_k, u^k(h))G_0,$$

$$p_{J-1}^k = (\lambda D(1-h, t_k, u^k(1-h)) + \frac{\lambda h}{2} Q(1-h, t_k, u^k(1-h))G_1,$$

$$p_j^k = 0, \qquad\qquad 2 \leqslant j \leqslant J-2,$$

又记

$$A^k = \begin{pmatrix} A_{1,1}^k & \cdots & A_{1,J-1}^k \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{J-1,1}^k & \cdots & A_{J-1,J-1}^k \end{pmatrix},$$

其中 $A_{j,m}^k$ 是 $n \times n$ 阶矩阵,

$$A_{j,j}^k = -2\lambda D(x_j, t_k, u^k(x_j)),$$

$$A_{j,j\pm1}^k = \lambda D(x_j, t_k, u^k(x_j)) \pm \frac{\lambda h}{2} Q(x_j, t_k, u^k(x_j)),$$

$$A_{j,m}^k = 0, \qquad\qquad m \neq j, \ j\pm1,$$

于是可把 (12.18) 改写为

$$(I - \sigma A^k)v^{k+1} = (I + (1-\sigma)A^k)v^k + \tau\mathscr{F}^k + p^k, \tag{12.19}$$

为了保证差分格式解的存在性和收敛性,通常需要对 (12.19) 附加一些条件,例如 Hoff (1978) 提出了下列条件:

(i) 存在正数 $\eta < 1$，使得对一切 $x \in \mathscr{I}_h, k \geqslant 0$ 和 $v^k \in S^{J-1}$，

$$(\eta - 1)I \leqslant (1-\sigma)A_{ii}^k \leqslant 0, \quad A_{j,m}^k \geqslant 0 \ (j \neq m), \tag{12.20}$$

(ii) $$p_j^k = \sum_{m=1}^{J} H_{j,m}^k w_{j,m}, \tag{12.21}$$

其中 $H_{j,m}^k \geqslant 0$ 是 $n \times n$ 阶矩阵，$w_{j,m}$ 是 G_0 和 G_1 的某些值，

(iii) $$\sum_{m=1}^{J-1} A_{j,m}^k + \sum_{m=1}^{J} H_{j,m} = 0. \tag{12.22}$$

命题 12.1 如果在格式 (12.19) 中，$h \leqslant c_1$，并且

$$2\lambda(1-\sigma) \leqslant \frac{1-\eta}{\bar{d}},$$

$$\bar{d} = \sup_{\substack{x \in \mathscr{I} \\ t \geqslant 0}} \sup_{\substack{U \in S \\ 1 \leqslant l \leqslant n}} d_l(x, t, U),$$

那末，一定满足条件 (12.20)—(12.22)。

证明 因为

$$\lambda d_l(x_j, t_k, u^k(x_j)) + \frac{\lambda h}{2} q_l(x_j, t_k, u^k(x_j))$$

$$\geqslant \lambda(d_l(x_j, t_k, u^k(x_j)) - \frac{c_1}{2}|q_l(x_j, t_k, u^k(x_j))|) \geqslant 0,$$

所以 $H_{j,m} \geqslant 0$ 和 $A_{j,m}^k \geqslant 0 (j \neq m)$，不难验证其它的结论也成立。

在本节中用 $|Y|_\infty$ 表示向量 Y 的元素的最大绝对值，$\|B\|_\infty$ 表示相应的矩阵范数。

命题 12.2 如果 $v^k \in S^{J-1}$，并满足条件 (12.20)—(12.22)，那末

(i) $\|I + (1-\sigma)A^k\|_\infty \leqslant 1$;

(ii) 若 $v^k \geqslant 0$，则 $(I - \sigma A^k)^{-1} v^k \geqslant 0$;

(iii) $\|(I - \sigma A^k)^{-1}\|_\infty \leqslant 1$.

证明 由条件 (12.20) 和 (12.22) 得到，$A_{j,m}^k \geqslant 0 (j \neq m)$ 和

$$I + (1-\sigma)A_{j,j}^k \geqslant \eta I > 0, \quad \sum_{m=1}^{J-1} A_{j,m}^k \leqslant 0,$$

因此结论 (i) 成立。由矩阵 $(I - \sigma A^k)$ 的单调性，即知结论 (ii) 为真。同理可证结论 (iii) 成立。

定理 12.10 如果 $v^0 \in S^{J-1}$，$\tau \leqslant \frac{\eta}{c_2}$，并满足条件 (12.20)—(12.22)，那么对一切 k，$v^k \in S^{J-1}$。

证明 假设 $v^k \in S^{J-1}$，并记

$$a = (a_1, a_2, \cdots, a_{J-1})^*, \quad b = (b_1, b_2, \cdots, b_{J-1})^*,$$

其中

$$a_j = \bar{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^*, \quad b_j = \bar{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^*,$$

于是

$$v^{k+1} - a = (I - \sigma A^k)^{-1}\varphi^k,$$

$$\varphi^k = (I + (1-\sigma)A^k)(v^k - a) + \tau\mathscr{F}^k + A^k a + p^k.$$

由 (12.20)、(12.22) 得到

$$(A^k a + p^k)_j = \sum_{m=1}^{J-1} A^k_{j,m}\bar{a} + \sum_{m=1}^{2} H_{j,m}w_{j,m}$$

$$\geqslant \sum_{m=1}^{2} H_{j,m}(w_{j,m} - \bar{a}) \geqslant 0.$$

下面来估计 $\mathscr{F}^k$。定义 $\bar{v}^k = (\bar{v}^k_1, \cdots, \bar{v}^k_{J-1})$，其中

$$\bar{v}^k_j = (\bar{v}^k_{j,1}, \bar{v}^k_{j,2}, \cdots, \bar{v}^k_{j,n}), \quad \bar{v}^k_{j,m} = \begin{cases} u^k_m(x_j), & m \neq l, \\ a_l, & m = l, \end{cases}$$

于是 $\bar{v}^k \in \partial S$，所以 $f_l(x_j, t_k, \bar{v}^k_j) \geqslant 0$，并且

$$f_l(x_j, t_k, v^k_j) = f_l(x_j, t_k, \bar{v}^k_j) + \frac{\partial f_l}{\partial U_l}(u^k_l(x_j) - a_l)$$

$$\geqslant -c_2(u^k_l(x_j) - a_l),$$

故可由此推得

$$\mathscr{F}^k \geqslant -c_2(v^k - a)$$

和

$$(I + (1-\sigma)A^k)(v^k - a) + \tau\mathscr{F}^k \geqslant \bar{A}^k(v^k - a),$$

其中

$$\bar{A}^k = (1 - c_2\tau)I + (1-\sigma)A^k.$$

显然有 $\bar{A}^k_{j,m} \geqslant 0 (j \neq m)$。又由 (12.20) 得到

$$(1 - c_2\tau)I \geqslant (1-\eta)I \geqslant (\sigma - 1)\bar{A}^k_{j,j},$$

因此 $\overline{A}_{i,j}^k \geqslant 0$. 因为 $v^k \geqslant a$, 故有 $\varphi^k \geqslant 0$. 根据命题 12.2 的结论 (ii) 可知, $v^{k+1} \geqslant a$. 类似地可证明 $v^{k+1} \leqslant b$.

根据定理 12.10 和命题 12.2 中的结论 (iii), 对一切 $k \geqslant 0$, u^k 都是存在并可解的.

下面来研究 (12.18) 的收敛性. 记

$$V^k = (V_1^k, V_2^k, \cdots, V_{J-1}^k)^*,$$

其中 $V_j^k = U^k(x_j)$, 又记

$$r^k = (I - \sigma\overline{A}^k)V^{k+1} - (I + (1-\sigma)\overline{A}^k)V^k - \tau\overline{\mathscr{F}}^k - \overline{p}^k, \tag{12.23}$$

其中 $\overline{A}^k$, $\overline{\mathscr{F}}^k$ 和 $\overline{p}^k$ 的形式与 A^k, $\mathscr{F}^k$ 和 p^k 相同, 但用 V^k 代替其中的 U^k. 不难验证, 存在仅与 $U(x, t)$ 的四阶导数有关的正常数 M_1, 使得对一切 k, $|r^k|_\infty \leqslant M_1(\tau h^2 + \tau^2)$. 记 $\tilde{v}^k = v^k - V^k$.

定理 12.11 假定 $U(x, t)$ 适当光滑, $v^0 \in S^{J-1}$, $\tau \leqslant \frac{\eta}{c_2}$, 格式 (12.18) 对 (12.17) 的逼近是相容的, 并且满足条件 (12.20)—(12.22), 那末存在仅与 $U(x, t)$ 有关的正常数 M_2, 使得对一切正常数 β,

$$|\tilde{v}^k|_\infty \leqslant \frac{e^{-\beta t_k}}{h^2 + \tau + e^{-(\beta+M_2)t_k}}(|\tilde{v}^0|_\infty + M_1 h^2 + M_1\tau) + \frac{(h^2+\tau)\mathscr{D}\mathrm{im}S}{h^2 + \tau + e^{-(\beta+M_2)t_k}}.$$

证明 由 (12.23) 得到

$$(I - \sigma A^k)V^{k+1} = (I + (1-\sigma)A^k)V^k + \tau\mathscr{F}^k + p^k + r^k + \omega^k,$$

其中

$$\omega^k = (\overline{A}^k - A^k)(V^k + \sigma\tau V_t^k) + \overline{p}^k - p^k.$$

不难验证

$$|\omega^k|_\infty \leqslant M_3\tau|\tilde{v}^k|_\infty.$$

由上式和 (12.19) 得到

$$(I - \sigma A^k)\tilde{v}^{k+1} = (I + (1-\sigma)A^k)\tilde{v}^k - r^k - \omega^k + \tau\mathscr{F}^k - \tau\overline{\mathscr{F}}^k. \tag{12.24}$$

因为$|\tau\mathscr{F}^k-\tau\bar{\mathscr{F}}^k|_\infty\leqslant M_4\tau|\tilde{v}^k|_\infty$，所以

$$|\tilde{v}^{k+1}|_\infty\leqslant(1+M_2\tau)|\tilde{v}^k|_\infty+M_1(\tau h^2+\tau^2),$$

并由此推得

$$|\tilde{v}^k|_\infty\leqslant e^{M_2t_k}(|\tilde{v}^0|_\infty+M_1(h^2+\tau)). \tag{12.25}$$

又由定理 12.10 得到

$$|\tilde{v}^k|_\infty\leqslant\mathscr{D}\mathrm{im}S. \tag{12.26}$$

记 $\delta=\dfrac{h^2+\tau}{h^2+\tau+e^{-(\beta+M_2)t_k}}$. 用 $(1-\delta)$ 乘 (12.25)，再用 δ 乘 (12.26)，把两次结果相加就得到定理的结论.

定理 12.11 表明，对固定的 t_k，当 $h\to0$ 时，格式 (12.18) 是收敛的；而对固定的 h，当 $k\to\infty$ 时，误差不超过 $\mathscr{D}\mathrm{im}S$. 这个结论已经不能再改进. 但对某些特殊情况，却可得到对 t 一致收敛的结果. 下面假定

$$\|D(x,t,U^{(1)})-D(x,t,U^{(2)})\|_\infty+\|Q(x,t,U^{(1)})-Q(x,t,U^{(2)})\|_\infty\leqslant c_3\|U^{(1)}-U^{(2)}\|_{L^\infty(\mathscr{I})}.$$

定理 12.12 假设 $v^0\in S^{J-1}$，$\tau\leqslant\dfrac{\eta}{c_2}$，条件 (12.20)—(12.22) 满足，并且

(i) 对一切 k，$|r^k|_\infty\leqslant M_5(\tau h^2+\tau^2)$；

(ii) 存在 $\delta>0$，使得对一切 $x\in\mathscr{I}$，$t\geqslant0$，$U\in S$，都有

$$\delta I+\frac{\partial f_l}{\partial U_l}+\sum_{m\neq l}\left|\frac{\partial f_l}{\partial U_m}\right|\leqslant0;$$

(iii) $\beta=\delta-c_3\sup\limits_{t\geqslant0}\|U(x,t)\|_{W^{\infty,2}(\mathscr{I})}>0$，

那末

$$|\tilde{v}^k|_\infty\leqslant\left(1-\frac{\beta t_k}{k}\right)^k|\tilde{v}^0|_\infty+\frac{M_5}{\beta}(h^2+\tau).$$

证明 (12.24) 成立，并且

$$|\omega^k|_\infty\leqslant c_3\tau\sup_{t\geqslant0}\|U(x,t)\|_{W^{\infty,2}(\mathscr{I})}|\tilde{v}^k|_\infty=\tau(\delta-\beta)|\tilde{v}^k|_\infty.$$

其次，把 $\mathscr{F}^k_j$ 的第 l 个元素记为 $\mathscr{F}^k_{j,l}$，则有

$$\mathscr{F}^k_{j,l}-\bar{\mathscr{F}}^k_{j,l}=f_l(x_j,t_k,u^k(x_j))-f_l(x_j,t_k,U^k(x_j))$$

$$= \frac{\partial f_l}{\partial U_l}(u_l^k(x_j) - U_l^k(x_j))$$

$$+ \sum_{m \neq l} \frac{\partial f_l}{\partial U_m}(u_m^k(x_j) - U_m^k(x_j)).$$

把 $A_{l,i}^k$ 的对角线元素记为 $A_{l,j,l}^k$. 由于 $\tau \leqslant \frac{\eta}{c_2}$, 故由 (12.20)—(12.22) 得到

$$1 + (1-\sigma)A_{l,j,l}^k + \tau \frac{\partial f_l}{\partial U_l}(x_j, t_k, U^k(\xi)) \geqslant 0, \quad U^k(\xi) \in S,$$

$$A_{l,m,l}^k \geqslant 0, \qquad j \neq m.$$

因为 $\sum_{m=1}^{J-1} A_{l,m}^k \leqslant 0$, 所以

$$|(I + (1-\sigma)A^k)\tilde{v}^k + \tau(\mathscr{F}^k - \tilde{\mathscr{F}}^k)|_\infty$$
$$\leqslant (1 - \delta\tau)|\tilde{v}^k|_\infty,$$

故由 (12.24) 得到

$$|\tilde{v}^{k+1}|_\infty \leqslant (1 - \beta\tau)|\tilde{v}^k|_\infty + |r^k|_\infty,$$

并由此推得所证的结论.

Hoff (1978) 还讨论了多个空间变量和第二、三类边值条件的问题. 此外 Guo Ben-yu (1985b) 研究了下列方程的数值方法

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} - \nu(x, t, U)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = f(x, t, U).$$

12.4 Burgers 方程的守恒型格式，解的存在性

在流体力学等问题中，也往往要研究拟线性抛物型方程，例如 Burgers (1948) 研究了下列问题

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = f, & -\infty < x < \infty, 0 < t \leqslant T, \\ U(x, t) = U(x+1, t), & -\infty < x < \infty, 0 \leqslant t \leqslant T, \\ U(x, 0) = U_0(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases} \tag{12.27}$$

其中 ν 是正常数，f 和 U_0 关于 x 以 1 为周期・下面记

$$\mathscr{I} = \{x | 0 < x < 1\}.$$

构造计算 (12.27) 的差分格式的关键，是从各种物理定律出发，合理地逼近非线性项．事实上，(12.27) 的解满足守恒律

$$\int_0^1 U(x, t)dx = \int_0^1 U_0(x)dx + \int_0^t\int_0^1 f(x, \xi)dxd\xi, \quad (12.28)$$

和

$$\|U(t)\|^2_{L^2(\mathscr{I})} + 2\nu \int_0^t |U(\xi)|^2_{H^1(\mathscr{I})}d\xi$$

$$= \|U_0\|^2_{L^2(\mathscr{I})} + 2\int_0^t\int_0^1 U(x, \xi)f(x, \xi)dxd\xi. \quad (12.29)$$

记 $\mathscr{I}_h = \{x/x = jh, 1 \leqslant j \leqslant J - 1\}$, $Jh = 1 + h$. 若仿照 Lax 方法，则有下列差分格式

$$\begin{cases} u_t^k(x) + \dfrac{1}{2}[(u^k(x))^2]_{\hat{x}} - \nu u^k_{x\bar{x}}(x) = f^k(x), & x \in \mathscr{I}_h, k \geqslant 0, \\ u^k(x+1) = u^k(x), & x \in \mathscr{I}_h, k \geqslant 0, \\ u^0(x) = U_0(x), & x \in \mathscr{I}_h. \end{cases} \quad (12.30)$$

它的解满足

$$h\sum_{x\in\mathscr{I}_h} u^k(x) = h\sum_{x\in\mathscr{I}_h} U_0(x) + \tau h\sum_{\xi=0}^{k-1}\sum_{x\in\mathscr{I}_h} f^\xi(x). \quad (12.31)$$

由于上式合理地模拟了 (12.28)，因此 (12.30) 可给出较好的数值结果．

郭本瑜 (1981) 则采用下列差分格式

$$\begin{cases} u_t^k(x) + J(u^k(x) + \delta\tau u_t^k(x), u^k(x)) - \nu(u^k(x) \\ \qquad + \sigma\tau u_t^k(x))_{x\bar{x}} = f^k(x), \qquad x \in \mathscr{I}_h, k \geqslant 0, \\ u^0(x) = U_0(x), \qquad x \in \mathscr{I}_h, \end{cases} \quad (12.32)$$

其中 $0 \leqslant \delta \leqslant 1$, $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $J(v, w)$ 由 (1.15) 所定义．对应于周期解问题，还要求 $u^k(x+1) = u^k(x)$.

可仿照 § 9.3 中的证明方法，当 $\delta = 0$ 时，(12.32) 的解也满足 (12.31). 此外，若 $\delta = \sigma = \dfrac{1}{2}$, 并把 (12.32) 对 $\dfrac{1}{2}(u^k(x) +$

$u^{k+1}(x)$) 求内积，则由 (1.17) 和引理 4.10 得到

$$\|u^k\|_t^2+\frac{\nu}{2}|u^k+u^{k+1}|_1^2=(u^k+u^{k+1},f^k),$$

从而

$$\|u^k\|^2+\frac{\nu}{2}\sum_{\xi=0}^{k-1}|u^\xi+u^{\xi+1}|_1^2$$
$$=\|U_0\|^2+\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}(u^\xi+u^{\xi+1},f^\xi).$$

它是 (12.29) 的合理模拟. 因此，(12.32) 能给出较好的数值结果.

下面用格式 (12.32) 来证明(12.27)的解的存在性. 我们假定 f 和 U_0 对 x 具有五阶连续偏导数，f 对 t 具有一阶连续偏导数. 为简便计，还假设 $\delta=\sigma=0$，h 和 λ 适当小，$m=\frac{3}{1-2\lambda\nu}$，又记

$$J^{(0)}(u^k(x))=J(u^k(x),u^k(x)),$$
$$J^{(l)}(u^k(x))=(J^{(l-1)}(u^k(x),u^k(x)))_x,$$
$$\rho^{(0)}(k\tau)=\|U_0\|^2+\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}\|f^\xi\|^2,$$
$$\rho^{(l)}(k\tau)=\rho^{(l-1)}(k\tau)+|U_0|_l^2+\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}|f^\xi|_l^2.$$

命题 12.3 若 T 和 $\rho^{(0)}(T)$ 适当小，则存在正常数 M_0，使得当 $k\tau\leqslant T$ 时，$\|u^k\|^2\leqslant M_0$.

证明 把 (12.32) 对 $u^k(x)$ 求内积，由 (1.17) 和引理 4.10, 4.12 得到

$$\|u^k\|_t^2-\tau\|u_t^k\|^2+2\nu|u^k|_1^2=2(u^k,f^k).$$

再把 (12.32) 对 $m\tau u_t^k(x)$ 求内积，由引理 4.13 得到

$$m\tau\|u_t^k\|^2+m\tau(u_t^k,J^{(0)}(u^k))+\frac{m\nu\tau}{2}(|u^k|_1^2)_t$$
$$-\frac{m\nu\tau^2}{2}|u_t^k|_1^2=m\tau(u_t^k,f^k).$$

结合以上两式得到

$$\|u^k\|_t^2+\tau(m-1)\|u_t^k\|^2+2\nu|u^k|_1^2+\frac{m\nu\tau}{2}(|u^k|_1^2)_t$$

$$-\frac{m\nu\tau^2}{2}|u_t^k|_1^2+m\tau(u_t^k,J^{(0)}(u^k))$$

$$\leqslant\tau^2\|u_t^k\|^2+\|u^k\|^2+\left(1+\frac{m^2}{4}\right)\|f^k\|^2. \qquad (12.33)$$

在本节中，用 c_i 表示某个正常数. 于是，由引理 4.2 得到

$$|m\tau(u_t^k,J^{(0)}(u^k))|\leqslant\tau\|u_t^k\|^2+c_1\lambda hm^2\|u^k\|^2|u^k|_1^2,$$

又有

$$\frac{\nu m\tau^2}{2}|u_t^k|_1^2\leqslant 2\lambda\nu m\tau\|u_t^k\|^2.$$

把上述估计式代入 (12.33)，就得到

$$\|u^k\|_t^2+\tau(m-2-\tau-2\lambda\nu m)\|u_t^k\|^2+(2\nu$$

$$-c_1\lambda hm^2\|u^k\|^2)|u^k|_1^2+\frac{m\nu\tau}{2}(|u^k|_1^2)_t$$

$$\leqslant\|u^k\|^2+\left(1+\frac{m^2}{4}\right)\|f^k\|^2.$$

由于 h, λ 适当小，因此

$$\|u^k\|^2+\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}(2\nu-c_1\lambda hm^2\|u^\xi\|^2)|u^\xi|_1^2$$

$$\leqslant\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}\|u^\xi\|^2+c_2\rho^{(0)}(k\tau).$$

由 U_0 和 f 的连续性和注记 4.10，即得所要证的结论.

命题 12.4 若 T 和 $\rho^{(1)}(T)$ 适当小，则存在正常数 M_1，使得当 $k\tau\leqslant T$ 时，$|u^k|_1^2\leqslant M_1$.

证明 把 (12.32) 对 x 求差商后得到

$$\begin{cases}u_{x,t}^k(x)+J^{(1)}(u^k(x))-\nu u_{xx\bar{x}}^k(x)=f_x^k(x), & x\in\mathscr{I}_h,k\geqslant 0,\\ u_x^k(x+1)=u_x^k(x), & x\in\mathscr{I}_h,k\geqslant 0,\\ u_x^0(x)=U_{0,x}(x), & x\in\mathscr{I}_h.\end{cases}$$

$$(12.34)$$

仿照前面的方法得到

$$(|u^k|_1^2)_t + \tau(m-1)|u_t^k|_1^2 + 2\nu|u^k|_2^2 + \frac{m\nu\tau}{2}(|u^k|_2^2)_t$$

$$-\frac{m\nu\tau^2}{2}|u_t^k|_2^2 + (2u_x^k + m\tau u_{xt}^k, J^{(1)}(u^k))$$

$$= (2u_x^k + m\tau u_{xt}^k, f_x^k). \tag{12.35}$$

根据 (4.51) 和引理 4.2 得到

$$|(2u_x^k, J^{(1)}(u^k))| \leqslant \nu|u^k|_2^2 + c_3\|u^k\|_\infty^2|u^k|_1^2$$

$$\leqslant \nu|u^k|_2^2 + c_4(\|u^k\|^2|u^k|_1^2 + |u^k|_1^4),$$

$$|m\tau(u_{xt}^k, J^{(1)}(u^k))|$$

$$\leqslant \tau|u_t^k|_1^2 + c_5\lambda hm^2(\|u^k\|^2|u^k|_2^2 + |u^k|_1^4).$$

把它们代入 (12.35) 后得到

$$(|u^k|_1^2)_t + \tau(m-2-\tau-2\lambda\nu m)|u_t^k|_1^2$$

$$+ (\nu - c_5\lambda hm^2\|u^k\|^2)|u^k|_2^2 + \frac{m\nu\tau}{2}(|u^k|_2^2)_t$$

$$\leqslant c_6((1+\|u^k\|^2)|u^k|_1^2 + |u^k|_1^4 + |f^k|_1^2).$$

因为 $\|u^k\|^2 \leqslant M_0$，所以当 h 充分小时，

$$|u^k|_1^2 \leqslant c_7\rho^{(1)}(k\tau) + c_8\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}(|u^\xi|_1^2 + |u^\xi|_1^4).$$

最后则应用了注记 4.10.

命题 12.5 若 T 和 $\rho^{(2)}(T)$ 适当小，则存在正常数 M_2，使得当 $k\tau \leqslant T$ 时，$|u^k|_2^2 \leqslant M_2$.

证明 由 (12.34) 得到

$$u_{xxt}^k(x) + J^{(2)}(u^k(x)) - \nu u_{xxx\bar{x}}^k(x) = f_{xx}^k(x). \tag{12.36}$$

可仿前得到

$$(|u^k|_2^2)_t + \tau(m-1)|u_t^k|_2^2 + 2\nu|u^k|_3^2 + \frac{m\nu\tau}{2}(|u^k|_3^2)_t$$

$$-\frac{m\nu\tau^2}{2}|u_t^k|_3^2 + (2u_{xx}^k + m\tau u_{xxt}^k, J^{(2)}(u^k))$$

$$= (2u_{xx}^k + m\tau u_{xxt}^k, f_{xx}^k). \tag{12.37}$$

因为

$$|2(u^k_{xx}, J^{(2)}(u^k))| \leqslant \nu|u^k|_3^2 + c_9(\|u^k\|_\infty^2 + \|u^k\|_{1,\infty}^2)|u^k|_2^2$$

$$\leqslant \nu|u^k|_3^2 + c_{10}(\|u^k\|^2 + |u^k|_1^2 + |u^k|_2^2)|u^k|_2^2,$$

$$|m\tau(u^k_{xxt}, J^{(2)}(u^k))| \leqslant \tau|u^k_{\bar{t}}|_2^2 + c_{11}m^2\|u^k\|_\infty^2|u^k|_2^2$$

$$\leqslant \tau|u^k_{\bar{t}}|_2^2 + c_{12}m^2(\|u^k\|^2 + |u^k|_1^2)|u^k|_2^2,$$

故由(12.37)和命题12.3, 12.4得到

$$(|u^k|_2^2)_{\bar{t}} + \frac{m\nu\tau}{2}(|u^k|_3^2)_{\bar{t}} \leqslant c_{13}(|u^k|_2^2 + |u^k|_3^2 + |f^k|_2^2),$$

并由此得到所证的结论.

命题 12.6 若T和$\rho^{(3)}(T)$适当小,则存在正常数M_3,使得当$k\tau \leqslant T$时,$|u^k|_3^2 \leqslant M_3$.

证明 由(12.36)得到

$$u^k_{xxxt}(x) + J^{(3)}(u^k(x)) - \nu u^k_{xxxx\bar{x}}(x) = f^k_{xxx}(x).$$

可仿前得到

$$(|u^k|_3^2)_{\bar{t}} + \tau(m-1)|u^k_{\bar{t}}|_3^2 + 2\nu|u^k|_4^2 + \frac{m\nu\tau}{2}(|u^k|_4^2)_{\bar{t}}$$

$$-\frac{m\nu\tau^2}{2}|u^k_{\bar{t}}|_4^2 + (2u^k_{xxx} + m\tau u^k_{xxxt}(x), J^{(3)}(u^k))$$

$$= (2u^k_{xxx} + m\tau u^k_{xxxt}, f^k_{xxx}).$$

考虑到命题12.3—12.5和

$$|(2u^k_{xxx}, J^{(3)}(u^k))| \leqslant \nu|u^k|_4^2 + c_{14}(\|u^k\|_\infty^2$$

$$+ |u^k|_{1,\infty}^2 + |u^k|_{2,\infty}^2) \times |u^k|_3^2 + c_{15}|u^k|_2^2$$

$$\leqslant \nu|u^k|_4^2 + c_{16}(\|u^k\|^2 + |u^k|_1^2 + |u^k|_2^2$$

$$+ |u^k|_3^2)|u^k|_3^2 + c_{15}|u^k|_2^2$$

等,就得到

$$(|u^k|_3^2)_{\bar{t}} + \frac{m\nu\tau}{2}(|u^k|_4^2)_{\bar{t}} \leqslant c_{17}(1 + |u^k|_3^2)|u^k|_3^2 + c_{18}|f^k|_3^2.$$

并由此推出所证的结论

命题 12.7 若T适当小,$\rho^{(4)}(T)$和$\rho^{(5)}(T)$有界,则存在正常数M_4, M_5,使得当$k\tau \leqslant T$时,$|u^k|_4^2 \leqslant M_4$, $|u^k|_5^2 \leqslant M_5$.

根据命题12.2—12.7和(4.51),当$0 \leqslant l \leqslant 4$时,$\|u^k\|_{l,\infty}$一致有界. 又由(12.32), $\|u^k_{\bar{t}}\|_\infty$也一致有界. 把(12.32)对t求差

商，并把(12.32)代入所得式子的右端，那末 $\|u_{\bar{t}}^k\|_\infty$ 也一致有界.

现在把 $u^k(x)$ 线性插值为连续函数 $U_h(x,t)$，那末 $\{U_h(x,t)\}$，$\{U_{h,x}(x,t)\}$，$\{U_{h,xx}(x,t)\}$ 和 $\{U_{h,t}(x,t)\}$ 都是一致有界并且等度连续的．由 Arzela 引理，可从中选取子列，使得当 $h\to 0$ 时，它们分别一致收敛到 $U(x,t)$，$V_1(x,t)$，$V_2(x,t)$ 和 $W(x,t)$．还可证明 $V_1=\dfrac{\partial U}{\partial x}$，$V_2=\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$，$W=\dfrac{\partial U}{\partial t}$，最后在(12.32)中取极限，即知 $U(x,t)$ 满足(12.27)，初始条件显然是满足的.

假定(12.27)有两个古典解 U_1 和 U_2．令 $\widetilde{U}=U_1-U_2$，则有

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \widetilde{U}}{\partial t}+\widetilde{U}\dfrac{\partial \widetilde{U}}{\partial x}+U_2\dfrac{\partial \widetilde{U}}{\partial x}+\widetilde{U}\dfrac{\partial U_2}{\partial x}-\nu\dfrac{\partial^2 \widetilde{U}}{\partial x^2}=0, \\
\qquad\qquad 0<x<1,\ 0<t\leqslant T, \\
\widetilde{U}(x+1,t)=\widetilde{U}(x,t), \qquad 0<x<1,\ 0\leqslant t\leqslant T, \\
\widetilde{U}(x,0)=0, \qquad 0\leqslant x\leqslant 1.
\end{cases}
$$

把上式对 $\widetilde{U}$ 求内积后得到

$$
\begin{aligned}
&\|\widetilde{U}(t)\|^2_{L^2(I)}+2\nu\int_0^t|\widetilde{U}(\xi)|^2_{H^1(I)}d\xi \\
&\quad=-\int_0^t\int_0^1\widetilde{U}^2(x,\xi)\frac{\partial U_2(x,\xi)}{\partial x}dxd\xi \\
&\quad\leqslant c_{19}\int_0^t\|\widetilde{U}(\xi)\|^2_{L^2(I)}d\xi,
\end{aligned}
$$

由此即可推得 $\widetilde{U}(x,t)\equiv 0$.

综合上面的结果后得到下面的定理.

定理 12.13 若 U_0 和 f 对 x 有连续的五阶偏导数，f 对 t 有连续的一阶偏导数，T，$\rho^{(1)}(T)$，$\rho^{(2)}(T)$ 和 $\rho^{(3)}(T)$ 适当小，则问题(12.27)有唯一的古典解.

12.5 Burgers 方程二次守恒型格式的误差估计

下面来建立格式(12.32)的误差估计式．假设 $u^k(x)$ 和 $f^k(x)$ 发生误差 $\tilde{u}^k(x)$ 和 $\tilde{f}^k(x)$，那末它们满足下列方程

$$\tilde{u}_t^k(x) + J(\tilde{u}^k(x) + \delta\tau\tilde{u}_t^k(x), u^k(x) + \tilde{u}^k(x)) + J(u^k(x) + \delta\tau u_t^k(x), \tilde{u}^k(x)) - \nu(\tilde{u}^k(x) + \sigma\tau\tilde{u}_t^k(x))_{xx} = \tilde{f}^k(x). \tag{12.38}$$

把上式对 $\tilde{u}^k(x)$ 求内积，由引理 4.10，4.12，4.13 和 (6.28) 得到

$$\|\tilde{u}^k\|_t^2 - \tau\|\tilde{u}_t^k\|^2 + 2\nu|\tilde{u}^k|_1^2 + \nu\sigma\tau(|\tilde{u}^k|_1^2)_t - \nu\sigma\tau^2|\tilde{u}_t^k|_1^2 + F_1^k + F_2^k + F_3^k - 2\nu B(\tilde{u}^k, \tilde{u}^k) - 2\nu\sigma\tau B(\tilde{u}^k, \tilde{u}_t^k) = 2(\tilde{u}^k, f^k), \tag{12.39}$$

其中

$$F_1^k = 2(\tilde{u}^k, J(\tilde{u}^k, u^k + \tilde{u}^k)) - G(\tilde{u}^k, \tilde{u}^k, u^k + \tilde{u}^k),$$
$$F_2^k = 2\delta\tau(\tilde{u}^k, J(\tilde{u}_t^k, u^k + \tilde{u}^k)),$$
$$F_3^k = 2(\tilde{u}^k, J(u^k + \delta\tau u_t^k, \tilde{u}^k)).$$

再把 (12.38) 对 $m\tau\tilde{u}_t^k(x)$ 求内积，则得到

$$m\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2 + m\nu\sigma\tau^2|\tilde{u}_t^k|_1^2 + \frac{m\nu\tau}{2}(|\tilde{u}^k|_1^2)_t - \frac{m\nu\tau^2}{2}|\tilde{u}_t^k|_1^2 + F_4^k + F_5^k + F_6^k - m\nu\tau B(\tilde{u}_t^k, \tilde{u}^k) - m\nu\sigma\tau^2 B(\tilde{u}_t^k, \tilde{u}_t^k) = m\tau(\tilde{u}_t^k, f^k), \tag{12.40}$$

其中

$$F_4^k = m\delta\tau^2(\tilde{u}_t^k, J(\tilde{u}_t^k, u^k + \tilde{u}^k)) - \frac{1}{2}m\delta\tau^2 G(\tilde{u}_t^k, \tilde{u}_t^k, u^k + \tilde{u}^k),$$
$$F_5^k = m\tau(\tilde{u}_t^k, J(\tilde{u}^k, u^k + \tilde{u}^k)),$$
$$F_6^k = m\tau(\tilde{u}_t^k, J(u^k + \delta\tau u_t^k, \tilde{u}^k)).$$

把以上两式相加后得到

$$\|\tilde{u}^k\|_t^2 + \tau(m - 1 - \varepsilon)\|\tilde{u}_t^k\|^2 + 2\nu|\tilde{u}^k|_1^2 + \nu\tau\left(\sigma + \frac{m}{2}\right)(|\tilde{u}^k|_1^2)_t + \nu\tau^2\left(m\sigma - \frac{m}{2} - \sigma\right)|\tilde{u}_t^k|_1^2$$
$$+ \sum_{l=1}^{6} F_l^k - 2\nu B(\tilde{u}^k, \tilde{u}^k) - 2\nu\sigma\tau B(\tilde{u}^k, \tilde{u}_t^k) - m\nu\tau B(\tilde{u}_t^k, \tilde{u}^k) - m\nu\sigma\tau^2 B(\tilde{u}_t^k, \tilde{u}_t^k)$$

$$\leqslant M_1\left(1+\frac{m^2}{\varepsilon}\right)\|\tilde{f}^k\|^2, \tag{12.41}$$

这里的 M_1 和今后的 M_i 表示某些正常数，它可能依赖于 u. 此外，如果所讨论的问题在 x 方向有周期 1，则总假定 $Jh = 1 + h$，并且 $\phi(\tilde{u}^k) = 0$；否则 $Jh = 1$，并且有

$$\phi(\tilde{u}^k) \leqslant \min(h(\tilde{u}_x^k(0))^2 + h(\tilde{u}_{\bar{x}}^k(1))^2, h^{-1}(\tilde{u}^k(0))^2 + h^{-1}(\tilde{u}^k(1))).$$

下面来估计 $|F_j^k|$. 首先由 (6.28) 得到

$$F_2 + F_5 = \tau(m - 2\delta)(\tilde{u}_t^k, J(\tilde{u}^k, u^k + \tilde{u}^k)) + F_7^k,$$

其中

$$F_7^k = 2\delta\tau G(\tilde{u}_t^k, \tilde{u}^k, u^k + \tilde{u}^k).$$

因此由引理 4.2 得到

$$|F_2^k| + |F_5^k| \leqslant \varepsilon\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2 + M_2(\|\tilde{u}^k\|^2 + \nu h(m - 2\delta)^2\|\tilde{u}^k\|^2|\tilde{u}^k|_1^2 + \tau\phi(\tilde{u}^k)) + |F_7^k|.$$

又有

$$|F_3^k| + |F_6^k| \leqslant \varepsilon\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2 + \varepsilon\nu|\tilde{u}^k|_1^2 + M_3(\|\tilde{u}^k\|^2 + \tau\phi(\tilde{u}^k)).$$

把以上各估计式代入 (12.41)，就得到基本的误差估计式

$$\begin{aligned}
&\|\tilde{u}^k\|_t^2 + \tau(m - 1 - 3\varepsilon)\|\tilde{u}_t^k\|^2 + \nu|\tilde{u}^k|_1^2 \\
&\quad + \tau\nu\left(\sigma + \frac{m}{2}\right)(|\tilde{u}^k|_1^2)_t + \nu\tau^2\left(m\sigma - \frac{m}{2} - \sigma\right)|\tilde{u}_t^k|_1^2 \\
&\quad - 2\nu B(\tilde{u}^k, \tilde{u}^k) - 2\nu\sigma\tau B(\tilde{u}^k, \tilde{u}_t^k) \\
&\quad - m\nu\tau B(\tilde{u}_t^k, \tilde{u}^k) - m\nu\sigma\tau^2 B(\tilde{u}_t^k, \tilde{u}_t^k) \\
&\leqslant \tilde{R}_0^k + |F_1^k| + |F_4^k| + |F_7^k| + M_4(\|\tilde{f}^k\|^2 \\
&\quad + \tau\phi(\tilde{u}^k)),
\end{aligned} \tag{12.42}$$

其中

$$\tilde{R}_0^k = M_5\|\tilde{u}^k\|^2 + \nu(-1 + \varepsilon + hM_2(m - 2\delta)^2\|\tilde{u}^k\|^2)|\tilde{u}^k|_1^2.$$

先考虑周期解问题，此时 $\tilde{u}^k(x+1) = \tilde{u}^k(x)$，因此

$$B(\tilde{u}^k, \tilde{u}^k) = B(\tilde{u}^k, \tilde{u}_t^k) = B(\tilde{u}_t^k, \tilde{u}^k) = B(\tilde{u}_t^k, \tilde{u}_t^k) = \phi(\tilde{u}^k) = F_1^k = F_4^k = F_7^k = 0,$$

从而由 (12.42) 得到

$$\|\tilde{u}^k\|_t^2 + \tau(m-1-3\varepsilon)\|\tilde{u}_t^k\|^2 + \nu|\tilde{u}^k|_1^2$$
$$+ \tau\nu\left(\sigma + \frac{m}{2}\right)(|\tilde{u}^k|_1^2)_t + \nu\tau^2\left(m\sigma - \frac{m}{2} - \sigma\right)|\tilde{u}_t^k|_1^2$$
$$\leqslant \tilde{R}_0^k + M_4\|\tilde{f}^k\|^2.$$

设 p_0 是正常数，下面分三种情况选择 m。

(i) $\sigma > \frac{1}{2}$，此时取 $m \geqslant m_1$，

$$m_1 = \max\left(1 + 3\varepsilon + p_0, \frac{2\sigma}{2\sigma - 1}\right),$$

于是

$$\|\tilde{u}^k\|_t^2 + p_0\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2 + \nu|\tilde{u}^k|_1^2 + \tau\nu\left(\sigma + \frac{m}{2}\right)(|\tilde{u}^k|_1^2)_t$$
$$\leqslant \tilde{R}_0^k + M_4\|\tilde{f}^k\|^2. \tag{12.43}$$

记

$$\tilde{E}^k = \|\tilde{u}^k\|^2 + p_0\tau^2\sum_{\xi=0}^{k-1}\|\tilde{u}_t^\xi\|^2 + \nu\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}|\tilde{u}^\xi|_1^2,$$

$$\tilde{\rho}(k\tau) = \|\tilde{u}^0\|^2 + \tau\sum_{\xi=0}^{k-1}\|\tilde{f}^\xi\|^2,$$

把 (12.43) 对 k 求和后得到

$$\tilde{E}^k \leqslant M_6\tilde{\rho}(k\tau) + \tau\sum_{\xi=0}^{k-1}\tilde{R}_0^\xi.$$

最后在注记 4.10 中令 $E^k = \tilde{E}^k$, $N_1 = 0$, $N_2 = 1$, $d_1 = -1$,

$$H_1(E^0, \cdots, E^k) = \nu(-1 + \varepsilon + M_2h(m-2\delta)^2|\tilde{u}^k\|^2)|\tilde{u}^k|_1^2,$$

于是，存在正常数 M_7，使得当 $\tilde{\rho}(T)e^{M_8T} \leqslant M_7h^{-1}$, $k\tau \leqslant T$ 时，

$$\tilde{E}^k \leqslant M_9\tilde{\rho}(k\tau)e^{M_8k\tau}.$$

(ii) $\sigma = \frac{1}{2}$，此时取 $m \geqslant m_2$，

$$m_2 = 1 + 3\varepsilon + p_0 + 2\lambda\nu.$$

由于 $\tau|\tilde{u}_t^k|_1^2 \leqslant 4\lambda\|\tilde{u}_t^k\|^2$，故得到

$$\tau(m-1-3\varepsilon)\|\tilde{u}_t^k\|^2 + \nu\tau^2\left(m\sigma - \frac{m}{2} - \sigma\right)|\tilde{u}_t^k|_1^2$$
$$\geqslant p_0\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2, \tag{12.44}$$

所以 (12.43) 及以后的结论都成立.

(iii) $\sigma < \frac{1}{2}$, $\lambda < \frac{1}{2\nu(1-2\sigma)}$, 此时取 $m \geqslant m_3$,

$$m_3 = \frac{1 + 3\varepsilon + 4\lambda\nu\sigma + p_0}{1 + 2\lambda\nu(2\sigma - 1)},$$

从而 (12.44) 成立,并由此推得 (12.43).

特别若

$$\delta \geqslant \begin{cases} \frac{m_1}{2}, & \text{当 } \sigma > \frac{1}{2}, \\ \frac{m_2}{2}, & \text{当 } \sigma = \frac{1}{2}, \\ \frac{m_3}{2}, & \text{当 } \sigma < \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{12.45}$$

则可取 $m = 2\delta$, 因而在应用注记 4.10 时,相应的 H_k 总是非正的,所以对一切 k 和 $\tilde{\rho}(k\tau)$, 都有

$$\tilde{E}^k \leqslant M_9\tilde{\rho}(k\tau)e^{M_8 k\tau}.$$

定理 12.14 若 (12.32) 满足周期条件,

$$\sigma \geqslant \frac{1}{2} \quad 或 \quad \lambda < \frac{1}{2\nu(1-2\sigma)},$$

则存在正常数 M_7, 使得当 $\tilde{\rho}(T)e^{M_8 T} \leqslant M_7 h^{-1}$, $k\tau \leqslant T$ 时,

$$\tilde{E}^k \leqslant M_9\tilde{\rho}(k\tau)e^{M_8 k\tau}.$$

如果还满足条件 (12.45), 则对一切 k 和 $\tilde{\rho}(k\tau)$, 上述估计式都成立.

注记 12.3 根据定理 12.14, 格式 (12.32) 具有广义稳定性指标 $s \leqslant -0.5$. 若还满足条件 (12.45), 则 $s = -\infty$. 显然, 线性项的参数 σ 只能减弱对步长比 λ 的限制,而非线性项的参数 δ, 则可能从本质上改善格式的稳定性.

注记 12.4 若 ν 是函数,且 $\nu \geqslant 0$, 则 (12.32) 是退化型抛物型格式. 综合 § 6.3 和上面的证明方法,可得到 $s \leqslant 0.5$, 详见郭本瑜 (1981) 的文章.

下面讨论 Burgers 方程的初、边值问题. 一般来说,边值误差

对解的误差的影响要比初值或右端误差更显著，所以情况就复杂得多了．郭本瑜 (1982b) 详细地讨论了这个问题．先考虑第一类边值问题，并假定边界误差为

$$\tilde{u}^k(0)=\tilde{g}_0^k,\quad \tilde{u}^k(1)=\tilde{g}_1^k,\qquad k\geqslant 0. \tag{12.46}$$

由于

$$|(\tilde{u}^k(0))^2\tilde{u}^k(h)|\leqslant\frac{\varepsilon\nu}{4h}(\tilde{u}^k(h))^2+\frac{h}{\varepsilon\nu}(\tilde{g}_0^k)^4,$$

$$|\tilde{u}^k(0)(\tilde{u}^k(h))^2|\leqslant\frac{\varepsilon\nu}{4h}(\tilde{u}^k(h))^2+\frac{h}{\varepsilon\nu}(\tilde{g}_0^k)^2(\tilde{u}^k(h))^2,$$

$$|\tilde{u}^k(0)\tilde{u}^k(h)|\leqslant\frac{\varepsilon\nu}{4h}(\tilde{u}^k(h))^2+\frac{h}{\varepsilon\nu}(\tilde{g}_0^k)^2.$$

等等，因此

$$\begin{aligned}|F_1^k|\leqslant{}&\frac{\varepsilon\nu}{h}((\tilde{u}^k(h))^2+(\tilde{u}^k(1-h))^2)+\frac{M_{10}\nu h}{\varepsilon}((\tilde{g}_0^k)^2(\tilde{u}^k(h))^2\\&+(\tilde{g}_1^k)^2(\tilde{u}^k(1-h))^2)+\frac{M_{10}h}{\varepsilon}((\tilde{g}_0^k)^2+(\tilde{g}_1^k)^2\\&+(\tilde{g}_0^k)^4+(\tilde{g}_1^k)^4).\end{aligned} \tag{12.47}$$

类似地有

$$\begin{aligned}|F_4^k|\leqslant{}&\frac{\varepsilon\nu\tau^2}{h}((\tilde{u}_t^k(h))^2+(\tilde{u}_t^k(1-h))^2)\\&+\frac{M_{11}\nu h\tau^2}{\varepsilon}((\tilde{g}_{0t}^k)^2(\tilde{u}^k(h))^2+(\tilde{g}_{1t}^k)^2(\tilde{u}^k(1-h))^2)\\&+\frac{M_{11}\nu h\tau^2}{\varepsilon}((\tilde{g}_{0t}^k)^2+(\tilde{g}_{1t}^k)^2+(\tilde{g}_0^k)^2(\tilde{g}_{0t}^k)^2\\&+(\tilde{g}_1^k)(\tilde{g}_{1t}^k)^2),\end{aligned} \tag{12.48}$$

$$\begin{aligned}|F_7^k|\leqslant{}&\frac{\varepsilon\nu}{h}((\tilde{u}^k(h))^2+(\tilde{u}^k(1-h))^2)\\&+\frac{M_{12}\varepsilon\nu\tau^2}{h}((\tilde{u}_t^k(h))^2+(\tilde{u}_t^k(1-h))^2)\\&+\frac{M_{12}\nu h}{\varepsilon}((\tilde{g}_0^k)^2(\tilde{u}^k(h))^2+(\tilde{g}_1^k)^2(\tilde{u}^k(1-h))^2)\\&+\frac{M_{12}\nu h\tau^2}{\varepsilon}((\tilde{g}_{0t}^k)^2(\tilde{u}^k(h))^2+(\tilde{g}_{1t})^2(\tilde{u}^k(1-h))^2)\end{aligned}$$

$$+\frac{M_{13}h}{\varepsilon}((\tilde{g}_0^k)^2+(\tilde{g}_1^k)^2+(\tilde{g}_0^k)^4+(\tilde{g}_1^k)^4+\tau^2(\tilde{g}_{0t}^k)^2$$

$$+\tau^2(\tilde{g}_{1t}^k)^2+\tau^2(\tilde{g}_0^k)^2(\tilde{g}_{0t}^k)^2+\tau^2(\tilde{g}_1^k)^2(\tilde{g}_{1t}^k)^2). \qquad (12.49)$$

又有

$$-2\nu B(\tilde{u}^k,\tilde{u}^k)=\frac{\nu}{h}((\tilde{u}^k(h))^2+(\tilde{u}^k(1-h))^2$$

$$-(\tilde{g}_0^k)^2-(\tilde{g}_1^k)^2), \qquad (12.50)$$

$$-m\nu\sigma\tau^2(\tilde{u}_t^k,\tilde{u}_t^k)=\frac{m\nu\sigma\tau^2}{2h}((\tilde{u}_t^k(h))^2+(\tilde{u}_t^k(1-h))^2$$

$$-(\tilde{g}_{0t}^k)^2-(\tilde{g}_{1t}^k)^2). \qquad (12.51)$$

此外，因为

$$-2\nu\sigma\tau B(\tilde{u}^k,\tilde{u}_t^k)=\frac{\nu\sigma\tau}{h}(\tilde{u}^k(h)\tilde{u}_t^k(h)$$

$$+\tilde{u}^k(1-h)\tilde{u}_t^k(1-h)+\tilde{g}_0^k\tilde{u}_t^k(h)$$

$$-\tilde{g}_{0t}^k\tilde{u}^k(h)+\tilde{g}_1^k\tilde{u}_t^k(1-h)-\tilde{g}_{1t}^k\tilde{u}^k(1-h)$$

$$-\tilde{g}_0^k\tilde{g}_{0t}^k-\tilde{g}_1^k\tilde{g}_{1t}^k),$$

$$\tilde{u}^k(x)\tilde{u}_t^k(x)=\frac{1}{2}[(\tilde{u}^k(x))^2]_t-\frac{\tau}{2}(\tilde{u}_t^k(x))^2,$$

所以得到

$$-2\nu\sigma\tau B(\tilde{u}^k,\tilde{u}_t^k)\geqslant\frac{\nu\sigma\tau}{2h}((\tilde{u}^k(h))^2+(\tilde{u}^k(1-h))^2)_t$$

$$-\frac{\nu\sigma\tau^2}{2h}((\tilde{u}_t^k(h))^2+(\tilde{u}_t^k(1-h))^2)-\frac{\nu\varepsilon}{h}((\tilde{u}^k(h))^2$$

$$+(\tilde{u}^k(1-h))^2+\tau^2(\tilde{u}_t^k(h))^2+\tau^2(\tilde{u}_t^k(1-h))^2)$$

$$-\frac{M_{13}}{\varepsilon h}((\tilde{g}_0^k)^2+(\tilde{g}_1^k)^2+\tau^2(\tilde{g}_{0t}^k)^2+\tau^2(\tilde{g}_{1t}^k)^2). \qquad (12.52)$$

类似地有

$$-m\nu\tau B(\tilde{u}_t^k,\tilde{u}^k)\geqslant\frac{m\nu\tau}{4h}((\tilde{u}^k(h))^2+(\tilde{u}^k(1-h))^2)_t$$

$$-\frac{m\nu\tau^2}{4h}((\tilde{u}_t^k(h))^2+(\tilde{u}_t^k(1-h))^2)-\frac{\nu\varepsilon}{h}((\tilde{u}^k(h))^2$$

$$+(\tilde{u}^k(1-h))^2+\tau^2(\tilde{u}_t^k(h))^2+\tau^2(\tilde{u}_t^k(1-h))^2)$$

$$-\frac{M_{14}}{\varepsilon h}((\tilde{g}_0^k)^2+(\tilde{g}_1^k)^2+\tau^2(\tilde{g}_{0t}^k)^2+\tau^2(\tilde{g}_{1t}^k)^2). \quad (12.53)$$

把 (12.47)—(12.53) 代入 (12.42) 后有

$$\|\tilde{u}^k\|_t^2+\tau(m-1-3\varepsilon)\|\tilde{u}_t^k\|^2+\nu|\tilde{u}^k|_1^2$$
$$+\nu\tau\left(\sigma+\frac{m}{2}\right)(|\tilde{u}^k|_1^2)_t+\nu\tau^2\left(m\sigma-\frac{m}{2}-\sigma\right)|\tilde{u}_t^k|_1^2$$
$$+\frac{\nu}{h}\left(1-M_{15}\varepsilon-\frac{M_{16}h^2}{\varepsilon}((\tilde{g}_0^k)^2+(\tilde{g}_1^k)^2\right.$$
$$\left.+\tau^2(\tilde{g}_{0t}^k)^2+\tau^2(\tilde{g}_{1t}^k)^2)\right)((\tilde{u}^k(h))^2+(\tilde{u}^k(1-h))^2)$$
$$+\frac{\nu\tau}{2h}\left(\sigma+\frac{m}{2}\right)((\tilde{u}^k(h))^2+(\tilde{u}^k(1-h))^2)_t$$
$$+\frac{\nu\tau^2}{2h}\left(\sigma m-\frac{m}{2}-\sigma-M_{17}\varepsilon\right)((\tilde{u}_t^k(h))^2$$
$$+(\tilde{u}_t^k(1-h))^2)\leqslant R_0^k+R_1^k, \quad (12.54)$$

其中的 R_0^k 就是 (12.42) 中的 R_0^k，而

$$R_1^k=M_4\|\tilde{f}^k\|^2+\frac{M_{18}}{h}((\tilde{g}_0^k)^2+(\tilde{g}_1^k)^2+(\tilde{g}_0^{k+1})^2$$
$$+(\tilde{g}_1^{k+1})^2)+M_{19}h((\tilde{g}_0^k)^4+(\tilde{g}_1^k)^4$$
$$+\tau^2(\tilde{g}_0^k)^2(\tilde{g}_{0t}^k)^2+\tau^2(\tilde{g}_1^k)^2(\tilde{g}_{1t}^k)^2).$$

下面假定 ε 适当小，并存在依赖于 u 的适当小的正数 M_{20}，使得对一切 $k\tau\leqslant T$，

$$|\tilde{g}_0^k|^2\leqslant\frac{M_{20}}{h}, \qquad |\tilde{g}_1^k|^2\leqslant\frac{M_{20}}{h}. \quad (12.55)$$

下面分三种情况来选择 m 值。

(i) $\sigma>\frac{1}{2}$，此时取 $m\geqslant\bar{m}_1$，

$$\bar{m}_1=\max\left(1+3\varepsilon+p_0, \frac{2\sigma+2M_{17}\varepsilon}{2\sigma-1}\right),$$

于是由 (12.54) 得到

$$\|\tilde{u}^k\|_t^2+p_0\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2+\nu|\tilde{u}^k|_1^2+\nu\tau\left(\sigma+\frac{m}{2}\right)(|\tilde{u}^k|_1^2)_t$$

$$+\frac{\nu\tau}{2h}\left(\sigma+\frac{m}{2}\right)((\tilde{u}^k(h))^2+(\tilde{u}^k(1-h))^2)_t$$

$$\leqslant \tilde{R}_0^k+\tilde{R}_1^k. \tag{12.56}$$

$\tilde{E}^k$ 的定义同定理 12.14，又记

$$\tilde{\rho}_1(k\tau)=\|\tilde{u}^0\|^2+\tau\sum_{\xi=0}^{k}(\|\tilde{f}^\xi\|^2+h^{-1}(\tilde{g}_0^\xi)^2$$

$$+h^{-1}(\tilde{g}_1^\xi)^2+h(\tilde{g}_0^\xi)^4+h(\tilde{g}_1^\xi)^4).$$

把 (12.56) 对 k 求和后得到

$$\tilde{E}^k\leqslant M_{21}\tilde{\rho}_1(k\tau)+\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}\tilde{R}_0^\xi.$$

最后在注记 4.10 中令 $E^k=\tilde{E}^k$, $N_1=0$, $N_2=1$, $d_1=-1$, 并且由此得到依赖于 u 的正常数 M_{22}, 使得当 $\tilde{\rho}_1(T)e^{M_{23}T}\leqslant M_{22}h^{-1}$, $k\tau\leqslant T$ 时,

$$\tilde{E}^k\leqslant M_{24}\tilde{\rho}_1(k\tau)e^{M_{23}k\tau}.$$

(ii) $\sigma=\frac{1}{2}$, 此时取 $m\geqslant\bar{m}_2$,

$$\bar{m}_2=1+3\varepsilon+p_0+\frac{9\lambda\nu}{4}+\frac{\lambda\nu M_{17}\varepsilon}{2}.$$

由于

$$\frac{\nu\tau}{2h}((\tilde{u}_t^k(h))^2+(\tilde{u}_t^k(1-h))^2)\leqslant\frac{\lambda\nu}{2}\|\tilde{u}_t^k\|^2,$$

因此

$$\tau(m-1-3\varepsilon)\|\tilde{u}_t^k\|^2+\nu\tau^2\left(m\sigma-\frac{m}{2}-\sigma\right)|\tilde{u}_t^k|_1^2$$

$$+\frac{\nu\tau^2}{2h}\left(m\sigma-\frac{m}{2}-\sigma-M_{17}\varepsilon\right)((\tilde{u}_t^k(h))^2$$

$$+(\tilde{u}_t^k(1-h))^2)\geqslant p_0\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2, \tag{12.57}$$

由此即可推得 (12.56).

(iii) $\sigma<\frac{1}{2}$, $\lambda<\frac{4}{9\nu(1-2\sigma)}$, 此时取 $m\geqslant\bar{m}_3$,

$$\bar{m}_3=\frac{4+12\varepsilon+18\lambda\nu\sigma+4p_0+2\lambda\nu M_{17}\varepsilon}{4+18\lambda\nu\sigma-9\lambda\nu}.$$

于是 (12.57) 仍然成立.

特别若

$$\delta \geqslant \begin{cases} \dfrac{\bar{m}_1}{2}, & \text{当 } \sigma > \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{\bar{m}_2}{2}, & \text{当 } \sigma = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{\bar{m}_3}{2}, & \text{当 } \sigma < \dfrac{1}{2}, \end{cases} \tag{12.58}$$

则可取 $m = 2\delta$, 从而对一切 k 和 $\tilde{\rho}_1(k\tau)$, 都有

$$\tilde{E}^k \leqslant M_{23}\tilde{\rho}_1(k\tau)e^{M_{24}k\tau}.$$

定理 12.15 若在格式 (12.32), (12.46) 中,

$$\sigma \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{或} \quad \lambda < \frac{4}{9\nu(1-2\sigma)},$$

并且 (12.55) 成立, 那末存在正数 M_{22}, 使得当

$$\tilde{\rho}_1(T)e^{M_{23}T} \leqslant M_{22}h^{-1}, \qquad k\tau \leqslant T$$

时,

$$\tilde{E}^k \leqslant M_{24}\tilde{\rho}_1(k\tau)e^{M_{23}k\tau}.$$

如果还满足条件 (12.58), 则对一切 k 和 $\tilde{\rho}_1(k\tau)$, 上述估计式都成立.

注记 12.5 根据定理 12.15, 通常要求边值误差比右端及初始误差小 $h^{\frac{1}{2}}$ 倍, 这是与计算经验相吻合的. 关于边值误差影响的数值研究, 可参见 Southwell (1946), Allen, Southwell (1955), Thom, Apelt (1961), Moretti (1968), Cheng (1968, 1970) 和 Roache (1972, 1976) 等人的文章.

下面来讨论第二类边值问题. 为简便计, 设在 (12.32) 中 $\delta = \sigma = 0$, 并且边值误差满足

$$\tilde{u}_{\bar{x}}^k(0) = -\tilde{g}_0^k, \quad \tilde{u}_{\bar{x}}^k(1) = \tilde{g}_1^k, \tag{12.59}$$

于是, 在 (12.41) 中 $F_2^k = F_4^k = 0$, $|F_3^k|$ 和 $|F_6^k|$ 的估计同前. 又由引理 4.2 得到

$$|F_1^k| \leqslant \varepsilon\nu|\tilde{u}^k|_1^2 + M_{25}(h^{-1}\|\tilde{u}^k\|^4 + (1 + h^2(\tilde{g}_0^k)^2 + h^2(\tilde{g}_1^k)^2)\|u^k\|^2),$$

$$|F_5^k| \leqslant \varepsilon\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2 + M_{26}\tau(\|\tilde{u}^k\|^2 + (1 + h^2(\tilde{g}_0^k)^2 + h^2(\tilde{g}_1^k)^2)|\tilde{u}^k|_1^2 + h^{-1}\|\tilde{u}^k\|^2|\tilde{u}|_1^2).$$

此外

$$|-2\nu B(\tilde{u}^k, \tilde{u}^k)| \leqslant (\tilde{u}^k(0))^2 + (\tilde{u}^k(h))^2 + (\tilde{u}^k(1-h))^2 + (\tilde{u}^k(1))^2 + M_{27}((\tilde{g}_0^k)^2 + (\tilde{g}_1^k)^2),$$

故由引理 4.9 得到

$$|-2\nu B(\tilde{u}^k, \tilde{u}^k)| \leqslant \varepsilon\nu|\tilde{u}^k|_1^2 + M_{28}(\|\tilde{u}^k\|^2 + (\tilde{g}_0^k)^2 + (\tilde{g}_1^k)^2).$$

类似地有

$$|-m\nu\tau B(\tilde{u}_t, \tilde{u}^k)| \leqslant \varepsilon\nu\tau^2|\tilde{u}_t^k|_1^2 + M_{29}\tau^2\|\tilde{u}_t^k\|^2 + M_{30}((\tilde{g}_0^k)^2 + (\tilde{g}_1^k)^2 + \tau^2(\tilde{g}_{0t}^k)^2 + \tau^2(\tilde{g}_{1t}^k)^2).$$

把上面各估计式代入 (12.41) 后得到

$$\|\tilde{u}^k\|_t^2 + \tau(m - 1 - 3\varepsilon - M_{31}\tau)\|\tilde{u}_t^k\|^2 + \nu|\tilde{u}^k|_1^2 + \frac{m\nu\tau}{2}(|\tilde{u}^k|_1^2)_t - \nu\tau^2\left(\frac{m}{2} + \varepsilon\right)|\tilde{u}_t^k|_1^2 \leqslant \tilde{R}_2^k,$$

其中

$$\tilde{R}_2^k = M_{32}(1 + h^2(\tilde{g}_0^k)^2 + h^2(\tilde{g}_1^k)^2 + h^{-1}\|\tilde{u}^k\|^2)\|\tilde{u}^k\|^2 + \nu(-1 + 3\varepsilon + M_{33}(\tau + \tau h^2(\tilde{g}_0^k)^2 + \tau h^2(\tilde{g}_1^k)^2 + h\|\tilde{u}^k\|^2)|\tilde{u}^k|_1^2 + M_{34}(\|f^k\|^2 + |\tilde{g}_0^k|^2 + |\tilde{g}_1^k|^2 + |\tilde{g}_0^{k+1}|^2 + |\tilde{g}_1^{k+1}|^2).$$

最后可仿前面定理的证明过程得到下面的结果:

定理 12.16 若在格式 (12.32), (12.59) 中, $\delta = \sigma = 0$, $\lambda < \frac{1}{2\nu}$, $(\tilde{g}_0^k)^2 \leqslant M_{35}$, $(\tilde{g}_1^k)^2 \leqslant M_{35}$, 则存在正常数 M_{36}, 使得当

$$\tilde{\rho}_2(T)e^{M_{37}T} \leqslant M_{36}h, \qquad k\tau \leqslant T$$

时,

$$\tilde{E}^k \leqslant M_{38}\tilde{\rho}_2(k\tau)e^{M_{37}k\tau},$$

其中 $\tilde{E}^k$ 如前,

$$\tilde{\rho}_2(k\tau) = \|\tilde{u}^0\|^2 + \tau\sum_{\xi=0}^{k}(\|\tilde{f}^\xi\|^2 + (\tilde{g}_0^\xi)^2 + (\tilde{g}_1^\xi)^2).$$

类似地可讨论第三类边值问题, 并可由这些结果得到相应的收敛性定理. 此外,尚可仿照 11.4 中的方法估计 $|\tilde{u}^k|_1^2$.

12.6 Burgers 方程的特征型格式，大 Reynolds 数流动问题

如果 Burgers 方程中的 Reynolds 数很大，即 ν 很小，那末一次导数项 $U\dfrac{\partial U}{\partial x}$ 的作用就会很显著. 利用中心差商建立的差分格式，有时会出现失真现象，如果仿照解双曲型方程的方法，根据传输定律来逼近 $U\dfrac{\partial U}{\partial x}$，有时会获得较好的数值结果. 最简单的特征型格式是

$$u_t^k(x) + F_0(u^k(x)) - \nu u_{\bar{x}x}^k(x) = f^k(x), \qquad (12.60)$$

其中

$$F_0(u^k(x)) = \begin{cases} u^k(x)u_{\bar{x}}^k(x), & \text{当 } u^k(x) \geqslant 0, \\ u^k(x)u_x^k(x), & \text{当 } u^k(x) < 0. \end{cases}$$

这个格式也被称为逆风格式. 但是实际计算表明，有时数值结果并不好. 事实上，(12.60) 的物理意义不够确切. 不妨把 u 理解为风速，如果 $u^k(x) \geqslant 0$，就用 $u_{\bar{x}}^k(x)$ 逼近 $\dfrac{\partial U}{\partial x}$，所以 $u^{k+1}(x)$ 依赖于 $u^k(x-h)$. 但从物理角度来说，当 $u^k(x-h) \geqslant 0$ 时，在 t_k 时刻，点 $x-h$ 处风速是正向的，所以 $u^{k+1}(x)$ 应依赖于 $u^k(x-h)$，而 $u^k(x) \geqslant 0$ 并不意味着一定有 $u^k(x-h) \geqslant 0$. 根据上述思想，人们提出了各种新的特征型格式. 1965 年，郭本瑜提出了修正逆风法(见郭本瑜 (1976, 1982b))，它按四种不同情况，构造不同的 $F_1(u^k(x))$ 来逼近 $U\dfrac{\partial U}{\partial x}$，

情况 I　$u^k(x-h) \geqslant 0$，$u^k(x+h) > 0$，它表示 t_k 时刻的风由点 $x-h$ 运动到点 x，所以 $u^{k+1}(x)$ 应与 $u^k(x-h)$ 有关，故令

$$F_1(u^k(x)) = u^k(x-h)u_{\bar{x}}^k(x);$$

情况 II　$u^k(x-h) < 0$，$u^k(x+h) \leqslant 0$，此时令

$$F_1(u^k(x)) = u^k(x+h)u_x^k(x);$$

情况 III　$u^k(x-h) \geqslant 0$，$u^k(x+h) \leqslant 0$，它表示 t_k 时刻的风同时由点 $x-h$ 和点 $x+h$ 运动到点 x，所以 $u^k(x)$ 应与

$u^k(x-h)$ 和 $u^k(x+h)$ 都有关，所以令

$$F_1(u^k(x)) = \gamma u^k(x-h)u_{\bar{x}}^k(x) + (1-\gamma)u^k(x+h)u_x^k(x),$$
$$0 \leqslant \gamma \leqslant 1;$$

情况 IV　$u^k(x-h) \leqslant 0, u^k(x+h) \geqslant 0$. 此时令

$$F_1(u^k(x)) = 0.$$

计算 Burgers 方程的修正逆风格式是

$$u_t^k(x) + F_1(u^k(x)) - \nu u_{x\bar{x}}^k(x) = f^k(x). \qquad (12.61)$$

记

$$\tilde{F}_1(\tilde{u}^k(x)) = F_1(u^k(x) + \tilde{u}^k(x)) - F_1(u^k(x)),$$

则误差满足下列方程

$$\tilde{u}_t^k(x) + \tilde{F}_1(\tilde{u}^k(x)) - \nu \tilde{u}_{x\bar{x}}^k(x) = \tilde{f}^k(x).$$

下面分三种情况来估计 $|\tilde{F}_1(u^k(x))|$.

(i) $\tilde{u}^k(x)$ 不改变 $u^k(x)$ 的符号，例如

$$u^k(x-h) > 0,\ u^k(x+h) > 0,$$
$$u^k(x-h) + \tilde{u}^k(x-h) > 0,\ u^k(x+h) + \tilde{u}^k(x+h) > 0,$$

于是

$$\tilde{F}_1(\tilde{u}^k(x)) = \tilde{u}^k(x-h)\tilde{u}_{\bar{x}}^k(x) + \tilde{u}^k(x-h)u_{\bar{x}}^k(x) + u^k(x-h)\tilde{u}_{\bar{x}}^k(x).$$

(ii) $\tilde{u}^k(x)$ 改变了 $u^k(x)$ 的符号，但不改变情况 IV 的位置，例如

$$u^k(x-h) > 0,\ u^k(x+h) > 0,$$
$$u^k(x-h) + \tilde{u}^k(x-h) < 0,\ u^k(x+h) + \tilde{u}^k(x+h) < 0,$$

于是有

$$\begin{aligned}\tilde{F}_1(\tilde{u}^k(x)) &= (u^k(x+h) + \tilde{u}^k(x+h))(u_x^k(x) + \tilde{u}_x^k(x)) - u^k(x-h)u_{\bar{x}}^k(x) \\ &= \tilde{u}^k(x+h)\tilde{u}_x^k(x) + \tilde{u}^k(x+h)u_x^k(x) + u^k(x+h)\tilde{u}_x^k(x) + \tilde{F}_1',\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{F}_1' &= u^k(x+h)u_x^k(x) - u^k(x-h)u_{\bar{x}}^k(x) \\ &= h(u^k(x)u_{\bar{x}}^k(x))_x + h(u_{\bar{x}}^k(x))^2 = O(h).\end{aligned}$$

(iii) $\tilde{u}^k(x)$ 改变了情况 IV 的位置，例如

$$u^k(x-h)<0,\ u^k(x+h)>0,$$

$$u^k(x-h)+\tilde{u}^k(x-h)>0,\ u^k(x+h)+\tilde{u}^k(x+h)>0,$$

此时一定存在两个正数 α_1 和 α_2，使得

$$\alpha_1+\alpha_2=1,\ \alpha_1 u^k(x-h)+\alpha_2 u^k(x+h)=0,$$

从而

$$\begin{aligned}\tilde{F}_1(\tilde{u}^k(x)) &= \tilde{u}^k(x-h)\tilde{u}^k_{\bar{x}}(x)+\tilde{u}^k(x-h)u^k_{\bar{x}}(x)\\ &\quad+u^k(x-h)\tilde{u}^k_{\bar{x}}(x)+\tilde{F}_1'',\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{F}_1'' &= \alpha_2 u^k(x-h)u^k_{\bar{x}}(x)-\alpha_2 u^k(x+h)u^k_{\bar{x}}(x)\\ &= -2\alpha_2 h u^k_{\hat{x}}(x)u^k_{\bar{x}}(x)=O(h).\end{aligned}$$

根据上面的分析，可严格估计误差，例如有下列结果：

定理 12.17 如果在 (12.61) 中，

$$\lambda<\frac{1}{2\nu},\ \tilde{u}^k(0)=\tilde{u}^k(1)=0,$$

$$\tilde{\rho}(k\tau)=\|\tilde{u}^0\|^2+\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}\|\tilde{f}^\xi\|^2,$$

则存在正常数 M_1，使得当 $\tilde{\rho}(T)e^{M_2T}\leqslant M_1h$，$k\tau\leqslant T$ 时，

$$\begin{aligned}\tilde{E}^k &= \|\tilde{u}^k\|^2+p_0\tau^2\sum_{\xi=0}^{k-1}\|\tilde{u}^\xi_t\|^2+\nu\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}|\tilde{u}^\xi|_1^2\\ &\leqslant M_3e^{M_2k\tau}(\tilde{\rho}(k\tau)+h^2),\qquad p_0\geqslant 0.\end{aligned}$$

注记 12.6 在邻近边界的点 $x=h$ 和 $x=1-h$ 上，差分格式(12.61) 依赖于边值 $u^k(0)$ 和 $u^k(1)$ 的符号，而格式 (12.60) 却与边值无关，所以边界误差较大.

Gentry, Martin, Daly (1966) 提出的第二逆风法（或 Donor Cell 方法），是由 $u^k(x)$ 在区间 $[x-h,x]$ 和 $[x,x+h]$ 上的平均值来决定逼近公式. 对于 Burgers 方程，有

$$u^k_t(x)+F_2(u^k(x))-\nu u^k_{x\bar{x}}(x)=f^k(x),$$

其中

$$F_2(u^k(x))=\frac{\bar{u}^k_R(x)u^k_R(x)-\bar{u}^k_L(x)u^k_L(x)}{h},$$

$$\bar{u}_R^k(x) = \frac{1}{2}(u^k(x) + u^k(x+h)),$$

$$\bar{u}_L^k(x) = \frac{1}{2}(u^k(x-h) + u^k(x)),$$

$$u_R^k(x) = \begin{cases} u^k(x), & 若\ \bar{u}_R^k(x) \geq 0, \\ u^k(x+h), & 若\ \bar{u}_R^k(x) < 0, \end{cases}$$

$$u_L^k(x) = \begin{cases} u^k(x-h), & 若\ \bar{u}_L^k(x) \geq 0, \\ u^k(x), & 若\ \bar{u}_L^k(x) < 0. \end{cases}$$

计算大 Reynolds 数流动的另一个方法是 Петров-Галеркин 方法. 如果 $\frac{\partial U}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial U}{\partial x}(1, t) = 0$, 那末 Burgers 方程的弱形式是

$$\int_0^1 \frac{\partial U}{\partial t} v dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}(U^2) v dx + \nu \int_0^1 \frac{\partial U}{\partial x} v' dx = 0,$$

$$\forall \quad v \in H^1(\mathscr{I}),$$

其中 $v'(x) = \frac{\partial v}{\partial x}$.

如果采用 § 10.6 中的方法来离散上式，并且对非线性项采用 § 1.3 中的乘积法，即

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{J} u_i(x)\varphi_i(x),$$

$$u^2(x, t) = \sum_{j=0}^{J} u_j^2(t)\varphi_j(x),$$

那末在 t 方向离散化后得到

$$\sum_{l=0}^{J} \int_0^1 \left(\frac{u_l^{k+1} - u_l^k}{\tau}\right)\varphi_l(x)\psi_j(x)dx + \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{J}\int_0^1 (\delta(u_l^{k+1})^2$$

$$+ (1-\delta)(u_l^k)^2)\varphi_l'(x)\psi_j(x)dx + \nu \sum_{l=0}^{J}\int_0^1 (\sigma u_l^{k+1}$$

$$+ (1-\sigma)u_l^k)\varphi_l'(x)\psi_j'(x)dx = 0,$$

其中 $0 \leq \sigma, \delta \leq 1$, $\varphi_j(x)$ 和 $\psi_j(x)$ 是基函数和试验函数。 若它们分别由 (1.27), (1.33) 和 (1.34) 所给定，则有

$$\left(1-b\hat{\partial}_x+\frac{a}{2}\partial_x\bar{\partial}_x\right)(u_i^{k+1}-u_i^k)$$
$$+\frac{\lambda h}{2}\left(\hat{\partial}_x-\frac{c}{2}\partial_x\bar{\partial}_x\right)(\delta(u_{i+1}^{k+1})^2+(1-\delta)(u_i^k)^2)$$
$$=\lambda\nu\partial_x\bar{\partial}_x(\sigma u_i^{k+1}+(1-\sigma)u_i^k), \tag{12.62}$$
其中 a、b 和 c 的意义同 (10.77).

关于非线性方程的边界层奇异摄动问题的数值方法，还是一个有待探讨的问题.

12.7 粘性流体的涡度方程

在二维喷注和数值天气预报等问题中，需要计算二维涡度方程. 设 $\Omega=\{x/0<x_1, x_2<1\}$, H 是涡度, Φ 是流函数,则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_2}H\right)-\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_1}H\right)-\nu\Delta H=f_1, \\ \qquad\qquad x\in\Omega,\ 0<t\leqslant T, \\ \Delta\Phi+H=f_2. \qquad x\in\Omega,\ 0\leqslant t\leqslant T, \\ H(x,0)=H_0(x), \qquad x\in\bar{\Omega},\end{cases} \tag{12.63}$$

其中 f_1, f_2 和 H_0 是已知函数,且在边界 Γ 上满足一定条件.

当 ν 是正数时, Emmons (1949), Fromm (1963) 等最早给出了解上述问题的计算方法. 当 $\nu=0$ 时, Charney, Phillips (1953), Кибель (1957) 构造了一些格式，其关键是从物理定律出发合理地逼近非线性项. 事实上 (12.63) 的解满足守恒律

$$\int_\Omega H(x,t)dx+\int_0^t\int_\Gamma H(x,\xi)\frac{\partial\Phi}{\partial s}(x,\xi)dsd\xi$$
$$-\nu\int_0^t\int_\Gamma\frac{\partial H}{\partial n}(x,\xi)dsd\xi$$
$$=\int_\Omega H_0(x)dx+\int_0^t\int_\Omega f(x,\xi)dxd\xi, \tag{12.64}$$

和

$$\|H(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+2\nu\int_0^t|H(\xi)|^2_{H^1(\Omega)}d\xi$$

$$+\int_0^t\int_\Gamma H^2(x,\xi)\frac{\partial\Phi}{\partial s}(x,\xi)dsd\xi$$

$$-2\nu\int_0^t\int_\Gamma H(x,\xi)\frac{\partial H}{\partial n}(x,\xi)dsd\xi$$

$$=\|H_0\|^2_{L^2(\Omega)}+2\int_0^t\int_\Omega f(x,\xi)H(x,\xi)dxd\xi. \quad (12.65)$$

记 $\Omega_h=\{x/x_1=j_1h,\ x_2=j_2h,1\leqslant j_1,j_2\leqslant J-1\}$, $Jh=1$. $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\alpha_l\geqslant 0$, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$. 定义

$$J_1^{(\alpha)}(v(x),\ w(x))=\alpha_1 w_{\hat{x}_2}(x)v_{\hat{x}_1}(x)$$
$$+\alpha_2(w_{\hat{x}_2}(x)v(x))_{\hat{x}_1}-\alpha_3(w(x)v_{\hat{x}_2}(x))_{\hat{x}_1},$$
$$J_2^{(\alpha)}(v(x),\ w(x))=-\alpha_1 w_{\hat{x}_1}(x)v_{\hat{x}_2}(x)$$
$$-\alpha_2(w_{\hat{x}_1}(x)v(x))_{\hat{x}_2}+\alpha_3(w(x)v_{\hat{x}_1}(x))_{\hat{x}_2},$$
$$J^{(\alpha)}(v(x),\ w(x))=\sum_{m=1}^{2}J_m^{(\alpha)}(v(x),\ w(x)).$$

当 $\alpha=\alpha'=(0,\ 1,\ 0)$ 时,它就是通常的守恒型格式的逼近方法。郭本瑜 (1965a) 和 Arakawa (1966) 则采用了另外两种 α, 即

$$\alpha''=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)\quad 和\quad \alpha'''=\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right).$$

用 $w_{\hat{s}}(x)$ 表示切向中心差商,即

$$w_{\hat{s}}(x)=\begin{cases}w_{\hat{x}_2}(x), & 当\ x_1=1-h,\ 1,\\ -w_{\hat{x}_2}(x), & 当\ x_1=h,\ 0,\\ w_{\hat{x}_1}(x), & 当\ x_2=h,\ 0,\\ -w_{\hat{x}_1}(x), & 当\ x_2=1-h,\ 1.\end{cases}$$

又当 $x\in\Gamma_h$ 时,用 x' 表示与它相距 h 的内点,于是有

$$h^2\sum_{x\in\Omega_h}J_1^{(\alpha')}(v(x),\ w(x))=A_1(v,\ w,\ \Gamma_{h,1}),$$

其中

$$A_1(v,\ w,\Gamma_{h,1})=\frac{h}{2}\sum_{x\in\Gamma_{h,1}}(w_{\hat{s}}(x)v(x)+w_{\hat{s}}(x')v(x')).$$

由于

$$w_{\hat{x}_2}(x)v_{\hat{x}_1}(x)=(w_{\hat{x}_2}(x)v(x))_{\hat{x}_1}-w_{\hat{x}_1\hat{x}_2}(x)v(x)$$

$$-\frac{h^2}{2}(w_{x_1\bar{x}_1}(x)v_{x_1}(x))_{\bar{x}_1},$$

因此

$$h^2\sum_{x\in\Omega_h}J_1^{(\alpha'')}(v(x),\ w(x))=-\frac{h^2}{2}\sum_{x\in\Omega_h}w_{\bar{x}_1\bar{x}_1}(x)v(x)$$

$$+A_1(v,w,\Gamma_{h,1})+\frac{1}{2}A_2(v,w,\Gamma_{h,1}).$$

其中

$$A_2(v,w,\Gamma_{h,1})=-\frac{h^3}{2}\sum_{x\in\Gamma_{h,1}}w_{\bar{n}n}(x)v_n(x).$$

又有

$$h^2\sum_{x\in\Omega_h}J_1^{(\alpha''')}(v(x),w(x))=\frac{2}{3}A_1(v,w,\Gamma_{h,1})$$

$$+\frac{1}{3}A_2(v,w,\Gamma_{h,1})+\frac{1}{3}A_3(v,w,\Gamma_{h,1}),$$

其中

$$A_3(v,w,\Gamma_{h,1})=-\frac{h}{2}\sum_{x\in\Gamma_{h,1}}(w(x)v_{\bar{s}}(x)+w(x')v_{\bar{s}}(x')).$$

对于 $J_2^{(\alpha')}$, $J_2^{(\alpha'')}$, $J_2^{(\alpha''')}$ 也可以建立类似的关系式,并由此得到

$$h^2\sum_{x\in\Omega_h}J^{(\alpha')}(v(x),w(x))=A_1(v,w,\Gamma_h),\qquad(12.66)$$

$$h^2\sum_{x\in\Omega_h}J^{(\alpha'')}(v(x),w(x))$$

$$=A_1(v,w,\Gamma_h)+\frac{1}{2}A_2(v,w,\Gamma_h),\qquad(12.67)$$

$$h^2\sum_{x\in\Omega_h}J^{(\alpha''')}(v(x),w(x))=\frac{2}{3}A_1(v,w,\Gamma_h)$$

$$+\frac{1}{3}A_2(v,w,\Gamma_h)+\frac{1}{3}A_3(v,w,\Gamma_h).\qquad(12.68)$$

又由 Abel 公式得到

$$(u,J_1^{(\alpha'')}(v,w))+(v,J_1^{(\alpha'')}(u,w))=A_5(u,v,w,\Gamma_{h,1}),$$

其中

$$A_5(u, v, w, \Gamma_{h,1}) = \frac{h}{4} \sum_{x \in \Gamma_{h,1}} (u(x)v(x') + u(x')v(x))(w_{\hat{x}_1}(x) + w_{\hat{x}_1}(x'))$$

和

$$(u, J_1^{(\alpha''')}(v, w)) + (v, J_1^{(\alpha''')}(u, w)) = \frac{1}{3}(u_{\hat{x}_1} v_{\hat{x}_2} + u_{\hat{x}_2} v_{\hat{x}_1}, w) + \frac{2}{3} A_5(u, v, w, \Gamma_{h,1}) + \frac{1}{3} A_6(u, v, w, \Gamma_{h,1}),$$

其中

$$A_6(u, v, w, \Gamma_{h,1}) = -\frac{h}{2} \sum_{x \in \Gamma_{h,1}} (u(x)v_{\hat{x}_1}(x')w(x') + u(x')v_{\hat{x}_1}(x)w(x) + u_{\hat{x}_1}(x')v(x)w(x') + u_{\hat{x}_1}(x)v(x')w(x)).$$

对 $J_2^{(\alpha'')}$ 和 $J_2^{(\alpha''')}$ 也可建立类似的关系式，并由此得到

$$(u, J^{(\alpha'')}(v, w)) + (v, J^{(\alpha'')}(u, w)) = A_5(u, v, w, \Gamma_h), \quad (12.69)$$

$$(u, J^{(\alpha''')}(v, w)) + (v, J^{(\alpha''')}(u, w)) = \frac{2}{3} A_5(u, v, w, \Gamma_h) + \frac{1}{3} A_6(u, v, w, \Gamma_h). \quad (12.70)$$

计算 (12.63) 的差分格式是

$$\begin{cases} \eta_t^k(x) + J^{(\alpha)}(\eta^k(x) + \delta\tau\eta_t^k(x), \varphi^k(x)) \\ \quad - \nu\Delta_h(\eta^k(x) + \sigma\tau\eta_t^k(x)) = f_1^k(x), \\ \qquad x \in \Omega_h, \ k \geqslant 0, \\ \Delta_h \varphi^k(x) + \eta^k(x) = f_2^k(x), \qquad x \in \Omega_h, \ k \geqslant 0, \\ \eta^0(x) = H_0(x), \qquad x \in \bar{\Omega}_h, \end{cases} \quad (12.71)$$

其中 $0 \leqslant \sigma, \delta \leqslant 1$. 在 Γ_h 上适当地逼近边界条件.

若 $\alpha = \alpha'$, 则由 (12.66) 得到

$$h^2 \sum_{x \in \Omega_h} \eta^k(x) + \tau \sum_{\xi=0}^{k-1} A_1(\eta^\xi + \delta\tau\eta_t^\xi, \varphi^\xi, \Gamma_h) - \nu\tau h \sum_{\xi=0}^{k-1} \sum_{x \in \Gamma_h} (\eta_n^\xi(x) + \sigma\tau\eta_{tn}^\xi(x))$$

$$= h^2 \sum_{x \in \Omega_h} \eta^0(x) + \tau h^2 \sum_{\xi=0}^{k-1} \sum_{x \in \Omega_h} f^\xi(x). \qquad (12.72)$$

它是 (12.64) 的合理模拟，所以可得到较好的数值结果。

若 $\alpha = \alpha''$，则由 (12.67) 得到

$$h^2 \sum_{x \in \Omega_h} \eta^k(x) + \tau \sum_{\xi=0}^{k-1} \{ A_1(\eta^\xi + \delta\tau\eta_t^\xi, \varphi^\xi, \Gamma_h) + \frac{1}{2} A_2(\eta^\xi + \delta\tau\eta_t^\xi, \varphi^\xi, \Gamma_h) \}$$

$$- \nu\tau h \sum_{\xi=0}^{k-1} \sum_{x \in \Gamma_h} (\eta_n^\xi(x) + \sigma\tau\eta_{tn}^\xi(x))$$

$$= h^2 \sum_{x \in \Omega_h} \eta^0(x) + \tau h^2 \sum_{\xi=0}^{k-1} \sum_{x \in \Omega_h} f^\xi(x). \qquad (12.73)$$

它也是 (12.64) 的合理模拟. 另一方面，若 $\delta = \sigma = \frac{1}{2}$，把 (12.71) 对 $(\eta^k(x) + \eta^{k+1}(x))$ 求内积，由 (12.69) 和引理 4.10 得到

$$\|\eta^k\|_t^2 + \frac{\nu}{2} |\eta^k + \eta^{k+1}|_1^2 + \frac{1}{4} A_5(\eta^k + \eta^{k+1}, \eta^k + \eta^{k+1}, \varphi^k, \Gamma_h)$$

$$- \frac{1}{2} \nu B(\eta^k + \eta^{k+1}, \eta^k + \eta^{k+1}) = (\eta^k + \eta^{k+1}, f^k),$$

并由此推得

$$\|\eta^k\|^2 + \frac{\nu\tau}{2} \sum_{\xi=0}^{k-1} |\eta^\xi + \eta^{\xi+1}|_1^2 + \frac{\tau}{4} \sum_{\xi=0}^{k-1} A_5(\eta^\xi + {}^{\xi+1}, \eta^\xi + \eta^{\xi+1}, \varphi^\xi, \Gamma_h) - \frac{\nu\tau}{2} \sum_{\xi=0}^{k-1} B(\eta^\xi + \eta^{\xi+1}, \eta^\xi + \eta^{\xi+1})$$

$$= \|\eta^0\|^2 + \tau \sum_{\xi=0}^{k-1} (\eta^\xi + \eta^{\xi+1}, f^\xi). \qquad (12.74)$$

它是 (12.65) 的合理模拟. 由于当 $\alpha = \alpha''$ 时，守恒律 (12.73) 和 (12.74) 成立，因此可得到更好的数值结果. 当 $\alpha = \alpha'''$ 时，由 (12.68) 和 (12.70)，也可以得到类似的结果. Arakawa (1966, 1970), Morton (1970) 都分析过这种守恒性. 郭本瑜 (1965a)

还同时估计了误差.

为简便计,下面假设 $\sigma=\delta=0$, $\alpha=\alpha''$,边界值计算无误差, $\eta^k(x)$, $\varphi^k(x)$ 和 $f_1^k(x)$ 的误差分别是 $\tilde{\eta}^k(x)$, $\tilde{\varphi}^k(x)$ 和 $\tilde{f}_1^k(x)$,于是得到

$$\begin{cases}\tilde{\eta}_t^k(x)+J^{(\alpha'')}(\tilde{\eta}^k(x),\varphi^k(x)+\tilde{\varphi}^k(x))+J^{(\alpha'')}(\eta^k(x),\tilde{\varphi}^k(x)) \\ \qquad -\nu\Delta_h\tilde{\eta}^k(x)=\tilde{f}_1^k(x), & x\in\Omega_h,\ k\geqslant 0, \\ \Delta_h\tilde{\varphi}^k(x)+\tilde{\eta}^k(x)=\tilde{f}_2^k(x), & x\in\Omega_h,\ k\geqslant 0, \\ \tilde{\eta}^k(x)=\tilde{\varphi}^k(x)=0, & x\in\Gamma_h,\ k\geqslant 0, \\ \tilde{\eta}^0(x)=\tilde{\eta}^0(x), & x\in\bar{\Omega}_h.\end{cases} \tag{12.75}$$

把 (12.75) 对 $2\tilde{\eta}^k(x)$求内积,由(12.69),注记 4.5 和引理 4 12 得到

$$\|\tilde{\eta}^k\|_t^2-\tau\|\tilde{\eta}_t^k\|^2+2\nu|\tilde{\eta}^k|_1^2+2\nu S(\tilde{\eta}^k,\tilde{\eta}^k)+F_1^k$$
$$\leqslant\|\tilde{\eta}^k\|^2+\|\tilde{f}^k\|^2,$$

其中

$$F_1^k=2(\tilde{\eta}^k,J^{(\alpha'')}(\eta^k,\tilde{\varphi}^k)).$$

把 (12.75) 对 $m\tau\tilde{\eta}_t^k(x)$ 求内积,由引理 4.13 得到

$$m\tau\|\tilde{\eta}_t^k\|^2+\frac{m\nu\tau}{2}(|\tilde{\eta}^k|_1^2)_t-\frac{m\nu\tau^2}{2}|\tilde{\eta}_t^k|_1^2+\frac{m\nu\tau}{2}S(\tilde{\eta}^k,\tilde{\eta}^k)_t$$
$$-\frac{m\nu\tau}{2}S(\tilde{\eta}_t^k,\tilde{\eta}_t^k)+F_2^k+F_3^k+F_4^k$$
$$\leqslant\varepsilon\tau\|\tilde{\eta}_t^k\|^2+\frac{m^2\tau}{4\varepsilon}\|\tilde{f}^k\|^2,$$

其中

$$F_2^k=m\tau(\tilde{\eta}_t^k,J^{(\alpha'')}(\tilde{\eta}^k,\varphi^k)),$$
$$F_3^k=m\tau(\tilde{\eta}_t^k,J^{(\alpha'')}(\tilde{\eta}^k,\tilde{\varphi}^k)),$$
$$F_4^k=m\tau(\tilde{\eta}_t^k,J^{(\alpha'')}(\eta^k,\tilde{\varphi}^k)).$$

把以上两式相加后得到

$$\|\tilde{\eta}^k\|_t^2+\tau(m-1-\varepsilon)\|\tilde{\eta}_t^k\|^2+2\nu|\tilde{\eta}^k|_1^2+\frac{m\nu\tau}{2}(|\tilde{\eta}^k|_1^2)_t$$
$$-\frac{m\nu\tau^2}{2}|\tilde{\eta}_t^k|_1^2+\frac{m\nu\tau}{2}S(\tilde{\eta}^k,\tilde{\eta}^k)_t-\frac{m\nu\tau^2}{2}S(\tilde{\eta}_t^k,\tilde{\eta}_t^k)$$

$$\leqslant M_1(\|\tilde{\eta}^k\|^2 + \|\tilde{\rho}_1^k\|^2) + \sum_{l=1}^{4} |F_l^k|. \tag{12.76}$$

又把 (12.75) 的第二式对 $\tilde{\varphi}^k(x)$ 求内积后得到

$$|\tilde{\varphi}^k|_1^2 \leqslant \varepsilon_1\|\tilde{\varphi}^k\|^2 + \frac{M_2}{\varepsilon_1}(\|\tilde{\eta}^k\|^2 + \|\tilde{\rho}_2^k\|^2).$$

取 ε_1 适当小，则由引理 4.3 得到

$$|\tilde{\varphi}^k|_1^2 \leqslant M_3(\|\tilde{\eta}^k\|^2 + \|\tilde{\rho}_2^k\|^2). \tag{12.77}$$

又由引理 4.11，

$$|\tilde{\varphi}^k|_2^2 \leqslant M_4(\|\tilde{\eta}^k\|^2 + \|\tilde{\rho}_2^k\|^2). \tag{12.78}$$

从而由 (12.77)，(12.78) 和引理 4.6 得到

$$|F_1^k| \leqslant M_5(\|\tilde{\eta}^k\|^2 + |\tilde{\varphi}^k|_1^2 + |\tilde{\varphi}^k|_2^2) \leqslant M_6(\|\tilde{\eta}^k\|^2 + \|\tilde{\rho}_2^k\|^2),$$

$$|F_2^k| \leqslant \varepsilon\tau\|\tilde{\eta}_t^k\|^2 + \frac{M_7\tau}{\varepsilon}|\tilde{\eta}^k|_1^2 \leqslant \varepsilon\tau\|\tilde{\eta}_t^k\|^2 + \frac{M_8}{\varepsilon}\|\tilde{\eta}^k\|^2,$$

$$|F_3^k| \leqslant \varepsilon\tau\|\tilde{\eta}_t^k\|^2 + \frac{M_9\tau}{\varepsilon}|\tilde{\eta}^k|_1|\tilde{\eta}^k|_2|\tilde{\varphi}^k|_1|\tilde{\varphi}^k|_2$$

$$\leqslant \varepsilon\tau\|\tilde{\eta}_t^k\|^2 + \frac{M_{10}h}{\varepsilon}|\tilde{\eta}^k|_1^2(\|\tilde{\eta}^k\|^2 + \|\tilde{\rho}_2^k\|^2),$$

$$|F_4^k| \leqslant \varepsilon\tau\|\tilde{\eta}_t^k\|^2 + \frac{M_{11}\tau}{\varepsilon}(\|\tau^k\|^2 + \|\tilde{\rho}_2^k\|^2).$$

把以上各估计式代入 (12.76) 后得到

$$\|\tilde{\eta}^k\|_t^2 + \tau(m-1-4\varepsilon)\|\tilde{\eta}_t^k\|^2 + \nu|\tilde{\eta}^k|_1^2 + \frac{m\nu\tau}{2}(|\tilde{\eta}^k|_1^2)_t$$

$$-\frac{m\nu\tau^2}{2}|\tilde{\eta}_t^k|_1^2 + \frac{m\nu\tau}{2}S(\tilde{\eta}^k,\tilde{\eta}^k)_t - \frac{m\nu\tau^2}{2}S(\tilde{\eta}_t^k,\tilde{\eta}_t^k)$$

$$\leqslant \tilde{R}^k + M_{12}(\|\tilde{\rho}_1^k\|^2 + \|\tilde{\rho}_2^k\|^2),$$

其中

$$\tilde{R}^k = -\nu\left(1 - \frac{M_{10}h}{\varepsilon}(\|\tilde{\eta}^k\|^2 + \|\tilde{\rho}_2^k\|^2)\right)|\tilde{\eta}^k|_1^2 + M_{13}\|\tilde{\eta}^k\|^2.$$

若 $\lambda < \dfrac{4}{17\nu}$，则可取

$$m = \frac{4 + 16\varepsilon + 4p_0}{4 - 17\lambda\nu}, \qquad p_0 \geqslant 0.$$

由于

$$\frac{m\nu\tau}{2}S(\eta_t^k,\ \tilde\eta_t^k)\leqslant\frac{m\nu\lambda}{4}\|\tilde\eta^k\|^2,$$

因此

$$\tau(m-1-4\varepsilon)\|\tilde\eta_t^k\|^2-\frac{m\nu\tau}{2}|\tilde\eta_t|_1^2-\frac{m\nu\tau^2}{2}S(\tilde\eta_t^k,\ \tilde\eta_t^k)$$
$$\geqslant p_0\tau\|\tilde\eta_t^k\|^2,$$

所以

$$\|\tilde\eta^k\|_t^2+p_0\tau\|\tilde\eta_t^k\|^2+\nu|\tilde\eta^k|_1^2+\frac{m\nu\tau}{2}(|\tilde\eta^k|_1^2)_t+\frac{m\nu\tau}{2}S(\tilde\eta^k,\tilde\eta^k)_t$$
$$\leqslant\tilde R^k+M_{12}(\|\tilde\zeta_1^k\|^2+\|\tilde\zeta_2^k\|^2).$$

记

$$\tilde E^k=\|\tilde\eta^k\|^2+p_0\tau^2\sum_{\xi=0}^{k-1}\|\tilde\eta_t^\xi\|^2+\nu\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}|\tilde\eta^\xi|_1^2,$$

$$\tilde\rho(k\tau)=\|\tilde\eta^0\|^2+\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}(\|\tilde\zeta_1^\xi\|^2+\|\tilde\zeta_2^\xi\|^2),$$

则

$$\tilde E^k\leqslant M_{14}\tilde\rho(k\tau)+\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}\tilde R^\xi.$$

最后由注记 4.10 得到下面的结果:

定理 12.18 若在格式 (12.71) 中,令 $\alpha=\alpha''$, $\sigma=\delta=0$, 边值计算无误差, $\|\tilde\zeta_2^k\|^2\leqslant M_{15}$, $\tilde\rho(T)e^{M_{16}T}\leqslant M_{17}h^{-1}$, 则当 $k\tau\leqslant T$ 时,

$$\tilde E^k\leqslant M_{18}\tilde\rho(k\tau)e^{M_{16}k\tau}.$$

解(12.63)的另一类方法是构造特征型差分方法,在 Forsythe, Wasow (1960) 中介绍了通常的特征格式. 1965 年, 郭本瑜提出的修正逆风法,用 $F(u^k(x))$ 更精细地逼近非线性项.

在由点 x, $x+he_1$, $x+he_2$ 所组成的三角形内, 用 $\varphi_{\bar x_2}^k(x)$, $\varphi_{\bar x_1}^k(x)$ 分别表示 x_1 和 x_2 方向的近似流速,若两者都非正, 则表示流体自东北角移向 x, 记为"↙",考虑了各种情况后,即得图 12.1.

在 (7), (10) 中, x 恰为旋涡中心,因此令 $F(u^k(x))=0$. 在

流　向		$\varphi_{x_2}\geqslant 0$		$\varphi_{x_2}<0$	
		$\varphi_{\bar{x}_2}\geqslant 0$	$\varphi_{\bar{x}_2}<0$	$\varphi_{\bar{x}_2}\geqslant 0$	$\varphi_{\bar{x}_2}<0$
$\varphi_{x_1}\geqslant 0$	$\varphi_{\bar{x}_1}\geqslant 0$	(1)	(2)	(3)	(4)
	$\varphi_{\bar{x}_1}<0$	(5)	(6)	(7)	(8)
$\varphi_{x_1}<0$	$\varphi_{\bar{x}_1}\geqslant 0$	(9)	(10)	(11)	(12)
	$\varphi_{\bar{x}_1}<0$	(13)	(14)	(15)	(16)

图　12.1

(6), (11) 中, x 位于两股对流之间, $\eta^{k+1}(x)$ 应与 $\eta^k(x-he_1)$, $\eta^k(x+he_1)$, $\eta^k(x-he_2)$ 和 $\eta^k(x+he_2)$ 有关,所以令

$$F(u^k(x))=\gamma(\varphi^k_{\bar{x}_2}(x)\eta^k_{\bar{x}_1}(x)-\varphi^k_{\bar{x}_1}(x)\eta^k_{\bar{x}_2}(x))$$
$$+(1-\gamma)(\varphi^k_{x_2}(x)\eta^k_{x_1}(x)-\varphi^k_{x_1}(x)\eta^k_{x_2}(x)),$$
$$0\leqslant\gamma\leqslant 1.$$

依此类推就得到 $F(u^k(x))$. 计算 (12.63) 的修正逆风格式则为

$$\begin{cases}\eta^k_t(x)+F(\eta^k(x))-\nu\Delta_h\eta^k(x)=f^k_1(x), & x\in\Omega_h,\ h\geqslant 0,\\ \Delta_h\varphi^k(x)+\eta^k(x)=f^k_2(x), & x\in\Omega_h,\ k\geqslant 0,\\ \eta^0(x)=H_0(x), & x\in\bar{\Omega}_h.\end{cases}\tag{12.79}$$

可仿照 § 12.6 中的方法估计 (12.79) 的误差.

关于二维及三维涡度方程的差分方法,还可见 Aziz, Hellums (1967), Campbell (1970), Roache (1972, 1976), Ames (1973), Kuo Pen-yu (1977), 郭本瑜 (1979a, 1908c) 等人的文章, Pujol

(1971) 还对二维问题的各种算法作了数值比较. 此外, Chorin (1973) 还用分裂方法解(12.63), 也就是说,在每一时刻 $t=k\tau$, 先用 § 7.12 中的涡团法解一个 $\nu=0$ 的涡度方程, 再用随机游动方法解一个扩散方程.

12.8 Navier-Stokes 方程

设 $x\in R^n$, $\Omega=\{x\mid 0<x_m<1,\ 1\leqslant m\leqslant n\}$, U 是速度向量,其分量是 U_l, $1\leqslant l\leqslant n$, P 是压力与密度之比, ν 是运动粘性系数,那末 n 维 Navier-Stokes 方程是

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}+(U\cdot\nabla)U-\nu\Delta U+\nabla P=f_1,\\ \qquad\qquad x\in\Omega,\ 0<t\leqslant T,\\ \nabla\cdot U=0, x\in\Omega,\qquad 0\leqslant t\leqslant T,\\ U(x,0)=U_0(x),\qquad x\in\bar{\Omega}.\end{cases}\tag{12.80}$$

为简便计,本节假定 f_1 和 U_0 在 x_m 方向的周期为 1.

Ладыженская (1961), Lions (1969), Téman (1977) 等综述了关于解的存在性、唯一性的研究成果. Harlow, Welch (1965) 最早计算了二维问题. 以后工作可见 Кживидкий, Ладыженская (1966), Chorin (1967a, b, 1968), Téman (1968, 1970, 1977), Lions (1970), Roache (1972, 1976), Ames (1973), Kuo Pen-Yu (1977) 和 Guo Ben Yu (1981) 等人的文章.

计算(12.80)的第一个关键问题是合理地逼近非线性项. 不难验证

$$\int_\Omega (U\cdot\nabla)U dx=0,\tag{12.81}$$

$$\int_\Omega U\cdot[(U\cdot\nabla)U]dx=0,\tag{12.82}$$

并由此推得

$$\int_\Omega U(x,t)dx=\int_\Omega U_0(x)dx+\int_0^t\int_\Omega f_1(x,\xi)dxd\xi,$$

$$\|U(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+2\nu\int_0^t|U(\xi)|^2_{H^1(\Omega)}d\xi=\|U_0\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$+2\int_0^t\int_\Omega U(x,\xi)\cdot f_1(x,\xi)dxd\xi.$$

现在用 h 和 τ 分别表示 x_m 和 t 的步长，$\tau=h^t$，$\Omega_h=\{x/x_m=j_mh,1\leqslant j_m\leqslant J-1,1\leqslant m\leqslant n\}$，$Jh=1+h$，并定义下列差分算子

$$d^{(\alpha)}(v(x),w(x))=\sum_{m=1}^n[\alpha w_m(x)v_{\hat{x}_m}(x)$$
$$+(1-\alpha)(w_m(x)v(x))_{\hat{x}_m}],$$
$$G(q(x))=(q_{\hat{x}_1}(x),q_{\hat{x}_2}(x),\cdots,q_{\hat{x}_n}(x))^*,$$
$$D(w(x))=\sum_{m=1}^n w_{m,\hat{x}_m}(x),$$

如果 $v(x)$，$w(x)$ 和 $q(x)$ 在 x_m 方向有周期 1，则由 Abel 公式得到

$$(q,D(w))+(w,G(q))=0, \tag{12.83}$$
$$(d^{(0)}(v,v),1)=0, \tag{12.84}$$
$$(d^{(\frac{1}{2})}(v,w),u)+(d^{(\frac{1}{2})}(u,w),v)=0. \tag{12.85}$$

由于 (12.84) 和 (12.85) 分别合理地模拟了 (12.81) 和(12.82)，所以当 $\alpha=0,\frac{1}{2}$ 时，会得到较好的数值结果.

计算(12.80)的第二个关键问题是合理地计算 P. Lions (1970) 采用小参数法，即用下式近似地代替连续性方程

$$\beta\frac{\partial P}{\partial t}+\nabla\cdot U=0,\qquad \beta>0,$$

它也等价于 Chorin (1967a, b) 的人工压缩法. 但是这种方法的数值结果有时并不理想. 事实上，既然人为地考虑了 $\frac{\partial P}{\partial t}$，那末从力学角度来看，也应同时考虑项 ΔP，所以用下列方程来代替连续性方程

$$\beta\frac{\partial P}{\partial t}+\nabla\cdot U-\beta\nu\Delta P=0.$$

计算 (12.80) 的差分格式为

$$\begin{cases} u_t^k(x) + d^{(\alpha)}(u^k(x), u^k(x)) - \nu\Delta_h u^k(x) \\ \qquad + G(p^k(x)) = f_1^k(x), \qquad x \in \Omega_h, k \geq 0; \\ \beta p_t^k(x) + D(u^k(x)) - \beta\nu\Delta_h p^k(x) = f_2^k(x), \qquad x \in \Omega_h, k \geq 0, \end{cases} \tag{12.86}$$

当 $\alpha = 0$ 时,它是一次守恒型格式. 当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时,它是二次守恒型格式. 下面只讨论后者的误差估计. 假设 $u^k(x)$, $p^k(x)$, $f_1^k(x)$ 和 $f_2^k(x)$ 分别发生了误差 $\tilde{u}^k(x)$, $\tilde{p}^k(x)$, $\tilde{f}_1^k(x)$ 和 $\tilde{f}_2^k(x)$,则有

$$\begin{cases} \tilde{u}_t^k(x) + d^{(\frac{1}{2})}(\tilde{u}^k(x), u^k(x) + \tilde{u}^k(x)) + d^{(\frac{1}{2})}(u^k(x)), \tilde{u}^k(x)) \\ \qquad - \nu\Delta_h\tilde{u}^k(x) + G(\tilde{p}(x)) = \tilde{f}_1^k(x), \qquad x \in \Omega_h, \ k \geq 0, \\ \beta\tilde{p}_t^k(x) + D(\tilde{u}^k(x)) - \beta\nu\Delta_h\tilde{p}^k(x) = \tilde{f}_2^k(x), \\ \qquad\qquad x \in \Omega_h, \ k \geq 0, \end{cases} \tag{12.87}$$

先把 (12.87) 的第一式对 $2\tilde{u}^k(x) + m\tau\tilde{u}_t^k(x)$ 求内积,再把第二式对 $2\tilde{p}^k(x) + m\tau\tilde{p}_t^k(x)$ 求内积,然后把两次结果相加,则由引理 4.10, 4.12, 4.13 和 (12.83), (12.85) 得到

$$\begin{aligned} &\|\tilde{u}^k\|_t^2 + \tau(m-1)\|\tilde{u}_t^k\|^2 + 2\nu|\tilde{u}^k|_1^2 + \frac{m\nu\tau}{2}(|\tilde{u}^k|_1^2)_t \\ &\quad - \frac{m\nu\tau^2}{2}|\tilde{u}_t^k|_1^2 + \beta\|\tilde{p}^k\|_t^2 + \beta\tau(m-1)\|\tilde{p}_t^k\|^2 + 2\beta\nu|\tilde{p}^k|_1^2 \\ &\quad + \frac{\beta m\nu\tau}{2}(|\tilde{p}^k|_1^2)_t - \frac{\beta m\nu\tau^2}{2}|\tilde{p}_t^k|_1^2 = \sum_{l=1}^{5} F_l^k, \end{aligned} \tag{12.88}$$

其中

$$\begin{aligned} F_1^k &= (2\tilde{u}^k + m\tau\tilde{u}_t^k, \tilde{f}_1^k - d^{(\frac{1}{2})}(u^k, \tilde{u}^k)) \\ &\quad - m\tau(\tilde{u}_t^k, d^{(\frac{1}{2})}(\tilde{u}^k, u^k)), \\ F_2^k &= -m\tau(\tilde{u}_t^k, d^{(\frac{1}{2})}(\tilde{u}^k, \tilde{u}^k)), \\ F_3^k &= -m\tau(\tilde{u}_t^k, G(\tilde{p}^k)), \\ F_4^k &= -m\tau(\tilde{p}_t^k, D(\tilde{u}^k)), \\ F_5^k &= (2\tilde{p}^k + m\tau\tilde{p}_t^k, \tilde{f}_2^k). \end{aligned}$$

下面来估计 $|F_l^k|$. 首先有

$$|F_1^k| \leqslant \varepsilon\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2 + \varepsilon\nu|\tilde{u}^k|_1^2 + M_1(\|\tilde{u}^k\|^2 + \|\tilde{f}_1^k\|^2).$$

由引理 4.2 得到

$$|F_2^k| \leqslant \varepsilon\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2 + M_2 m^2\tau h^{-n}\|\tilde{u}^k\|^2|\tilde{u}^k|_1^2.$$

又有

$$|F_3^k| \leqslant a\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2 + \frac{n\tau m^2}{4a}|\tilde{p}^k|_1^2,$$

$$|F_4^k| \leqslant a\beta\tau\|\tilde{p}_t^k\|^2 + \frac{n\tau m^2}{4a\beta}|\tilde{u}^k|_1^2,$$

$$|F_5^k| \leqslant \beta\|\tilde{p}^k\|^2 + a\beta\tau\|\tilde{p}_t^k\|^2 + \left(\frac{1}{\beta} + \frac{m^2\tau}{4a\beta}\right)\|\tilde{f}_2^k\|^2.$$

把上述各估计式代入 (12.88) 后得到

$$\begin{aligned}
&\|\tilde{u}^k\|_t^2 + \tau(m-1-2\varepsilon-a)\|\tilde{u}_t^k\|^2 + \nu|\tilde{u}^k|_1^2 + \frac{m\nu\tau}{2}(|\tilde{u}^k|_1^2)_t \\
&\quad - \frac{m\nu\tau^2}{2}|\tilde{u}_t^k|_1^2 + \beta\|\tilde{p}^k\|^2 + \beta\tau(m-1-2a)\|\tilde{p}_t^k\|^2 \\
&\quad + \left(2\beta\nu - \frac{n\tau m^2}{4a}\right)|\tilde{p}^k|_1^2 + \frac{\beta m\nu\tau}{2}(|\tilde{p}^k|_1^2)_t - \frac{\beta m\nu\tau^2}{2}|\tilde{p}_t^k|_1^2 \\
&\leqslant \left(-\nu + \varepsilon\nu + M_2 m^2 h^{\tau-n}\|\tilde{u}^k\|^2 + \frac{n\tau m^2}{4a\beta}\right)|\tilde{u}^k|_1^2 \\
&\quad + M_3(\|\tilde{u}^k\|^2 + \beta\|\tilde{p}^k\|^2 + \|\tilde{f}_1^k\|^2 + \beta^{-1}\|\tilde{f}_2^k\|^2).
\end{aligned} \tag{12.89}$$

若 ε, a 适当小，$\lambda < \dfrac{1}{2n\nu}$，则可取 $c_0 > 0$，

$$m = \frac{1+2\varepsilon+2a+c_0}{1-2n\lambda\nu}. \tag{12.90}$$

所以

$$\tau(m-1-2\varepsilon-a)\|\tilde{u}_t^k\|^2 - \frac{m\nu\tau^2}{2}|\tilde{u}_t^k|_1^2 \geqslant c_0\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2,$$

$$\beta\tau(m-1-2a)\|\tilde{p}_t^k\|^2 - \frac{\beta m\nu\tau^2}{2}|\tilde{p}_t^k|_1^2 \geqslant \beta c_0\tau\|\tilde{p}_t^k\|^2.$$

若 $\beta > \dfrac{nm^2\tau}{4a\nu}$，则有 $\beta\nu - \dfrac{nm^2\tau}{4a} > 0$，记

$$\tilde{E}^k = \|\tilde{u}^k\|^2 + \beta\|\tilde{p}^k\|^2 + c_0\tau^2\sum_{l=0}^{k-1}(\|\tilde{u}_t^l\|^2 + \beta\|\tilde{p}_t^l\|^2)$$

$$+\nu\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}(|\tilde{u}^{\xi}|_1^2+\beta|\tilde{p}^{\xi}|_1^2),$$

$$\bar{\rho}(k,\tau)=\|\tilde{u}^0\|^2+\beta\|\tilde{p}^0\|^2+\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}(\|\tilde{f}_1^{\xi}\|^2+\beta^{-1}\|\tilde{f}_2^{\xi}\|^2),$$

则由 (12.89) 得到

$$\tilde{E}^k\leqslant M_4\bar{\rho}(k\tau)+M_5\sum_{\xi=0}^{k-1}(\|\tilde{u}^{\xi}\|^2+\beta\|\tilde{p}^{\xi}\|^2)$$

$$+\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}\left(-\nu+\varepsilon\nu+M_3m^3h^{r-n}\|\tilde{u}^{\xi}\|^2+\frac{n\tau m^2}{4a\beta}\right)|\tilde{u}^{\xi}|_1^2.$$

最后应用了注记 4.10，其中 $E^k=\tilde{E}^k$, $N_1=0$, $N_2=1$, $d_1=n-r$.

定理 12.19 若在格式 (12.86) 中，$\alpha=\frac{1}{2}$, $\lambda<\frac{1}{2n\nu}$, $\beta>\frac{n\tau m^2}{4a\nu}$, m 如 (12.90) 所示，则当 $\bar{\rho}(T)e^{M_6T}\leqslant M_7h^{n-r}$, $k\tau\leqslant T$ 时，

$$\tilde{E}^k\leqslant M_8e^{N_4k\tau}\bar{\rho}(k\tau).$$

根据上述定理，格式(12.86)的广义稳定性指标为 $s\leqslant\frac{n-r}{2}$，特别若 $r=n$，则 $s\leqslant 0$.

假设 U, P 适当光滑，$\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=h^b$, $b\leqslant r$，并把 $\tilde{f}_1^k$ 和 $\tilde{f}_2^k$ 看作形式逼近误差，则 $\|\tilde{f}_1^k\|=O(h^r+h^2)$, $\beta^{-\frac{1}{2}}\|\tilde{f}_2^k\|=O(h^{0.5b}+h^{2-0.5b})$，所以当下列条件满足时，格式就是收敛的

$$\frac{n-r}{2}<r_0=\min(0.5b,\ 2-0.5b,\ 2,\ r),$$

并且 $\|U^k-u^k\|=O(h^{r_0})$，特别若 $n=2,3$, $r\geqslant 1$, $b=2$，则格式收敛且 $r_0=1$.

Guo Ben-Yu(1981) 还研究了各种初、边值问题，并得到相应的误差估计，特别，若边值计算无误差，则可由引理 4.6，4.7 得到

$$|(\tilde{u}^k,d^{(a)}(\tilde{u}^k,\tilde{u}^k))|\leqslant\varepsilon\nu|\tilde{u}^k|_1^2+\frac{M_9}{\varepsilon\nu}\|\tilde{u}^k\|^{4-n}|\tilde{u}^k|_1^n$$

$$\leqslant\varepsilon\nu|\tilde{u}^k|_1^2+\frac{M_{10}}{\varepsilon\nu h^{n-2}}\|\tilde{u}^k\|^2|\tilde{u}^k|_1^2.$$

从而对一切 α，都有广义稳定性指标数 $s \leqslant \frac{n-2}{2}$. Guo Ben-Yu (1981) 还构造了计算 (12.80) 的修正逆风格式.

还有计算 P 的许多其它方法. 事实上，由 (12.80) 得到

$$\frac{\partial(\nabla\cdot U)}{\partial t}+\Delta P-\nu\Delta(\nabla\cdot U)+\phi(U)=\nabla\cdot f_1, \quad (12.91)$$

其中 $\phi(U)$ 是关于 U 的分量的二次形式，即

$$\phi(U)=\sum_{l,m=1}^{n}\left(\frac{\partial U_l}{\partial x_m}\frac{\partial U_m}{\partial x_l}-\frac{\partial U_l}{\partial x_l}\frac{\partial U_m}{\partial x_m}\right).$$

考虑到 $\nabla\cdot U=0$，并用下式逼近 $\phi(U)$

$$\phi_h(u^k(x))=\sum_{l,m=1}^{n}[(u^k_{l,\hat{x}_m}(x)u^k_m(x))_{\hat{x}_l}-(u^k_{l,\hat{x}_l}(x)u^k_m(x))_{\hat{x}_m}],$$

则得到下列算式

$$\Delta_h p^k(x)+\phi_h(u^k(x))=D(f_1^k(x)).$$

若用(12.86)的第一式计算 $u^k(x)$，用上式计算 $p^k(x)$，则当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时，格式的广义稳定性指标 $s\leqslant\frac{n}{2}$ (见 Kuo Pen-yu (1977)).

上述格式得到的解，实际上 $D(u^k(x))\neq 0$，因此不够精细. 又由于 $\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot U)$ 的近似值一般比 $\nu\Delta(\nabla\cdot U)$ 近似值大得多，所以可以略去后者而注重前者 (见 Williams (1969)). Guo Ben-yu (1981)). 在区间 $[t, t+\beta]$ 内积分 (12.91)，则有

$$\nabla\cdot U(x,t+\beta)-\nabla\cdot U(x,t)+\int_t^{t+\beta}\Delta P(x,\xi)d\xi$$
$$+\int_t^{t+\beta}\phi(U(x,\xi))d\xi=\int_t^{t+\beta}\nabla\cdot f_1(x,\xi)d\xi.$$

令 $\nabla\cdot U(x,t+\beta)=0$，并数值地积分与微分上式后得到另一类带小参数项的差分格式

$$D(u^k(x))-\beta\Delta_h p^k(x)-\beta\phi_h(u^k(x))=-\beta D(f_1^k(x)).$$

若用 (12.86) 的第一式计算 U，而用上式计算 P，则可证明它有广义稳定性指标 $s\leqslant\frac{n-r}{2}$ (见 Guo Ben-yu (1981)). 此外

Piacsek, Williams (1970) 也构造了保证离散度为零的差分格式.

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial t} + (U \cdot \nabla)U - \nu\Delta U + \nabla P = f_1, & x \in \Omega,\ 0 < t \leqslant T, \\
\dfrac{\partial P}{\partial t} + (U \cdot \nabla)P = 0, & x \in \Omega,\ 0 < t \leqslant T,
\end{cases}
\tag{12.92}
$$

其中记号与前节相同. 从形式上看,其中第一式是抛物型方程,若用差分格式计算,应取 $\tau = O(h^2)$; 第二式是双曲型方程,只需 $\tau = O(h)$. 基于这个想法,Lions (1970) 曾构造了带热传导的波动方程组的差分格式. 但是实际上,特别对非线性问题来说,双曲型方程的解比抛物型方程解的性质差得多,故需要更细致地处理前者. 为此,郭本瑜 (1980a) 提出了下列预估校正格式

$$
\begin{cases}
u_t^k(x) + d^{(\alpha)}(u^k(x), u^k(x)) - \nu\Delta_h u^k(x) \\
\qquad + G(p^k(x)) = f_1^k(x), \qquad x \in \Omega_h,\ k \geqslant 0, \\
\dfrac{p^{k+\frac{1}{2}}(x) - p^k(x)}{\tau} + \beta d^{(\alpha)}(p^k(x), u^k(x)) = 0, \\
\qquad 0 \leqslant \beta \leqslant 1,\ x \in \Omega_h,\ k \geqslant 0, \\
\dfrac{p^{k+1}(x) - p^k(x)}{\tau} + d^{(\alpha)}(p^{k+\frac{1}{2}}(x), u^k(x)) = 0, \\
\qquad x \in \Omega_h,\ k \geqslant 0,
\end{cases}
\tag{12.93}
$$

由其中的后两式推得

$$
p_t^k(x) + d^{(\alpha)}(p^k(x), u^k(x)) - \beta\tau d^{(\alpha)}(d^{(\alpha)}(p^k(x), u^k(x)), u^k(x)) - f_2^k(x) = 0.
$$

下面分析 $\alpha = \dfrac{1}{2}$ 时的周期解的误差. 此时误差方程是

$$
\begin{cases}
\tilde{u}_t^k(x) + d^{(\frac{1}{2})}(\tilde{u}^k(x), u^k(x) + \tilde{u}^k(x)) + d^{(\frac{1}{2})}(u^k(x), \tilde{u}^k(x)) \\
\qquad - \nu\Delta_h\tilde{u}^k(x) + G(\tilde{p}^k(x)) = \tilde{f}_1^k(x), \qquad x \in \Omega_h, k \geqslant 0, \\
\tilde{p}_t^k(x) + d^{(\frac{1}{2})}(\tilde{p}^k(x), u^k(x) + \tilde{u}^k(x)) + d^{(\frac{1}{2})}(p^k(x), \tilde{u}^k(x)) \\
\qquad - \beta\tau d^{(\frac{1}{2})}(d^{(\frac{1}{2})}(\tilde{p}^k(x), u^k(x) + \tilde{u}^k(x)), u^k(x) + \tilde{u}^k(x)) \\
\qquad - \beta\tau d^{(\frac{1}{2})}(d^{(\frac{1}{2})}(p^k(x), \tilde{u}^k(x)), u^k(x) + \tilde{u}^k(x)) \\
\qquad - \beta\tau d^{(\frac{1}{2})}(d^{(\frac{1}{2})}(p^k(x), u^k(x)), \tilde{u}^k(x)) = \tilde{f}_2^k(x), \\
\qquad x \in \Omega_h,\ k \geqslant 0,
\end{cases}
$$

把上面的第一式对 $2\tilde{u}^k(x)+m\tau\tilde{u}_t^k(x)$ 求内积，把第二式对 $2\tilde{p}^k(x)+m\tau\tilde{p}_t^k(x)$ 求内积，然后把两次结果相加，由引理 4.10, 4.12, 4.13 和 (12.85) 得到

$$\|\tilde{u}^k\|_t^2+\tau(m-1)\|\tilde{u}_t^k\|^2+2\nu|\tilde{u}^k|_1^2+\frac{m\nu\tau}{2}(|\tilde{u}^k|_1^2)_t$$

$$-\frac{m\nu\tau^2}{2}|\tilde{u}_t^k|_1^2+\|\tilde{p}^k\|_t^2+\tau(m-1)\|\tilde{p}_t^k\|^2$$

$$+2\beta\tau\|d^{(\frac{1}{2})}(\tilde{p}^k,u^k+\tilde{u}^k)\|^2=\sum_{l=1}^{8}F_l^k, \tag{12.94}$$

其中 F_1^k, F_2^k 的定义同 (12.88),

$$F_3^k=-(2\tilde{u}^k+m\tau\tilde{u}_t^k,\ G(\tilde{p}^k)),$$

$$F_4^k=(2\tilde{p}^k+m\tau\tilde{p}_t,\ \tilde{\eta}_2^k-d^{(\frac{1}{2})}(p^k,\tilde{u}^k)$$
$$+\beta\tau d^{(\frac{1}{2})}(d^{(\frac{1}{2})}(p^k,u^k),\tilde{u}^k)),$$

$$F_5^k=-2\beta\tau(d^{(\frac{1}{2})}(p^k,\tilde{u}^k),\ d^{(\frac{1}{2})}(\tilde{p}^k,u^k+\tilde{u}^k)),$$

$$F_6^k=-m\tau(\tilde{p}_t^k,\ d^{(\frac{1}{2})}(\tilde{p}^k,u^k+\tilde{u}^k)),$$

$$F_7^k=m\beta\tau^2(\tilde{p}_t^k,\ d^{(\frac{1}{2})}(d^{(\frac{1}{2})}(\tilde{p}^k,u^k+\tilde{u}^k),u^k+\tilde{u}^k)),$$

$$F_8^k=m\beta\tau^2(\tilde{p}_t^k,\ d^{(\frac{1}{2})}(d^{(\frac{1}{2})}(p^k,\tilde{u}^k),u^k+\tilde{u}^k)).$$

$|F_1^k|$ 和 $|F_2^k|$ 的估计同 § 12.8. 由引理 4.3 和 Abel 公式得到

$$|F_3|\leqslant\varepsilon\tau\|\tilde{u}_t^k\|^2+\varepsilon|\tilde{u}^k|_1^2+\frac{M_1\tau}{h^2}(m^2+1)(\|\tilde{u}^k\|^2+\|\tilde{p}^k\|^2).$$

又有

$$|F_4^k|\leqslant a\tau\|\tilde{p}_t^k\|^2+\varepsilon|\tilde{u}^k|_1^2+M_2(\|\tilde{u}^k\|^2+\|\tilde{p}^k\|^2+\|\tilde{\eta}_2^k\|^2),$$

$$|F_5^k|\leqslant\varepsilon\tau^{3/2}\|d^{(\frac{1}{2})}(\tilde{p}^k,u^k+\tilde{u}^k)\|^2+M_3\tau^{\frac{1}{2}}(\|\tilde{u}^k\|^2+|\tilde{u}^k|_1^2),$$

$$|F_6^k|\leqslant\tau(3a+1)\|d^{(\frac{1}{2})}(\tilde{p}^k,u^k+\tilde{u}^k)\|^2+\frac{m^2\tau}{4(3a+1)}\|\tilde{p}_t^k\|^2,$$

$$|F_7^k|\leqslant a\tau\|\tilde{p}_t^k\|^2+\frac{1}{2a}m^2\beta^2\tau^3h^{-n}(\|u^k+\tilde{u}^k\|^2|d^{(\frac{1}{2})}(\tilde{p}^k,u^k$$
$$+\tilde{u}^k)|_1^2+|u^k+\tilde{u}^k|_1^2\|d^{(\frac{1}{2})}(\tilde{p}^k,u^k+\tilde{u}^k)\|^2)$$
$$\leqslant a\tau\|\tilde{p}_t^k\|^2+\frac{8}{a}nm^2\beta^2\tau^3h^{-n-2}\|d^{(\frac{1}{2})}(\tilde{p}^k,u^k$$
$$+\tilde{u}^k)\|^2(\|\tilde{u}^k\|^2+\|u^k\|^2),$$

$$|F_8^k| \leqslant a\tau\|\tilde{p}_t^k\|^2 + M_4\tau^3(\varepsilon + h^{-2} + h^{-2-n}\|\tilde{u}^k\|^2)|\tilde{u}^k|_1^2$$
$$+ M_5(\|\tilde{u}^k\|^2 + \tau^3 h^{-4-n}\|\tilde{u}^k\|^4).$$

把以上各估计式代入 (12.94) 后得到

$$\|\tilde{u}^k\|_t^2 + \|\tilde{p}^k\|_t^2 + \tau(m - 1 - 3\varepsilon - 2nm\nu\tau h^{-2})\|\tilde{u}_t^k\|^2$$
$$+ \tau\left(m - 1 - 3a - \frac{m^2}{4(3a+1)}\right)\|\tilde{p}_t^k\|^2 + \nu|\tilde{u}^k|_1^2$$
$$+ \frac{m\nu\tau}{2}(|\tilde{u}^k|_1^2)_t + \tau\left(2\beta - \varepsilon\tau^{\frac{1}{2}} - 3a - 1\right.$$
$$\left. - \frac{8}{a}nm^2\beta^2\tau^2 h^{-n-2}(\|\tilde{u}^k\|^2 + \|u^k\|^2)\right)$$
$$\|d^{(\frac{1}{2})}(\tilde{p}^k, u^k + \tilde{u}^k)\|^2 + (\nu - M_6\varepsilon - M_3\tau^{\frac{1}{2}} - M_4\tau^3 h^{-2}$$
$$- M_4\tau^3 h^{-2-n}\|\tilde{u}^k\|^2)|\tilde{u}^k|_1^2 \leqslant \tilde{R}^k + \|\tilde{f}_1^k\|^2 + \|\tilde{f}_2^k\|^2,$$

其中

$$\tilde{R}^k \leqslant M_7\left(1 + \frac{\tau}{h^2}\right)(\|\tilde{u}^k\|^2 + \|\tilde{p}^k\|^2 + \tau^3 h^{-n-4}\|\tilde{u}^k\|^4).$$

下面假定 ε 和 a 适当小，并且

$$\beta > \frac{3a+1}{2}, \quad \tau = O(h^r), \quad r \geqslant 2, \tag{12.95}$$

$$\tau < \min\left\{\frac{h^{\frac{n}{2}+1}}{8}(2\beta - 3a - 1)^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}\beta^{-1}(3a+1)^{-1}n^{-\frac{1}{2}}\max_{0\leqslant k\tau\leqslant T}\|u^k\|^{-1},\right.$$
$$\left. h^2(6a+1)(4n\nu(3a+1))^{-1}\right\}, \tag{12.96}$$

则可取 $m = 6a + 2$，从而存在 $c_0 > 0$，使得

$$\tilde{E}^k = \|\tilde{u}^k\|^2 + \|\tilde{p}^k\|^2 + \nu\tau\sum_{\xi=0}^{k-1}|\tilde{u}^\xi|_1^2 + c_0\tau^2\sum_{\xi=0}^{k-1}\|\tilde{u}_t^\xi\|^2$$
$$\leqslant M_9\tilde{\rho}(k\tau) + \tau^2\sum_{\xi=0}^{k-1}(-c_0 + M_8\tau^2 h^{-n-2}\|\tilde{u}^\xi\|^2)\|d^{(\frac{1}{2})}(\tilde{p}^\xi, u^\xi$$
$$+ \tilde{u}^\xi)\|^2 + \tau\sum_{\xi=0}^{k-1}(-\nu + M_6\varepsilon + M_3\tau^{\frac{1}{2}} + M_4\tau^3 h^{-2}$$
$$+ M_4\tau^3 h^{-2-n}\|\tilde{u}^\xi\|^2)|\tilde{u}^\xi|_1^2 + \tau\sum_{\xi=0}^{k-1}R^\xi,$$

其中
$$\tilde{\rho}(k\tau) = \|\tilde{u}^0\|^2 + \|\tilde{p}^0\|^2 + \tau \sum_{\xi=0}^{k-1} (\|\tilde{f}_1^{\xi}\|^2 + \|\tilde{f}_2^{\xi}\|^2).$$

最后应用注记 4.10，其中 $E^k = \tilde{E}^k$，$N_1 = 1$，$N_2 = 2$，$d_1 = b_1 = n - r$，$d_2 = n + 2 - 2r$.

定理 12.20 若在(12.93)中，$\tau = O(h^r)$，条件(12.95)，(12.96)满足，$\tilde{\rho}(T)e^{M_{10}T} \leqslant M_{11}\min(h^{n-r}, h^{n+2-2r})$，$k\tau \leqslant T$，则
$$\tilde{E}^k \leqslant M_{12}e^{M_{10}k\tau}\tilde{\rho}(k\tau).$$

特别若 $r \geqslant \min\left(n, \dfrac{n}{2} + 1\right)$，则格式 (12.93) 的广义稳定性指标 $s \leqslant 0$.

解抛物型-双曲型耦合方程组的另一个方法是构造特征型格式的方法，即对双曲型方程或同时对抛物型方程的传输项采用基于特征概念的方法去逼近.

12.10 可压缩流，电磁流和大气环流方程组

设 $x \in \mathscr{R}^2$，U 是速度向量，T 是绝对温度，P 是压力，$\nu(T, \rho)$ 是粘性系数，$\kappa(T, \rho)$ 是第二粘性系数，$\mu(T, \rho)$ 是热传导系数，$S(T, \rho)$ 是熵，$S_T = \dfrac{\partial S}{\partial T}$，$S_\rho = \dfrac{\partial S}{\partial \rho}$，那末二维可压缩流方程组是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_l}{\partial t} + (U \cdot \nabla)U_l - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial x_l}(\kappa \nabla \cdot U) - \dfrac{1}{\rho}\displaystyle\sum_{m=1}^{2}\dfrac{\partial}{\partial x_m}\Big[\nu \\ \qquad \times \left(\dfrac{\partial U_l}{\partial x_m} + \dfrac{\partial U_m}{\partial x_l}\right)\Big] + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x_l} = f_l, \qquad l = 1, 2, \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} + (U \cdot \nabla)T - \dfrac{1}{\rho T S_T}(\nabla \cdot \mu \nabla)T - \dfrac{\nu}{2\rho T S_T} \\ \qquad \times \displaystyle\sum_{l,m=1}^{2}\left(\dfrac{\partial U_m}{\partial x_l} + \dfrac{\partial U_l}{\partial x_m}\right)^2 - \dfrac{\kappa}{\rho T S_T}(\nabla \cdot U)^2 - \dfrac{\rho S_\rho}{S_T} \\ \qquad \times (\nabla \cdot U) = 0, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + (U \cdot \nabla)\rho + \rho(\nabla \cdot U) = 0. \end{cases} \tag{12.97}$$

在一定条件下，Tani (1976) 证明了第一类初、边值问题局部古典解的存在性和唯一性．关于它的解法可见 Richtmyer, Morton (1967), Roache (1976) 等人的文章．如果直接从(12.97)出发建立差分格式，则要计算

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_l}(\kappa\nabla\cdot U)-\frac{1}{\rho}\sum_{m=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_m}\left(\nu\left(\frac{\partial U_l}{\partial x_m}+\frac{\partial U_m}{\partial x_l}\right)\right).$$

若 ρ 很小，ρ 的误差 $\tilde{\rho}$ 会使 $\rho+\tilde{\rho}<0$，从而所计算的方程就不再是抛物型方程．为此可以引入 $\varphi=\ln\rho$，若 $P=R^{\rho}T$，则有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U_l}{\partial t}+(U\cdot\nabla)U_l-e^{-\varphi}\dfrac{\partial}{\partial x_l}(\kappa\nabla\cdot U)-e^{-\varphi}\displaystyle\sum_{m=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_m}\Bigg(\nu\\ \qquad\times\left(\dfrac{\partial U_l}{\partial x_m}+\dfrac{\partial U_m}{\partial x_l}\right)\Bigg)+R\dfrac{\partial T}{\partial x_l}+RT\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_l}=f_l,\\ \qquad\qquad l=1,2,\\ \dfrac{\partial T}{\partial t}+(U\cdot\nabla)T-e^{-\varphi}T^{-1}S_T^{-1}(\nabla\cdot\mu\nabla)T\\ \qquad-\dfrac{1}{2}\nu e^{-\varphi}T^{-1}S_T^{-1}\displaystyle\sum_{l,m=1}^{2}\left(\frac{\partial U_l}{\partial x_m}+\frac{\partial U_m}{\partial x_l}\right)^2\\ -\kappa e^{-\varphi}T^{-1}S_T^{-1}(\nabla\cdot U)^2-S_\varphi S_T^{-1}(\nabla\cdot U)=0,\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+(U\cdot\nabla)\varphi+\nabla\cdot U=0.\end{cases}\tag{12.98}$$

对于初、边值问题，则要计算 φ 在 Γ 上的近似值．例如若在 Γ 上，$U=0$，则 Γ 是(12.98)的第三个方程的特征曲面，因此不能给出 φ 的值，这就需要用内插方法来计算它．

Kuo Pen-yu (1980) 构造了一类差分格式，并证明它的周期解具有广义稳定性指标 $s\leqslant 2$．如果在 Γ 上 $U=0$，并用至少二阶精度的内插方法来计算 φ 在边界上的近似值，那末也有广义稳定性指标 $s\leqslant 2$，所以对于适当光滑的解，格式是收敛的．详见 Guo Ben-yu (1983a) 的文章．

在等离子体物理等问题中，则要解电磁流体方程组，例如可见 Roberts, Potter (1970)，用 b 表示磁场强度，$\eta(T,\rho)$ 表示电阻系

数，并假定 $\varphi = \ln\rho$，则有

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial U_l}{\partial t} + (U\cdot\nabla)U_l - e^{-\varphi}\dfrac{\partial}{\partial x_l}(\kappa\nabla\cdot U) - e^{-\varphi}\sum\limits_{m=1}^{2}\dfrac{\partial}{\partial x_m}\Bigg(\nu \\
\qquad \times\left(\dfrac{\partial U_l}{\partial x_m} + \dfrac{\partial U_m}{\partial x_l}\right)\Bigg) + e^{-\varphi}\dfrac{\partial P}{\partial x_l} + \dfrac{1}{2}e^{-\varphi}\dfrac{\partial}{\partial x_m}|b|^2 \\
\qquad - e^{-\varphi}(b\cdot\nabla)b_l = f_l, \qquad l = 1, 2, \\
\dfrac{\partial T}{\partial t} + (U\cdot\nabla)T - e^{-\varphi}T^{-1}S_T^{-1}(\nabla\cdot\mu\nabla)T - \dfrac{1}{2}\nu e^{-\varphi}T^{-1}S_T^{-1} \\
\qquad \times\sum\limits_{l,m=1}^{2}\left(\dfrac{\partial U_m}{\partial x_l} + \dfrac{\partial U_l}{\partial x_m}\right)^2 - \kappa e^{-\varphi}T^{-1}S_T^{-1}(\nabla\cdot U)^2 \\
\qquad - S_\varphi S_T^{-1}(\nabla\cdot U) - \eta e^{-\varphi}T^{-1}S_T^{-1}|\nabla\times b|^2 = 0, \\
\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + (U\cdot\nabla)\varphi + \nabla\cdot U = 0, \\
\dfrac{\partial b_l}{\partial t} + (U\cdot\nabla)b_l + b_l(\nabla\cdot U) - (b\cdot\Delta)U_l - (\nabla\cdot\eta\nabla)b_l \\
\qquad = 0, \qquad l = 1, 2,
\end{cases}
$$

郭本瑜 (1982c) 从上述方程出发，构造了一类格式，并证明了它的误差估计.

另一个重要方程组是大气环流方程组. 用 U, V 和 W 分别表示空间方向 X, Y 和垂直方向的分速度，p 是压力，g 是重力加速度，z 是等压面高度，$\phi = gz$，T 是温度，R 是空气的气体常数，c_p 是定压比热，F 是科氏系数，f_l 是已知外力，a 是热源函数，$\nu_l \geqslant 0$ 表示内摩擦系数，$\mu_l \geqslant 0$ 表示热传导系数，那末考虑到热传导效应，内摩擦效应以及动能向内能转化的耗散项以后，可以把大气环流方程(见 Haltiner (1971)) 修改为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial t} + U\dfrac{\partial U}{\partial X} + V\dfrac{\partial U}{\partial Y} + W\dfrac{\partial U}{\partial p} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial X} - FV \\
\qquad - \dfrac{\partial}{\partial X}\left(\nu_1\dfrac{\partial U}{\partial X}\right) - \dfrac{\partial}{\partial Y}\left(\nu_1\dfrac{\partial U}{\partial Y}\right) - \dfrac{\partial}{\partial p}\left(\nu_2\dfrac{\partial U}{\partial p}\right) = f_1, \\
\dfrac{\partial V}{\partial t} + U\dfrac{\partial V}{\partial X} + V\dfrac{\partial V}{\partial Y} + W\dfrac{\partial V}{\partial p} + \dfrac{\partial\phi}{\partial Y} + FU
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\quad -\dfrac{\partial}{\partial X}\left(\nu_1\dfrac{\partial V}{\partial X}\right)-\dfrac{\partial}{\partial Y}\left(\nu_1\dfrac{\partial V}{\partial Y}\right)-\dfrac{\partial}{\partial p}\left(\nu_2\dfrac{\partial V}{\partial p}\right)=f_2,\\
\dfrac{\partial T}{\partial t}+U\dfrac{\partial T}{\partial X}+V\dfrac{\partial T}{\partial Y}+W\dfrac{\partial T}{\partial p}+\dfrac{W}{c_p}\dfrac{\partial\phi}{\partial p}-\dfrac{\nu_1}{c_p}\left[\left(\dfrac{\partial U}{\partial X}\right)^2\right.\\
\quad\left.+\left(\dfrac{\partial U}{\partial Y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial V}{\partial X}\right)^2+\left(\dfrac{\partial V}{\partial Y}\right)^2\right]-\dfrac{\nu_2}{c_p}\left[\left(\dfrac{\partial U}{\partial p}\right)^2+\left(\dfrac{\partial V}{\partial p}\right)^2\right]\\
\quad -\dfrac{\partial}{\partial X}\left(\mu_1\dfrac{\partial T}{\partial X}\right)-\dfrac{\partial}{\partial Y}\left(\mu_1\dfrac{\partial T}{\partial Y}\right)-\dfrac{\partial}{\partial p}\left(\mu_2\dfrac{\partial T}{\partial p}\right)=a,\\
\dfrac{\partial U}{\partial X}+\dfrac{\partial V}{\partial Y}+\dfrac{\partial W}{\partial p}=0,\\
\dfrac{\partial\phi}{\partial p}+\dfrac{RT}{p}=0.
\end{cases}
\tag{12.99}
$$

Lilly (1965) 等指出,差分格式的守恒性和稳定性密切相关.事实上,(12.99) 的解满足

$$
\frac{d}{dt}E-\frac{1}{g}\int_\Gamma\left(\frac{1}{2}U^2+\frac{1}{2}V^2+c_pT+\phi\right)\bar{U}\cdot ds=0,
$$

其中 $\bar{U}=(U,V,W)^*$, E 是总能量,

$$
E=-\frac{1}{g}\int_\Omega\left(\frac{1}{2}U^2+\frac{1}{2}V^2+c_pT\right)d\Omega. \tag{12.100}
$$

为了模拟上述性质,关键在于合理地离散非线性项

$$
U\frac{\partial\eta}{\partial X}+V\frac{\partial\eta}{\partial Y}+W\frac{\partial\eta}{\partial p},\qquad \eta=U,V,T.
$$

郭本瑜 (1979b) 构造了下列差分算子

$$
\begin{aligned}
d^{(\alpha)}(\eta,U,V,W)=\alpha(U\eta_{\hat{x}}+V\eta_{\hat{y}}+W\eta_{\hat{p}})+(1-\alpha)((U\eta)_{\hat{x}}\\
+(V\eta)_{\hat{y}}+(W\eta)_{\hat{p}}),\qquad 0\leqslant\alpha\leqslant 1.
\end{aligned}
$$

对于 (12.99) 的第一、二个方程,采用 $\alpha=\frac{1}{2}$. 对于第三个方程则采用 $\alpha=0$. 于是所得的差分格式的解满足与 (12.100) 相类似的守恒性,他还严格估计了预报误差,证实了 Lorenz (1963) 提出的可预报期.

在数值天气预报中，通常用 $\bar{d}(\eta, U, V, W)$ 来逼近 $U\dfrac{\partial\eta}{\partial X} + V\dfrac{\partial\eta}{\partial Y} + W\dfrac{\partial\eta}{\partial p}$，其中

$$
\begin{aligned}
\bar{d}(\eta, U, V, W) = \frac{1}{4}[&(U + U^{+x})\eta_x + (U + U^{-x})\eta_{\bar{x}} \\
&+ (V^{+y} + V)\eta_y + (V^{-y} + V)\eta_{\bar{y}} \\
&+ (W^{+p} + W)\eta_p + (W^{-p} + W)\eta_{\bar{p}}],
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&U^{+x}(x, y, p, t) = U(x + h, y, p, t), \\
&U^{-x}(x, y, p, t) = U(x - h, y, p, t), \text{ 等等.}
\end{aligned}
$$

可证明

$$
\begin{aligned}
\bar{d}(\eta, U, V, W) = d^{(\frac{1}{2})}&(\eta, U, V, W) \\
&- \frac{1}{2}\eta(U_{\hat{x}} + V_{\hat{y}} + W_{\hat{p}}),
\end{aligned}
$$

因此 $\bar{d}$ 是近似最佳的.不过在实际的大气过程中，$d^{(\frac{1}{2})}(\eta, U, V, W)$ 一般比 $\eta(U_{\hat{x}} + V_{\hat{y}} + W_{\hat{p}})$ 大 1—2 个数量级，d 与 $\bar{d}$ 相差不大，所以仍可得到较好的数值结果.

在 Haltiner (1971) 和郭本瑜 (1979b) 的文章中，还介绍了 σ 座标下的差分格式.

在数值天气预报中，还会遇到抛物型-双曲型方程组，例如正压原始方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial t} + U\dfrac{\partial U}{\partial x} + V\dfrac{\partial U}{\partial y} + \dfrac{\partial\phi}{\partial x} - \nu\Delta U - FV = 0, \\[2ex]
\dfrac{\partial V}{\partial t} + U\dfrac{\partial V}{\partial x} + V\dfrac{\partial V}{\partial y} + \dfrac{\partial\phi}{\partial y} - \nu\Delta V + FU = 0, \\[2ex]
\dfrac{\partial\phi}{\partial t} + U\dfrac{\partial\phi}{\partial x} + V\dfrac{\partial\phi}{\partial y} + \phi\left(\dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial x}\right) = 0,
\end{cases}
$$

其中记号的意义同 (12.99). Shuman (1962) 提出了一种差分格式，它成功地用于计算这个问题，Gates (1967) 还采用了交错网格，郭本瑜 (1980b) 也提出了一类守恒格式，并精确估计了计算误差.

§ 13 多维初、边值问题的经济算法

正如前几节所指出的那样，若采用稳定的显式格式计算抛物型方程，则往往对步长比限制太严．若采用隐式格式，则计算量太大。例如设 $x \in \mathscr{R}^n$, $\Omega = \{x/0 < x_m < 1, 1 \leqslant m \leqslant n\}$, 并考虑下列问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} - \nu \Delta U = 0, & x \in \Omega, 0 < t \leqslant T, \\ U(x, t) = 0, & x \in \Gamma, 0 \leqslant t \leqslant T, \\ U(x, 0) = U_0(x). & x \in \Omega. \end{cases} \tag{13.1}$$

设 x_m 和 t 方向的步长分别为 h 和 τ, $\lambda = \dfrac{\tau}{h^2}$, $\Omega_h = \{x/x_m = j_m h$ $1 \leqslant j_m \leqslant J - 1, 1 \leqslant m \leqslant n\}$, $Jh = 1$, $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, 并用下式计算 (13.1)

$$\begin{cases} u_t^k(x) - \nu\sigma\Delta_h u^{k+1}(x) - \nu(1-\sigma)\Delta_h u^k(x) = 0, \\ \qquad\qquad x \in \Omega_h, \ k \geqslant 0, \\ u^k(x) = 0, \qquad\qquad x \in \Gamma_h, \ k \geqslant 0, \\ u^0(x) = U_0(x), \qquad\qquad x \in \Omega_h. \end{cases} \tag{13.2}$$

它的增长系数是

$$G(\beta, \tau) = \frac{1 - 4\lambda\nu(1-\sigma)a_n(\beta, \tau)}{1 + 4\lambda\nu\sigma a_n(\beta, \tau)},$$

其中 $a_n(\beta, \tau) = \sum\limits_{m=1}^{n} \sin^2 \dfrac{\beta_m h}{2}$.

显然，它的稳定性条件是 $\sigma \geqslant \dfrac{1}{2}$ 或 $\lambda \leqslant \dfrac{1}{2n\nu(1-2\sigma)}$. 如果采用显式格式，则对 λ 的限制太严，而且 n 越大，限制也越严．若采用隐式格式，则要求解 J^n 阶代数方程组，工作量太大．为此人们提出了各种既稳定工作量又较小的经济算法．本节逐一地介绍显式隐式混合格式，交替方向显式格式，交替方向法，预估校正格式和分裂法，并以二维涡度方程为例，说明了非线性问题的经济算

法.

13.1 显式隐式混合格式

第一种混合格式是在相邻的两个时刻，交替地使用显式和隐式格式，例如

$$\begin{cases} u_{\bar{t}}^{k}(x) - \nu\Delta_h u^k(x) = 0, & x \in \Omega_h,\ k = 2l-1,\ l \geqslant 1, \\ u_{\bar{t}}^{k}(x) - \nu\Delta_h u^{k+1}(x) = 0, & x \in \Omega_h,\ k = 2l,\ l \geqslant 1. \end{cases} \tag{13.3}$$

或者当 $k = 2l-1$ 时用第二式计算，而当 $k = 2l$ 时，用第一式计算，它们的工作量只有隐式格式的一半.

由分离变量法得到它的增长系数

$$G(\beta,\tau) = \begin{cases} 1 - 4\lambda\nu a_n(\beta,\tau), & 当\ k = 2l-1, \\ (1 + 4\lambda\nu a_n(\beta,\tau))^{-1}, & 当\ k = 2l, \end{cases}$$

所以当 $k = 2l$ 时，

$$|G^k(\beta,\tau)| = \left|\frac{1 - 4\lambda\nu a_n(\beta,\tau)}{1 + 4\lambda\nu a_n(\beta,\tau)}\right|^l \leqslant 1,$$

当 $k = 2l+1$ 时

$$|G^k(\beta,\tau)| \leqslant |1 - 4\lambda\nu a_n(\beta,\tau)| \leqslant c_1,$$

所以格式 (13.3) 是绝对稳定的.

第二种方法是 Hopscotch 方法. 它原来由 Sheldon (1962)提出，是用来计算 Poisson 方程的差分格式的迭代法. 后来，Gourlay (1970a, b) 把它应用于抛物型方程，例如用下式计算 (13.1)

$$\begin{cases} u_{\bar{t}}^{k}(x) - \nu\Delta_h u^k(x) = 0, & 当\ \sum_{m=1}^{n} i_m\ 为奇数时, \\ u_{\bar{t}}^{k}(x) - \nu\Delta_h u^{k+1}(x) = 0, & 当\ \sum_{m=1}^{n} i_m\ 为偶数时. \end{cases} \tag{13,4}$$

或者，当 $\sum_{m=1}^{n} i_m$ 为奇数时，用第二式计算，否则用第一式计算.

Hopscotch 方法的一种变形是

$$\begin{cases} u_t^k(x) - \nu\Delta_h u^k(x) = 0, & \text{当} \sum_{m=1}^{n} j_m + k \text{为奇数时,} \\ u_t^k(x) - \nu\Delta_h u^{k+1}(x) = 0, & \text{当} \sum_{m=1}^{n} j_m + k \text{为偶数时.} \end{cases} \tag{13.5}$$

或者，当 $\sum_{m=1}^{n} j_m + k$ 为奇数时用第二式计算，否则用第一式计算。Gourlay, Mckee (1971) 等还研究了具有混合导数项的情况。

(13.4)和 (13.5) 实际上是显式格式。下面来讨论稳定性，为方便计，设 $n=1$，于是 (13.5) 为

$$\begin{cases} u^{2k+2}(2jh) = (1-2\lambda)u^{2k+1}(2jh) + \lambda(u^{2k+1}(2jh-h) \\ \qquad\qquad + u^{2k+1}(2jh+h)), \\ u^{2k+2}(2jh-h) = \dfrac{1}{1+2\lambda}[u^{2k+1}(2jh-h) + \lambda(u^{2k+2}(2jh) \\ \qquad\qquad + u^{2k+2}(2jh-2h))], \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} u^{2k+1}(2jh-h) = (1-2\lambda)u^{2k}(2jh-h) + \lambda(u^{2k}(2jh) \\ \qquad\qquad + u^{2k}(2jh-2h)), \\ u^{2k+1}(2jh) = \dfrac{1}{1+2\lambda}[u^{2k}(2jh) + \lambda(u^{2k+1}(2jh-h) \\ \qquad\qquad + u^{2k+1}(2jh+h))]. \end{cases}$$

把后两式代入前两式，就得到

$$\begin{cases} u^{2k+2}(2jh) = \dfrac{1-2\lambda+4\lambda^2}{1+2\lambda}u^{2k}(2jh) + \dfrac{2\lambda(1-2\lambda)}{1+2\lambda}(u^{2k}(2jh \\ \qquad -h) + u^{2k}(2jh+h)) + \dfrac{2\lambda^2}{1+2\lambda}(u^{2k}(2jh-2h) \\ \qquad + u^{2k}(2jh+2h)), \\ u^{2k+2}(2jh-h) = \dfrac{1}{(1+2\lambda)^2}[2\lambda^3u^{2k}(2jh-4h) + 2\lambda^2(1 \\ \qquad -2\lambda)u^{2k}(2jh-3h) + 2\lambda(1+3\lambda^2)u^{2k}(2jh-2h) \\ \qquad + (1-8\lambda^3)u^{2k}(2jh-h) + 2\lambda(1+3\lambda^2)u^{2k}(2jh) \\ \qquad + 2\lambda^2(1-2\lambda)u^{2k}(2jh+h) + 2\lambda^3u^{2k}(2jh+2h)], \end{cases}$$

令 $v^k(jh)=(u^{2k}(jh),u^{2k}(2jh-h))^*$，则得到

$$v^{k+1}(jh)=A_{-2}v^k(jh-2h)+A_{-1}v^k(jh-h)+A_0v^k(jh)+A_1v^k(jh+h),$$

其中

$$A_{-2}=\frac{1}{(1+2\lambda)^2}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2\lambda^3 & 0\end{pmatrix},$$

$$A_{-1}=\frac{1}{(1+2\lambda)^2}\begin{pmatrix}2\lambda^2(1+2\lambda) & 0\\ 2\lambda(1+3\lambda^2) & 2\lambda^2(1-2\lambda)\end{pmatrix},$$

$$A_0=\frac{1}{(1+2\lambda)^2}\begin{pmatrix}1+8\lambda^3 & 2\lambda(1-4\lambda^2)\\ 2\lambda(1+3\lambda^2) & 1-8\lambda^3\end{pmatrix},$$

$$A_1=\frac{1}{(1+2\lambda)^2}\begin{pmatrix}2\lambda^2(1+2\lambda) & 2\lambda(1-4\lambda^2)\\ 2\lambda^3 & 2\lambda^2(1-2\lambda)\end{pmatrix},$$

所以增长矩阵为

$$G(\beta,\tau)=\frac{1}{(1+2\lambda)^2}\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}.$$

其中

$$a_1=4\lambda^2(1+2\lambda)\cos\beta h+8\lambda^3+1,$$
$$a_2=2\lambda(1-4\lambda^2)(1+e^{i\beta h}),$$
$$a_3=2\lambda(1+e^{-i\beta h})(1+2\lambda^2+2\lambda^2\cos\beta h),$$
$$a_4=4\lambda^2(1-2\lambda)\cos\beta h-8\lambda^3+1.$$

经计算，特征方程是

$$(1+2\lambda)^4\lambda^2(G)-2(1+2\lambda)^2(1+4\lambda^2\cos\beta h)\lambda(G)+(4\lambda^2-1)^2=0,$$

特征值为

$$\lambda^{(1)}(G)=\frac{1}{(1+2\lambda)^2}\left(1+4\lambda^2\cos\beta h+2\lambda\sqrt{2(1+\cos\beta h)-4\lambda^2\sin^2\beta h}\right),$$

$$\lambda^{(2)}(G)=\frac{1}{(1+2\lambda)^2}\left(1+4\lambda^2\cos\beta h-2\lambda\sqrt{2(1+\cos\beta h)-4\lambda^2\sin^2\beta h}\right).$$

显然，当 $\beta h\to 0$ 或 $\beta h\to 2\pi$ 时，$\lambda^{(1)}(G)\to 1$，$\lambda^{(2)}(G)\to\left(\frac{1-2\lambda}{1+2\lambda}\right)^2$ <1。故存在 $\delta>0$，$0<r_1<1$，使得当 $0\leqslant\beta h\leqslant\delta$ 或 $2\pi-\delta\leqslant\beta h\leqslant 2\pi$ 时，$|\lambda^{(1)}(G)|\leqslant 1$，$|\lambda^{(2)}(G)|\leqslant r_1$。

李荣华 (1963) 证明，对于实系数方程 $z^2+\alpha z+\beta=0$，当且仅当 $|\alpha|<\beta+1<2$ 时，它的根的绝对值都小于 1。因为当 $0\leqslant\beta h\leqslant\delta$ 或 $2\pi-\delta\leqslant\beta h\leqslant 2\pi$ 时，

$$\left|\frac{2+8\lambda^2\cos\beta h}{(1+2\lambda)^2}\right|<\frac{2+8\lambda^2}{(1+2\lambda)^2}=\frac{(1-2\lambda)^2}{(1+2\lambda)^2}+1<2,$$

所以存在正数 r_2，使得 $|\lambda^{(l)}(G)|\leqslant r_2$，$l=1,2$。综合上面的结果得到，对一切 βh，$|\lambda^{(1)}(G)|\leqslant 1$，$|\lambda^{(2)}(G)|\leqslant\max(r_1,r_2)<1$。因此，根据定理 4.9，上述格式对一切 λ 值都是稳定的。

13.2 交替方向显式法

Саульев (1957a) 最早提出了交替方向显式法，即 ADE 型格式。设 $A(u^k(x))$ 是按一定次序取下列 2^n 种形式之一的差分算子

$$A_1(u^k(x))=-u^k_{\bar{x}_1}(x)-u^k_{\bar{x}_2}(x)-\cdots-u^k_{\bar{x}_{n-1}}(x)-u^k_{\bar{x}_n}(x),$$
$$A_2(u^k(x))=-u^k_{\bar{x}_1}(x)-u^k_{\bar{x}_2}(x)-\cdots-u^k_{\bar{x}_{n-1}}(x)+u^k_{x_n}(x),$$
$$A_3(u^k(x))=-u^k_{\bar{x}_1}(x)-u^k_{\bar{x}_2}(x)-\cdots+u^k_{x_{n-1}}(x)-u^k_{\bar{x}_n}(x),$$
$$\cdots\ \cdots,$$
$$A_{2^n}(u^k(x))=u^k_{x_1}(x)+u^k_{x_2}(x)+\cdots+u^k_{x_{n-1}}(x)+u^k_{x_n}(x),$$

于是计算 (13.1) 的 ADE 型格式是

$$\begin{cases}u^k_t(x)-\nu\Delta_h u^k(x)-\dfrac{\nu\tau}{h}A(u^k_t(x))=0, & x\in\Omega_h, k\geqslant 0,\\ u^k(x)=0, & x\in\Gamma_h, k\geqslant 0,\\ u^0(x)=U_0(x), & x\in\Omega_h.\end{cases}\tag{13.6}$$

Larkin (1964) 提出了一种改进了的形式，即用 $A_l(u^k(x))$ 计算预估值 $u_l^{k+1}(x)$，并且令

$$u^{k+1}(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{l=1}^{2^n}u_l^{k+1}(x).$$

可以用 Fourier 方法分析 (13.6) 的稳定性，而这只要验证每一个 $A_l(u^k(x))$ 的增长系数．例如当 $l=1$ 时有

$$u_l^k(x)-\nu\Delta_h u^k(x)+\frac{h\lambda\nu}{\tau}\sum_{m=1}^{n}u_{\bar{x}_m}^{k+1}(x)$$

$$-\frac{h\lambda\nu}{\tau}\sum_{m=1}^{n}u_{\bar{x}_m}^{k}(x)=0. \tag{13.7}$$

因为

$$\begin{aligned}(h\lambda\nu e^{i\beta_m x_m})_{\bar{x}_m}&=\lambda\nu e^{i\beta_m x_m}(1-e^{-i\beta_m h})\\&=2i\lambda\nu e^{i\beta_m(x_m-\frac{h}{2})}\sin\frac{\beta_m h}{2}\\&=2\lambda\nu e^{i\beta_m x_m}\left(\sin^2\frac{\beta_m h}{2}+i\sin\frac{\beta_m h}{2}\cos\frac{\beta_m h}{2}\right),\end{aligned}$$

所以 (13.7) 的增长系数是

$$G_1(\beta,\tau)=\frac{1-2\lambda\nu a_n(\beta,\tau)+2i\lambda\nu b_n(\beta,\tau)}{1+2\lambda\nu a_n(\beta,\tau)+2i\lambda\nu b_n(\beta,\tau)},$$

其中 $a_n(\beta,\tau)$ 如前所示，

$$b_n(\beta,\tau)=\sum_{m=1}^{n}\sin\frac{\beta_m h}{2}\cos\frac{\beta_m h}{2}.$$

显然，对一切 λ 都有 $|G_1(\beta,\tau)|\leqslant 1$，因此格式 (13.7) 是绝对稳定的．当 $l\neq 1$ 时，也可证明 $|G_l(\beta,\tau)|\leqslant 1$．因此格式(13.6) 也是绝对稳定的．

Less (1961b) 等用能量法研究了非直角区域和变系数抛物型方程的 ADE 型格式．关于 ADE 型格式的讨论还可见 Barakat, Clark (1966), Carnahan, Luther, Wilkes (1969) 和 Roache (1976) 等人的文章．

13.3 交替方向法

由于可以用追赶法计算一个空间变量的隐式格式，而且工作

量并不大，因此人们设法构造一些解多维问题的绝对稳定的差分格式，使得它具有一维问题隐式格式的形式．关于这方面的工作最早是 Peaceman, Rachford (1955) 和 Douglas (1955) 开展的．此类方法被称为交替方向法，即 ADI 方法．

下面先假定在 (13.1) 中 $n=2$，于是计算(13.1)的 Peaceman-Rachford 交替方向格式是

$$\begin{cases} \dfrac{u^{k+\frac{1}{2}}(x)-u^k(x)}{\tau}=\dfrac{\nu}{2}\left(u^{k+\frac{1}{2}}_{x_1\bar{x}_1}(x)+u^k_{x_2\bar{x}_2}(x)\right), \\ \dfrac{u^{k+1}(x)-u^{k+\frac{1}{2}}(x)}{\tau}=\dfrac{\nu}{2}\left(u^{k+\frac{1}{2}}_{x_1\bar{x}_1}(x)+u^{k+1}_{x_2\bar{x}_2}(x)\right). \end{cases} \tag{13.8}$$

具体计算时，只要求解具有三对角线系数矩阵的线性代数方程组，所以大大减少了工作量．

把 (13.8) 中的两式相加，即得到

$$u^k_t(x)=\nu u^{k+\frac{1}{2}}_{x_1\bar{x}_1}(x)+\frac{\nu}{2}\left(u^{k+1}_{x_2\bar{x}_2}(x)+u^k_{x_2\bar{x}_2}(x)\right). \tag{13.9}$$

把 (13.8) 中的两式相减后有

$$4u^{k+\frac{1}{2}}(x)=2(u^{k+1}(x)+u^k(x))-\nu\tau(u^{k+1}_{x_2\bar{x}_2}(x)-u^k_{x_2\bar{x}_2}(x)).$$

把它代入 (13.9) 后得到

$$u^k_t(x)+\frac{\nu^2\tau^2}{4}u^k_{t x_1\bar{x}_1x_2\bar{x}_2}(x)=\frac{\nu}{2}\Delta_h(u^{k+1}(x)+u^k(x)). \tag{13.10}$$

把光滑解代入上式，即知它的逼近误差是 $O(h^2+\tau^2)$．

(13.10) 又可改写为

$$\begin{aligned} u^{k+1}(x)-\frac{\nu\tau}{2}\Delta_h u^{k+1}(x)+\frac{\nu^2\tau^2}{4}u^{k+1}_{x_1\bar{x}_1x_2\bar{x}_2}(x) \\ =u^k(x)+\frac{\nu\tau}{2}\Delta_h u^k(x)+\frac{\nu^2\tau^2}{4}u^k_{x_1\bar{x}_1x_2\bar{x}_2}(x). \end{aligned}$$

应用分离变量法得到它的增长系数

$$G(\beta,\tau)=\frac{\left(1-2\lambda\nu\sin^2\dfrac{\beta_1h}{2}\right)\left(1-2\lambda\nu\sin^2\dfrac{\beta_2h}{2}\right)}{\left(1+2\lambda\nu\sin^2\dfrac{\beta_1h}{2}\right)\left(1+2\lambda\nu\sin^2\dfrac{\beta_2h}{2}\right)}.$$

因为对一切 λ，$|G(\beta,\tau)|\leqslant 1$，所以格式(13.8)是绝对稳定的。可惜的是，若把它推广到 $n\geqslant 3$ 时，相应的格式不是绝对稳定的。

Douglas, Rachford (1956) 提出了另一类交替方向法。对于问题(13.1)，则有

$$\begin{cases}\dfrac{u^{k+\frac{1}{n}}(x)-u^{k}(x)}{\tau}=\nu u^{k+\frac{1}{n}}_{x_1\bar{x}_1}(x)+\nu\sum\limits_{m=2}^{n}u^{k}_{x_m\bar{x}_m}(x),\\ \dfrac{u^{k+\frac{m}{n}}(x)-u^{k+\frac{m-1}{n}}(x)}{\tau}=\nu u^{k+\frac{m}{n}}_{x_m\bar{x}_m}(x)-\nu u^{k}_{x_m\bar{x}_m}(x),\\ \qquad 1\leqslant m\leqslant n.\end{cases}\tag{13.11}$$

可以证明，(13.11) 是绝对稳定的，但是它的逼近精度只是 $O(h^2+\tau)$。

Douglas (1962) 提出了又一种交替方向法。对于问题(13.1)，则是

$$\begin{cases}\dfrac{u^{k+\frac{1}{n}}(x)-u^{k}(x)}{\tau}=\dfrac{\nu}{2}\left(u^{k+\frac{1}{n}}_{x_1\bar{x}_1}(x)+u^{k}_{x_1\bar{x}_1}(x)\right)+\nu\sum\limits_{m=2}^{n}u^{k}_{x_m\bar{x}_m}(x),\\ \dfrac{u^{k+\frac{m}{n}}(x)-u^{k+\frac{m-1}{n}}(x)}{\tau}=\dfrac{\nu}{2}u^{k+\frac{m}{n}}_{x_m\bar{x}_m}(x)-\dfrac{\nu}{2}u^{k}_{x_m\bar{x}_m}(x),\\ \qquad 1\leqslant m\leqslant n,\end{cases}\tag{13.12}$$

在具体计算时，也只要求解具有三对角线系数矩阵的代数方程组。但由于在第二式中同时含有 $u^{k+\frac{m}{n}}(x)$，$u^{k+\frac{m-1}{n}}(x)$ 和 $u^{k}(x)$，所以存贮量比 Peaceman-Rachford 的交替方向法大。

下面来分析逼近误差和稳定性。为简便计，设 $n=3$，则由(13.12) 得到

$$\begin{aligned}u^{k}_{t}(x)&+\frac{\nu^2\tau^2}{4}\left(u^{k}_{t x_1\bar{x}_1x_2\bar{x}_2}(x)+u^{k}_{t x_2\bar{x}_2x_3\bar{x}_3}(x)+u^{k}_{t x_3\bar{x}_3x_1\bar{x}_1}(x)\right)\\&-\frac{\nu^3\tau^3}{8}u^{k}_{t x_1\bar{x}_1x_2\bar{x}_2x_3\bar{x}_3}(x)=\frac{\nu}{2}\left(\Delta_h u^{k+1}(x)+\Delta_h u^{k}(x)\right).\end{aligned}\tag{13.13}$$

因此它的逼近误差是 $O(h^2+\tau^2)$，又由分离变量法得到它的增长

系数

$$G(\beta, \tau) = \frac{1 - (d_1 + d_2 + d_3) + (d_1d_2 + d_2d_3 + d_3d_1) + d_1d_2d_3}{1 + (d_1 + d_2 + d_3) + (d_1d_2 + d_2d_3 + d_3d_1) + d_1d_2d_3},$$

其中

$$d_m = 2\lambda\nu \sin^2 \frac{\beta_m h}{2}, \qquad m = 1, 2, 3.$$

显然，对一切 λ, $|G(\beta, \tau)| \leqslant 1$, 因此 (13.13) 还是绝对稳定的.

还有许多关于交替方向法的工作，例如 Aziz, Hellums (1967) 和 Mckee, Mitchell (1970) 把它应用于包含 $\frac{\partial U}{\partial x_m}$ 和 $\frac{\partial^2 U}{\partial x_l \partial x_m}$ 项的抛物型方程. Spanier (1968) 考虑了变步长网格和各种边界条件. Douglas, Gunn (1964) 和 Widlund (1967) 则讨论了更一般的情况.

对于非直角区域和变系数抛物型方程，可用能量法研究交替方向法的稳定性，Less (1961b). Less (1962) 等还用能量法研究了二阶双曲型方程的交替方向法.

13.4 预估校正格式

Douglas 格式 (13.12) 也可以看作为预估校正格式，即先用原方程得到预估值 $u^{k+\frac{1}{n}}(x)$, 再逐次地修正它，最后得到 $u^{k+1}(x)$. 但也可以用其它方法来计算预估值，最后用原方程来修正得到 $u^{k+1}(x)$. 例如当 $n = 3$ 时，Яненко (1967) 采用下列格式计算 (13.1),

$$\begin{cases} \dfrac{u^{k+\frac{1}{6}}(x) - u^k(x)}{\tau} = \dfrac{\nu}{2} u_{x_1\bar{x}_1}^{k+\frac{1}{6}}(x), \\[2ex] \dfrac{u^{k+\frac{1}{3}}(x) - u^{k+\frac{1}{6}}(x)}{\tau} = \dfrac{\nu}{2} u_{x_2\bar{x}_2}^{k+\frac{1}{3}}(x), \\[2ex] \dfrac{u^{k+\frac{1}{2}}(x) - u^{k+\frac{1}{3}}(x)}{\tau} = \dfrac{\nu}{2} u_{x_3\bar{x}_3}^{k+\frac{1}{2}}(x), \\[2ex] u_t^k(x) = \nu\Delta_h u^{k+\frac{1}{2}}(x). \end{cases} \tag{13.14}$$

从上式消去预估值后，也可得到 (13.13)，因此逼近误差为 $O(h^2 +$

τ^2)，并且格式绝对稳定.

Brian (1961) 也提出过一种预估校正格式. 当 $n=3$ 时，相应的格式是

$$
\begin{cases}
\dfrac{u^{k+\frac{1}{6}}(x)-u^k(x)}{\tau}=\dfrac{\nu}{2}\left(u^{k+\frac{1}{6}}_{x_1\bar{x}_1}(x)+u^k_{x_2\bar{x}_2}(x)+u^k_{x_3\bar{x}_3}(x)\right., \\
\dfrac{u^{k+\frac{1}{3}}(x)-u^{k+\frac{1}{6}}(x)}{\tau}=\dfrac{\nu}{2}\left(u^{k+\frac{1}{3}}_{x_2\bar{x}_2}(x)-u^k_{x_2\bar{x}_2}(x)\right), \\
\dfrac{u^{k+\frac{1}{2}}(x)-u^{k+\frac{1}{3}}(x)}{\tau}=\dfrac{\nu}{2}\left(u^{k+\frac{1}{2}}_{x_3\bar{x}_3}(x)-u^k_{x_3\bar{x}_3}(x)\right), \\
u_t^k(x)=\nu u^{k+\frac{1}{6}}_{x_1\bar{x}_1}(x)+\nu u^{k+\frac{1}{3}}_{x_2\bar{x}_2}(x)+\nu u^{k+\frac{1}{2}}_{x_3\bar{x}_3}(x).
\end{cases}
\tag{13.15}
$$

由它也可推出 (13.13).

13.5 分裂格式

Багриновский, Годунов (1957) 和 Яненко (1959) 提出了分裂格式，即 splitting 格式. Яненко (1964, 1967) 详细地研究了这种方法. 对于 (13.1) 来说，即为

$$
\frac{u^{k+\frac{m}{n}}(x)-u^{k+\frac{m-1}{n}}(x)}{\tau}=\frac{\nu}{2}\left(u^{k+\frac{m}{n}}_{x_m\bar{x}_m}(x)+u^{k+\frac{m-1}{n}}_{x_m\bar{x}_m}(x)\right),
$$

$$
1\leqslant m\leqslant n, \tag{13.16}
$$

(13.16) 中的每个因子都不逼近原方程的相应因子，但是从总体来说，却逼近了原方程. 例如当 $n=3$ 时，由 (13.16) 得到

$$
u_t^k(x)+\frac{\nu^2\tau}{4}\left(u^k_{tx_1\bar{x}_1x_2\bar{x}_2}(x)+u^k_{tx_2\bar{x}_2x_3\bar{x}_3}(x)+u^k_{tx_3\bar{x}_3x_1\bar{x}_1}(x)\right)
$$

$$
=\frac{\nu}{2}\left(\Delta_h u^{k+1}(x)+\Delta_h u^k(x)\right)+\frac{\nu^3\tau^2}{8}\left(u^{k+1}(x)+u^k(x)\right).
$$

它的逼近误差是 $O(h^2+\tau^2)$. 不难验证它是绝对稳定的.

Gourlay, Mitchell (1969) 等还研究了此类格式和交替方向法之间的关系.

关于 splitting 方法的早期工作还可见 Дьяконов (1962b, 1964), Софронов (1963), Коновалов (1964), Самарский (1964d)

和 Marchak, Yanenko (1965) 等人的文章。

13.6 非线性问题的经济算法

前面介绍的各种经济算法都可应用于非线性抛物型方程，例如 Scala, Gordon (1966) 应用 Hopscotch 方法计算可压缩流动，Gourlay, Morris (1971) 则用它计算激波。Quon, Dranchuk, Allada, Leung (1966) 用 ADE 型格式解非线性热传导方程。郭本瑜 (1976, 1979a, 1980a, c), Kuo Pen-yu (1977) 和 Guo Ben-yu (1981) 则应用它计算不可压缩粘性流。Kellogg (1969) 用 ADI 方法解包含非线性边界条件的非线性方程定解问题。Chorin (1968), Richards (1970) 则把它应用于不可压缩流体。但遗憾的是，正如 Wilkes (1963) 所指出的那样，非线性问题的 ADI 格式往往不稳定。关于非线性问题的 splitting 格式，则可见 Chorin (1967b, 1968), 郭本瑜(1976, 1979a, 1980a, c), Kuo Pen-yu (1977) 和 Guo Ben-yu (1981) 的文章。在本节中，以下列二维涡度方程为例，来说明怎样构造非线性问题的经济算法，

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2}H\right)-\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1}H\right)-(\nabla\cdot\nu\nabla)H=f_1, \\ \qquad\qquad x\in\Omega,\ 0<t\leqslant T, \\ \Delta\Phi+H=f_2, \qquad x\in\Omega,\ 0\leqslant t\leqslant T, \\ H=\Phi=0, \qquad x\in\Gamma, 0\leqslant t\leqslant T, \\ H(x,0)=H_0(x), \qquad x\in\Omega,\end{cases} \tag{13.17}$$

其中 H, Φ 分别是涡度与流函数，$0<\nu_0\leqslant\nu(x)\leqslant\nu_1$, $\Omega=\{x|0<x_1,x_2<1\}$. 用 h 和 τ 分别表示 x_m 和 t 的网格步长，Ω_h 的定义同 § 12.7. 差分算子 $J^{(\alpha'')}(v(x),w(x))$ 的意义也同 § 12.7. 又用 $A^{(\nu)}$ 表示按一定次序取下列形式之一的差分算子，

$$A_1^{(\nu)}(u^k(x))=-\frac{1}{2}(\nu(x-he_1)+\nu(x))u^k_{\bar{x}_1}(x)$$
$$-\frac{1}{2}(\nu(x-he_2)+\nu(x))u^k_{\bar{x}_2}(x),$$

$$A_2^{(\nu)}(u^k(x)) = -\frac{1}{2}(\nu(x - he_1) + \nu(x))u_{\bar{x}_1}^k(x)$$
$$+ \frac{1}{2}(\nu(x + he_2) + \nu(x))u_{x_2}^k(x),$$
$$A_3^{(\nu)}(u^k(x)) = \frac{1}{2}(\nu(x + he_1) + \nu(x))u_{x_1}^k(x)$$
$$-\frac{1}{2}(\nu(x - he_2) + \nu(x))u_{\bar{x}_2}^k(x),$$
$$A_4^{(\nu)}(u^k(x)) = \frac{1}{2}(\nu(x + he_1) + \nu(x))u_{x_1}^k(x)$$
$$+ \frac{1}{2}(\nu(x + he_2) + \nu(x))u_{x_2}^k(x).$$

计算 (13.17) 的 ADE 型格式是

$$\begin{cases} \eta_t^k(x) + J^{(\alpha'')}(\eta^k(x), \varphi^k(x)) - \Delta_h^{(\nu)}\eta^k(x) - \dfrac{\tau}{h}A^{(\nu)}(\eta_t^k(x)) \\ \qquad = f_1^k(x), \qquad\qquad x \in \Omega_h,\ k \geqslant 0, \\ \Delta_h\varphi^k(x) + \eta^k(x) = f_2^k(x), \qquad x \in \Omega_h, k \geqslant 0, \\ \eta^k(x) = \varphi^k(x) = 0, \qquad x \in \Gamma_h, k \geqslant 0, \\ \eta^0(x) = H_0(x), \qquad x \in \Omega_h. \end{cases} \tag{13.18}$$

为了估计误差,需要下列引理

引理 13.1 如果在 Γ_h 上 $u(x) = 0$, 则

$$2(u, A^{(\nu)}(u)) + h(|u|_1^{(\nu)})^2 - (\nu_{\bar{x}_1} + \nu_{\bar{x}_2}, u^2)$$
$$+ hS^{(\nu)}(u, u) = 0.$$

证明 不妨设 $A^{(\nu)} = A_1^{(\nu)}$. 我们有

$$-h\sum_{j_1=1}^{J-1}(\nu(j_1h - h, x_2) + \nu(j_1h, x_2))u(j_1h, x_2)u_{\bar{x}_1}(j_1h, x_2)$$
$$= -(\nu(1 - h, x_2) + \nu(1 - 2h, x_2))u^2(1 - h, x_2)$$
$$+ (\nu(1 - h, x_2) + \nu(1 - 2h, x_2))u(1 - h, x_2)$$
$$\times u(1 - 2h, x_2) - (\nu(1 - 2h, x_2) + \nu(1 - 3h, x_2))$$
$$\times u^2(1 - 2h, x_2) + (\nu(1 - 2h, x_2) + \nu(1 - 3h, x_2))$$
$$\times u(1 - 2h, x_2)u(1 - 3h, x_2) - \cdots - (\nu(h, x_2)$$
$$+ \nu(0, x_2))u^2(h, x_2).$$

另一方面又有

$$
\begin{aligned}
&\frac{h^2}{2}\sum_{j_1=1}^{J-1}\nu(j_1h,x_2)(u_{x_1}^2(j_1h,x_2)+u_{\bar{x}_1}^2(j_1h,x_2))\\
&=\left(\nu(1-h,x_2)+\frac{1}{2}\nu(1-2h,x_2)\right)u^2(1-h,x_2)\\
&\quad-(\nu(1-h,x_2)+\nu(1-2h,x_2))u(1-h,x_2)\\
&\quad\times u(1-2h,x_2)+\left(\frac{1}{2}\nu(1-h,x_2)+\nu(1-2h,x_2)\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{2}\nu(1-3h,x_2)\right)u^2(1-2h,x_2)-(\nu(1-2h,x_2)\\
&\quad+\nu(1-3h,x_2))u(1-2h,x_2)u(1-3h,x_2)\\
&\quad+\cdots+\left(\frac{1}{2}\nu(2h,x_2)+\nu(h,x_2)\right)u^2(h,x_2).
\end{aligned}
$$

用 h 乘以上两式，再把它们相加后得到

$$
\begin{aligned}
&-h^2\sum_{j_1=1}^{J-1}(\nu(j_1h,x_2)+\nu(j_1h-h,x_2))u(j_1h,x_2)u_{\bar{x}_1}(j_1h,x_2)\\
&\quad+\frac{h^3}{2}\sum_{j_1=1}^{J-1}\nu(j_1h,x_2)(u_{x_1}^2(j_1h,x_2)+u_{\bar{x}_1}^2(j_1h,x_2))\\
&=h^2\sum_{j_1=1}^{J-1}\nu_{\bar{x}_1}(j_1h,x_2)u^2(j_1h,x_2)-\frac{1}{2}h\nu(1,x_2)u^2(1-h,x_2)\\
&\quad-\frac{1}{2}h\nu(0,x_2)u^2(h,x_2).
\end{aligned}
$$

类似地可得到关于 x_2 方向求和的等式，把它们相加后即得所证.

下面用 $\tilde{\eta}^k(x)$，$\tilde{\varphi}^k(x)$ 和 $\tilde{f}_1^k(x)$ 分别表示 $\eta^k(x)$，$\varphi^k(x)$ 和 $f_1^k(x)$ 的误差，那末它们满足

$$
\begin{cases}
\tilde{\eta}_t^k(x)+J^{(\alpha'')}(\tilde{\eta}^k(x),\varphi^k(x)+\tilde{\varphi}^k(x))+J^{(\alpha'')}(\eta^k(x),\tilde{\varphi}^k(x))\\
\qquad-\dfrac{\tau}{h}A^{(\nu)}(\tilde{\eta}_t^k(x))-\Delta_h^{(\nu)}\tilde{\eta}^k(x)=\tilde{f}_1^k(x),\\
\qquad\qquad\qquad x\in\Omega_h,\ k\geqslant 0,\\
\Delta_h\tilde{\varphi}^k(x)+\tilde{\eta}^k(x)=\tilde{f}_2^k(x), \qquad x\in\Omega_h,\ k\geqslant 0,\\
\tilde{\eta}^k(x)=\tilde{\varphi}^k(x)=0, \qquad x\in\Gamma_h,\ k\geqslant 0,\\
\tilde{\eta}^{(0)}(x)=\tilde{\eta}^{(0)}(x), \qquad x\in\Omega_h.
\end{cases}
\tag{13.19}
$$

把(13.19)的第一式对 $2\bar{\eta}^k(x)$ 求内积，由引理 4.10，4.12 得到

$$\|\bar{\eta}^k\|_t^2 - \tau\|\bar{\eta}_t^k\|^2 + 2(|\bar{\eta}^k|_1^{(\nu)})^2 + 2S^{(\nu)}(\bar{\eta}^k, \bar{\eta}^k) + F_0^k + F_1^k$$
$$\leqslant \|\bar{\eta}^k\| + \|\tilde{f}_1^k\|^2, \tag{13.20}$$

其中 F_1^k 如 § 12.7 所示，

$$F_0^k = -\frac{2\tau}{h}(\bar{\eta}^k, A^{(\nu)}(\bar{\eta}_t^k)).$$

又把 (13.19) 的第二式对 $m\tau\bar{\eta}_t^k$ 求内积，则由引理 4.13 和 13.1 得到

$$m\tau\|\bar{\eta}_t^k\|^2 + \frac{m\tau}{2}[(|\bar{\eta}^k|_1^{(\nu)})^2 + S^{(\nu)}(\bar{\eta}^k, \bar{\eta}^k)]_t + F_2^k + F_3^k$$
$$+ F_4^k + F_5^k \leqslant \varepsilon\tau\|\bar{\eta}_t^k\|^2 + \frac{m^2\tau}{4\varepsilon}\|\tilde{f}^k\|^2, \tag{13.21}$$

其中 F_2^k，F_3^k，F_4^k 如 § 12.7 所示，

$$F_5^k = -\frac{m\tau^2}{2h}(\nu_{\hat{x}_1} + \nu_{\hat{x}_2}, (\bar{\eta}_t^k)^2).$$

可仿 § 12.7 的证明方法得到

$$\sum_{l=1}^{4}|F_l^k| \leqslant \varepsilon\tau\|\bar{\eta}_t^k\|^2 + M_2\{\|\bar{\eta}^k\|^2 + \|\tilde{f}_2^k\|^2$$
$$+ h(\|\bar{\eta}^k\|^2 + \|\tilde{f}_2^k\|^2)(|\bar{\eta}^k|_1^{(\nu)})^2\}.$$

此外不难证明存在正常数 c_2 和 c_3，使得

$$|F_0^k| \leqslant \frac{1}{2}(|\bar{\eta}^k|_1^{(\nu)})^2 + 6\lambda\nu_1\tau\|\bar{\eta}_t^k\|^2 + c_2\|\bar{\eta}^k\|^2,$$

$$|F_5^k| \leqslant c_3 m\tau h\|\bar{\eta}_t^k\|^2.$$

把以上各估计式代入 (13.20)，(13.21)，再把所得结果相加，即得到

$$\|\bar{\eta}^k\|_t^2 + \tau(m - 1 - 2\varepsilon - 6\lambda\nu_1 - c_3 mh)\|\bar{\eta}_t^k\|^2$$
$$+ \frac{m\tau}{2}[(|\bar{\eta}|_1^{(\nu)})^2 + S^{(\nu)}(\bar{\eta}^k, \bar{\eta}^k)]_t + (|\bar{\eta}^k|_1^{(\nu)})^2$$
$$\leqslant \tilde{R}^k + M_3(\|\tilde{f}_1^k\|^2 + \|\tilde{f}_2^k\|^2), \tag{13.22}$$

其中

$$\tilde{R}^k = M_4\|\bar{\eta}^k\|^2 + (-\nu + M_2 h(\|\bar{\eta}^k\|^2 + \|\tilde{f}_2^k\|^2))(|\bar{\eta}^k|_1^{(\nu)})^2.$$

设 h 和 ε 适当小，$p_0 \geqslant 0$，

$$m \geqslant \frac{1 + 2\varepsilon + 6\lambda\nu_1 + p_0}{1 - c_3 h},$$

则可得到

$$\tilde{E}^k \leqslant M_5 \tilde{\rho}(k\tau) + \sum_{\xi=0}^{k-1} \tilde{R}^\xi,$$

其中

$$\tilde{E}^k = \|\tilde{\eta}^k\|^2 + p_0 \tau^2 \sum_{\xi=0}^{k-1} \|\tilde{\eta}_t^\xi\|^2 + \tau \sum_{\xi=0}^{k-1} (|\tilde{\eta}^\xi|_1^{(\nu)})^2,$$

$$\tilde{\rho}(k\tau) = \|\tilde{\eta}^0\|^2 + \tau \sum_{\xi=0}^{k-1} (\|\tilde{f}_1^\xi\|^2 + \|\tilde{f}_2^\xi\|^2).$$

最后由注记 4.10 得到下列结果：

定理 13.1 若 $\tilde{\rho}(T) e^{M_6 T} \leqslant M_7 h^{-1}$，则当 $k\tau \leqslant T$ 时，

$$\tilde{E}^k \leqslant M_8 \tilde{\rho}(k\tau) e^{M_6 k\tau}.$$

显然 ADE 型格式消去了对 λ 的限制。

计算 (13.17) 的 splitting 格式可构造为

$$\begin{cases} \dfrac{\eta^{k+\frac{1}{2}}(x) - \eta^k(x)}{\tau} + \dfrac{1}{2} J_1^{(\alpha'')}(\eta^k(x) + \eta^{k+\frac{1}{2}}(x), \varphi^k(x)) \\ \qquad - \dfrac{1}{2} \Delta_{h,1}^{(\nu)} (\eta^k(x) + \eta^{k+\frac{1}{2}}(x)) = \dfrac{f_1^k(x)}{2}, \\ \qquad\qquad x \in \Omega_h,\ k \geqslant 0, \\ \dfrac{\eta^{k+1}(x) - \eta^{k+\frac{1}{2}}(x)}{\tau} + \dfrac{1}{2} J_2^{(\alpha'')}(\eta^{k+\frac{1}{2}}(x) + \eta^{k+1}(x), \varphi^k(x)) \\ \qquad - \dfrac{1}{2} \Delta_{h,2}^{(\nu)} (\eta^{k+\frac{1}{2}}(x) + \eta^{k+1}(x)) = \dfrac{f_1^k(x)}{2}, \\ \qquad\qquad x \in \Omega_h,\ k \geqslant 0, \\ \Delta_h \varphi^k(x) + \eta^k(x) = f_2^k(x), \qquad x \in \Omega_h,\ k \geqslant 0. \end{cases} \tag{13.23}$$

上述格式的解也满足守恒律。例如若把其中的第一，二两式分别对 $\eta^k(x) + \eta^{k+\frac{1}{2}}(x)$ 和 $\eta^{k+\frac{1}{2}}(x) + \eta^{k+1}(x)$ 求内积，则可利用推导 (12.69) 的方法和 (4.58) 证得

$$\|\eta^k\|_l^2 + \frac{1}{4}\|\sqrt{\nu}(\eta^k_{x_1} + \eta^{k+\frac{1}{2}}_{x_1})\|^2 + \frac{1}{4}\|\sqrt{\nu}(\eta^k_{\bar{x}_1} + \eta^{k+\frac{1}{2}}_{\bar{x}_1})\|^2$$

$$+ \frac{1}{4}\|\sqrt{\nu}(\eta^{k+\frac{1}{2}}_{x_2} + \eta^{k+1}_{x_2})\|^2 + \frac{1}{4}\|\sqrt{\nu}(\eta^{k+\frac{1}{2}}_{\bar{x}_2} + \eta^{k+1}_{\bar{x}_2})\|^2$$

$$+ \frac{1}{2}S_1^{(\nu)}(\eta^k, \eta^{k+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}S_2^{(\nu)}(\eta^{k+\frac{1}{2}}, \eta^{k+1})$$

$$= \frac{1}{2}(\eta^k + 2\eta^{k+\frac{1}{2}} + \eta^{k+1}, f_1^k). \tag{13.24}$$

(13.23) 的误差方程是

$$\begin{cases} \dfrac{\tilde{\eta}^{k+\frac{1}{2}}(x) - \tilde{\eta}^k(x)}{\tau} + \dfrac{1}{2}J_1^{(\alpha'')}(\tilde{\eta}^k(x) + \tilde{\eta}^{k+\frac{1}{2}}(x), \varphi^k(x) + \tilde{\varphi}^k(x)) \\ \quad + \dfrac{1}{2}J_1^{(\alpha'')}(\eta^k(x) + \eta^{k+\frac{1}{2}}(x), \tilde{\varphi}^k(x)) \\ \quad - \dfrac{1}{2}\Delta_{h,1}^{(\nu)}(\tilde{\eta}^k(x) + \tilde{\eta}^{k+\frac{1}{2}}(x)) = \dfrac{\tilde{f}_1^k(x)}{2}, \qquad x \in \Omega_h, k \geq 0, \\ \dfrac{\tilde{\eta}^{k+1}(x) - \tilde{\eta}^{k+\frac{1}{2}}(x)}{\tau} + \dfrac{1}{2}J_2^{(\alpha'')}(\tilde{\eta}^{k+\frac{1}{2}}(x) + \tilde{\eta}^{k+1}(x), \varphi^k(x) \\ \quad + \tilde{\varphi}^k(x)) + \dfrac{1}{2}J_2^{(\alpha'')}(\eta^{k+\frac{1}{2}}(x) + \eta^{k+1}(x), \tilde{\varphi}^k(x)) \\ \quad - \dfrac{1}{2}\Delta_{h,2}^{(\nu)}(\tilde{\eta}^{k+\frac{1}{2}}(x) + \tilde{\eta}^{k+1}(x)) = \dfrac{\tilde{f}_1(x)}{2}, \quad x \in \Omega_h, k \geq 0, \\ \Delta_h\tilde{\varphi}^k(x) + \tilde{\eta}^k(x) = \tilde{f}_2^k(x), \qquad x \in \Omega_h, k \geq 0. \end{cases} \tag{13.25}$$

把其中的第一，二两式分别对 $\tilde{\eta}^k(x) + \tilde{\eta}^{k+\frac{1}{2}}(x)$ 和 $\tilde{\eta}^{k+\frac{1}{2}}(x) + \tilde{\eta}^{k+1}(x)$ 求内积,并仿照 (13.24) 得到

$$\|\tilde{\eta}^k\|_l^2 + \frac{1}{4}\|\sqrt{\nu}(\tilde{\eta}^k_{x_1} + \tilde{\eta}^{k+\frac{1}{2}}_{x_1})\|^2 + \frac{1}{4}\|\sqrt{\nu}(\tilde{\eta}^k_{\bar{x}_1} + \tilde{\eta}^{k+\frac{1}{2}}_{\bar{x}_1})\|^2$$

$$+ \frac{1}{4}\|\sqrt{\nu}(\tilde{\eta}^{k+\frac{1}{2}}_{x_2} + \tilde{\eta}^{k+1}_{x_2})\|^2 + \frac{1}{4}\|\sqrt{\nu}(\tilde{\eta}^{k+\frac{1}{2}}_{\bar{x}_2} + \tilde{\eta}^{k+1}_{\bar{x}_2})\|^2$$

$$+ \frac{1}{2}S_1^{(\nu)}(\tilde{\eta}^k + \tilde{\eta}^{k+\frac{1}{2}}, \tilde{\eta}^k + \tilde{\eta}^{k+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}S_2^{(\nu)}(\tilde{\eta}^{k+\frac{1}{2}}$$

$$+ \tilde{\eta}^{k+1}, \tilde{\eta}^{k+\frac{1}{2}} + \tilde{\eta}^{k+1}) = F_1^k + F_2^k, \tag{13.26}$$

其中

$$F_1^k = -\frac{1}{2}(\tilde{\eta}^k + \tilde{\eta}^{k+\frac{1}{2}}, J_1(\eta^k + \eta^{k+\frac{1}{2}}, \tilde{\varphi}^k))$$

$$-\frac{1}{2}(\tilde{\eta}^{k+\frac{1}{2}} + \tilde{\eta}^{k+1}, J_2(\eta^{k+\frac{1}{2}} + \eta^{k+1}, \tilde{\varphi})),$$

$$F_2^k = \frac{1}{2}(\tilde{\eta}^k + 2\tilde{\eta}^{k+\frac{1}{2}} + \tilde{\eta}^{k+1}, \tilde{f}_1^k).$$

我们有

$$|F_1^k| \leqslant \varepsilon(\|\tilde{\eta}^k + \tilde{\eta}^{k+\frac{1}{2}}\|^2 + \|\tilde{\eta}^{k+\frac{1}{2}} + \tilde{\eta}^{k+1}\|^2)$$

$$+ \frac{M_9}{\varepsilon}(|\tilde{\varphi}^k|_1^2 + |\tilde{\varphi}^k|_2^2).$$

$$\leqslant c_4\varepsilon(\|\sqrt{\nu}(\tilde{\eta}_{x_1}^k + \tilde{\eta}_{x_1}^{k+\frac{1}{2}})\|^2$$

$$+ \|\sqrt{\nu}(\tilde{\eta}_{\bar{x}_1}^k + \tilde{\eta}_{\bar{x}_1}^{k+\frac{1}{2}})\|^2 + \|\sqrt{\nu}(\tilde{\eta}_{x_2}^{k+\frac{1}{2}} + \tilde{\eta}_{x_2}^{k+1})\|^2$$

$$+ \|\sqrt{\nu}(\tilde{\eta}_{\bar{x}_2}^{k+\frac{1}{2}} + \tilde{\eta}_{\bar{x}_2}^{k+1})\|^2) + \frac{M_9}{\varepsilon}(\|\tilde{\eta}^k\|^2 + \|\tilde{f}_2^k\|^2).$$

类似地可估计 $|F_2^k|$. 把它们代入 (13.26), 并取 ε 适当小,即得到

$$\|\tilde{\eta}^k\|_t^2 \leqslant M_0(\|\tilde{\eta}^k\|^2 + \|\tilde{f}_1^k\|^2 + \|\tilde{f}_2^k\|^2),$$

从而得到下列结果:

定理 13.2 对一切 k 和 $\tilde{\rho}(k\tau)$, 都有

$$\|\tilde{\eta}^k\|^2 \leqslant M_{11}e^{M_{12}k\tau}\tilde{\rho}(k\tau).$$

由定理 13.2, 格式 (13.23) 具有广义稳定性指标 $s = -\infty$, 显然,由于对非线性项也采用分裂技巧,从而还从本质上改进了非线性稳定性.

对于 Navier-Stokes 方程也可以采用类似的分裂格式. 例如, Chorin (1968) 采用 Самарский (1962b) 的方法, Kuo Pen-yu (1977) 和 Guo Ben-yu (1981) 则采用二次守恒的分裂方法.

第四章 椭圆型方程

§14 线性椭圆型方程边值问题的古典差分方法

线性椭圆型方程边值问题的古典理论是相当丰富的，例如极值原理，Green 函数和 Schauder 理论等（可见 Courant, Hilbert (1953, 1962)，Петровский (1953)，Treves (1975) 等），它的古典差分方法也有相应的理论。本节首先介绍椭圆型方程的单调型差分格式，并用它证明 Laplace 方程 Dirichlet 问题解的存在性，也介绍了高精度单调格式和构造此类格式的算子组合法，还讨论了解的奇性的情况。在误差估计中采用了离散 Green 函数方法。对于 Laplace 方程的 Von Neumann 问题，则用广义离散 Green 函数的方法。其次，略述了多维问题的分裂外推法，它特别适用于平行计算。第三，介绍了守恒型差分格式，它有助于处理间断系数问题和第二、第三类边值条件等。本节的第四部分内容是离散能量法和离散 Schauder 估计，并应用它们证明 Poisson 方程解的存在性和估计高阶差商的误差，还用差商的局部平均化方法得到超收敛性。最后则介绍了舍入误差的概率估计方法。

14.1 二阶线性方程的单调型格式，Laplace 方程 Dirichlet 问题解的存在性

假设 $x\in\mathscr{R}^2$，Ω 是有界单连通开区域，Γ 是其边界，它由有限个逐段光滑曲线所组成，a_i，b，d，ν，γ，f 和 g 都是 x 的函数。一般形式的二阶线性椭圆型方程边值问题是

$$\Bigg\{LU = -a_1\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} - 2b\frac{\partial^2 U}{\partial x_1\partial x_2} - a_2\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} - a_3\frac{\partial U}{\partial x_1}$$

$$\begin{cases} \qquad - a_4 \dfrac{\partial U}{\partial x_2} + dU = f, x \in \Omega \\ LU = \nu \dfrac{\partial U}{\partial n} + \gamma U = g, \quad x \in \Gamma, \end{cases} \tag{14.1}$$

其中 $a_1a_2 - b^2 > 0$, $\nu \geqslant 0$, $\gamma \geqslant 0$. 若 $\nu = 0$, $\gamma \geqslant \gamma_0 > 0$, 那末 (14.1) 是 Dirichlet 问题. 若 $\gamma = 0$, $\nu \geqslant \nu_0 > 0$, 则是 Von Neumann 问题,此时若 $d \equiv 0$, 则尚需补充一些条件，来保证解的唯一性。 若 $\nu \geqslant \nu_0 > 0$, $\gamma \geqslant \gamma_0 > 0$, 则 (14.1) 是第三类边值问题. 在其余情况,则是混合边值问题.

用 h 表示网格步长,网格点的坐标值是 $x_m = j_m h$, 其中 j_m 是整数。 Ω_h, Γ_h 和 $\bar{\Omega}_h$ 等意义如同 § 4.3. 解 (14.1) 的一般差分格式是

$$L_h u(x) = \sum_{y \in \bar{\Omega}_h} A(x, y) u(y) = F(x), \quad x \in \Omega_h, \tag{14.2}$$

其中 $A(x, y)$ 是变量 x 和 y 的函数,

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega_h, \\ g(x), & x \in \Gamma_h. \end{cases}$$

若 $U(x)$ 充分光滑,则代入 (14.2) 后得到

$$\begin{aligned} &\sum_{y \in \bar{\Omega}_h} A(x, y) U(x) + \sum_{y \in \bar{\Omega}_h} A(x, y)(y_1 - x_1) \frac{\partial U}{\partial x_1}(x) \\ &\quad + \sum_{y \in \bar{\Omega}_h} A(x, y)(y_2 - x_2) \frac{\partial U}{\partial x_2}(x) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{y \in \bar{\Omega}_h} A(x, y)(y_1 - x_1)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}(x) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{y \in \bar{\Omega}_h} A(x, y)(y_2 - x_2)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}(x) \\ &\quad + \sum_{y \in \bar{\Omega}_h} A(x, y)(y_1 - x_1)(y_2 - x_2) \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}(x) \\ &\quad + \cdots = F(x). \end{aligned}$$

如果格式 (14.2) 对 (14.1) 的逼近是相容的, $x \in \Omega_h$, 那末令 $h \to 0$ 后得到

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{y\in\bar{\Omega}_h} A(x,y) = d(x), \\
\sum\limits_{y\in\bar{\Omega}_h} A(x,y)(y_1-x_1) = -a_3(x), \\
\sum\limits_{y\in\bar{\Omega}_h} A(x,y)(y_2-x_2) = -a_4(x), \\
\sum\limits_{y\in\bar{\Omega}_h} A(x,y)(y_1-x_1)^2 = -2a_1(x), \\
\sum\limits_{y\in\bar{\Omega}_h} A(x,y)(y_2-x_2)^2 = -2a_2(x), \\
\sum\limits_{y\in\bar{\Omega}_h} A(x,y)(y_1-x_1)(y_2-x_2) = -2b(x),
\end{cases}
$$

如果 $A(x,y)$ 只满足上面六式，那末逼近误差 $R_h(U(x)) = O(h)$. 如果还满足以下四式，则 $R_h(U(x)) = O(h^2)$,

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{y\in\bar{\Omega}_h} A(x,y)(y_1-x_1)^3 = 0, \\
\sum\limits_{y\in\bar{\Omega}_h} A(x,y)(y_1-x_1)^2(y_2-x_2) = 0, \\
\sum\limits_{y\in\bar{\Omega}_h} A(x,y)(y_1-x_1)(y_2-x_2)^2 = 0, \\
\sum\limits_{y\in\bar{\Omega}_h} A(x,y)(y_2-x_2)^3 = 0.
\end{cases}
$$

类似地可估计 $x\in\Gamma_h$ 时的逼近误差.

适当地选择网格形状和 $F(x)$ 的值，可以提高逼近精度.

例 14.1 考虑下列问题

$$
\begin{cases}
-\Delta U = f, & x\in\Omega, \\
U = g, & x\in\Gamma.
\end{cases}
\tag{14.3}
$$

我们采用边长为 h 的正六角形网格，设 $x\in\Omega_h$, $x^{(l)}(1\leqslant l\leqslant 6)$ 的位置如图 14.1 所示. 又定义下列差分算子

$$
\Delta_h u(x) = \frac{2}{3h^2}\left(\sum_{l=1}^{6} u(x^{(l)}) - 6u(x)\right),
$$

则当 $U\in C^5(\bar{\Omega})$ 时,

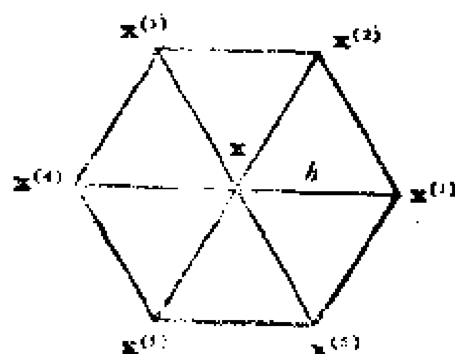


图 14.1

$$\Delta_h U(x) = \Delta U(x) + \frac{h^2}{16}\Delta^2 U(x) + O(h^4).$$

因此，若 Ω 是正六角形区域，则下列格式的逼近误差是 $O(h^4)$，

$$\begin{cases} -\Delta_h u(x) = f(x) + \dfrac{h^2}{16}\Delta f(x), & x \in \Omega_h, \\ u(x) = g(x), & x \in \Gamma_h. \end{cases}$$

差分格式（14.2）的重要一类是正型格式或一般单调型格式。上面例子中的格式就是正型格式，它是由 Gerschgorin（1930）最早开始研究的。以后的工作是由 Bers（1953），Рябенький，Филиппов（1956），Collatz（1960），Forsythe，Wasow（1960）和 Bramble，Hubbard（1962，1963a，b，1964a，b）等人开展的。Batschelet（1952）等还研究了第三类边值问题的正型差分格式。

根据定理 4.18，如果能够找到函数 $v(x)$，使得 $L_h v(x) \geqslant \|F\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}$，$|v(x)| \leqslant c_0\|F\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}$，其中 $c_0 > 0$，那末 $\|u\|_{\infty,\bar{\Omega}_h} \leqslant c_0 \|F\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}$，下面介绍两种构造 $v(x)$ 的方法。先考虑第一、三类或它们的混合边值问题。

定理 14.1 如果下列条件满足

(i) $a_1 \geqslant 0$，$a_2 \geqslant 0$，$b = 0$，$d \geqslant 0$，$\nu \geqslant 0$；

(ii) 存在正常数 q_0，c_1，ν_1，γ_0 和 γ_1，使得

$a_1 + a_2 \geqslant q_0$，$|a_3| \leqslant c_1 a_1$，$|a_4| \leqslant c_1 a_2$，

$\nu \leqslant \nu_1$，$\gamma_0 \leqslant \gamma \leqslant \gamma_1$；

(iii) h 适当小，格式（14.2）是单调型的；

那末存在正常数 c_2，使得 $\|u\|_{\infty,\bar{\Omega}_h} \leqslant c_2\|F\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}$.

证明 令

$$v(x) = \frac{3\|F\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}}{2Mq_0} w(x),$$

其中

$$w(x) = e^{M(r^2+1)} - e^{M(x_1^2+x_2^2)},$$

$$M = \max\{c_1^2/4,\ [2q_0 + 12r\nu_1 - 3\gamma_0 + \sqrt{(12r\nu_1 + 2q_0 - 3\gamma_0)^2 + 18\gamma_0(R_0 + \gamma_1 - \gamma_0)}]/[3\gamma_0]\}, \tag{14.4}$$

r 是 $\bar{\Omega}_h$ 的外接圆直径，且不妨假定原点在 $\bar{\Omega}_h$ 内，R_0 是正常数，$R_0 \leqslant \frac{Mq_0}{3}$，并且当 $h \leqslant h_0$ 时，一致地有

$$|R_h(w(x))| = |L_h w(x) - Lw(x)| \leqslant R_0, \tag{14.5}$$

于是，当 $x \in \Omega_h$ 时，

$$\begin{aligned}
L_h v(x) &= \frac{3\|F\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}}{2Mq_0}[Lw(x) + R_h(w(x))] \\
&= \frac{3\|F\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}}{2Mq_0}\{(2Ma_1(x) + 2Ma_2(x) + 4M^2x_1^2a_1(x) \\
&\quad + 4M^2x_2^2a_2(x) + 2Mx_1a_3(x) + 2Mx_2a_4(x))e^{M(x_1^2+x_2^2)} \\
&\quad + d(x)w(x) + \widetilde{R}_h(w(x))\}.
\end{aligned}$$

注意到 (14.5) 和

$$\begin{aligned}
&w(x) \geqslant 0, \quad e^{M(x_1^2+x_2^2)} \geqslant 1, \\
&2Mx_1^2a_1(x) + x_1a_3(x) \geqslant 2Mx_1^2a_1(x) - c_1|x_1|a_1(x), \\
&2Mx_2^2a_2(x) + x_2a_4(x) \geqslant 2Mx_2^2a_2(x) - c_1|x_2|a_2(x),
\end{aligned}$$

即有

$$\begin{aligned}
L_h v(x) \geqslant \frac{3\|F\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}}{2Mq_0}\{&[2M(a_1(x) + a_2(x)) \\
&+ 2Ma_1(x)\ (2Mx_1^2 - c_1|x_1|) \\
&+ 2Ma_2(x)(2Mx_2^2 - c_1|x_2|)]e^{M(x_1^2+x_2^2)} - R_0\}.
\end{aligned} \tag{14.6}$$

又由 (14.4) 得到

$$a_1(x)\,(2Mx_1^2 - c_1|x_1|) \geqslant \frac{a_1(x)}{2}[(c_1|x_1| - 1)^2 - 1]$$

$$\geqslant -\frac{a_1(x)}{2},$$

$$a_2(x)(2Mx_2^2 - c_1|x_2|) \geqslant \frac{a_2(x)}{2}\ [(c_1|x_2| - 1)^2 - 1]$$

$$\geqslant -\frac{a_2(x)}{2},$$

把它代入(14.6)后得到

$$L_h v(x) \geqslant \frac{3\|F\|_{\infty,\bar{D}_h}}{2Mq_0}\ (M(a_1(x) + a_2(x)) - R_0)$$

$$\geqslant \frac{3\|F\|_{\infty,\bar{D}_h}}{2Mq_0}\left(Mq_0 - \frac{Mq_0}{3}\right) = \|F\|_{\infty,\bar{D}_h}.$$

又当 $x \in \Gamma_h$ 时,

$$L_h v(x) = \frac{3\|F\|_{\infty,\bar{D}_h}}{2Mq_0}\ (-2M\nu(x)x_1 e^{M(x_1^2+x_2^2)}\cos(n, x_1)$$

$$-2M\nu(x)x_2 e^{M(x_1^2+x_2^2)}\cos(n, x_2)$$

$$+\gamma(x)\,(e^{M(r^2+1)} - e^{M(x_1^2+x_2^2)}) + R_h(w(x)))$$

$$\geqslant \frac{3\|F\|_{\infty,\bar{D}_h}}{2Mq_0}\ (-4r\nu_1 M e^{Mr^2} + \gamma_0 e^{M(r^2+1)} - \gamma_1 e^{Mr^2} - R_0)$$

$$\geqslant \frac{3\|F\|_{\infty,\bar{D}_h}}{2Mq_0}\ e^{Mr^2}(-4r\nu_1 M + \gamma_0 e^M - \gamma_1 - R_0)$$

$$\geqslant \frac{3\|F\|_{\infty,\bar{D}_h}}{2Mq_0} e^{Mr^2}\left(\frac{\gamma_0 M^2}{2} + (\gamma_0 - 4r\gamma_1)M\right.$$

$$\left. + \gamma_0 - \gamma_1 - R_0\right). \tag{14.7}$$

根据(14.4), M 不小于下列二次方程的较大的实根 σ_2(见图14.2),

$$p(\sigma) = \frac{\gamma_0\sigma^2}{2} + \left(\gamma_0 - 4r\nu_1 - \frac{2q_0}{3}\right)\sigma + \gamma_0 - \gamma_1 - R_0 = 0,$$

所以,(14.7)右端括号内的值不小于 $\frac{2}{3}Mq_0$, 并由此可知,当

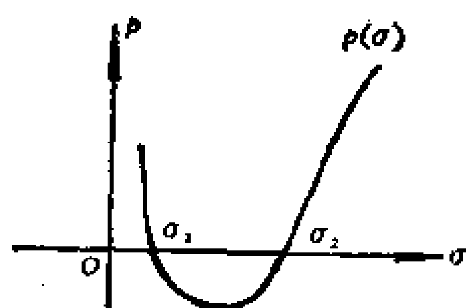


图 14.2

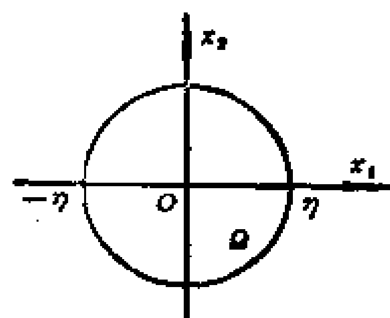


图 14.3

$x\in\Gamma_h$ 时,

$$L_h v(x)\geqslant\|F\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}.$$

综合上面的讨论,即由定理 4.18 得到

$$\|u\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}\leqslant\|v\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}\leqslant c_2\|F\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}.$$

下面考虑第二、三类边值问题或它们的混合边值问题. 我们假定在 Γ_h 上, $x_m\cos(n,x_m)\geqslant 0$,并且存在正常数 p_0,使得

$$|x_1|+|x_2|\geqslant p_0>0. \tag{14.8}$$

如果 Ω_h 是以原点为中心的圆形或正方形区域, $x\in\Gamma_h$, 那末当 $\cos(n,x_1)\to 0$ 时, $\cos(n,x_2)x_2\to\eta$;反之,当 $\cos(n,x_2)\to 0$ 时,则有 $\cos(n,x_1)x_1\to\eta$ (见图 14.3). 对于一般凸形区域,常可通过坐标轴的平移与旋转等,使得对任意固定的正数 ν_0 和充分小正数 R_0, 满足

$$\sigma(x)=\inf_{x\in\Gamma_h}(2\nu_0x_1\cos(n,x_1)+2\nu_0x_2\cos(n,x_2)-R_0)\geqslant\sigma_0>0. \tag{14.9}$$

定理 14.2 如果下列条件满足

(i) $a_1\geqslant 0$, $a_2\geqslant 0$, $b\equiv 0$, $\gamma\geqslant 0$;

(ii) 存在正常数 q_0, M, d_0 和 ν_0, 使得

$$a_1+a_2\geqslant q_0>0,\ d>d_0,\ \nu\geqslant\nu_0>0,$$

$$\sup_{x\in\bar{\Omega}_h}\max(a_1,a_2,|a_3|,|a_4|)\leqslant M;$$

(iii) h 适当小,(14.19) 满足,且格式 (14.2) 是单调的, 那末存在正常数 c_3, 使得 $\|u\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}\leqslant c_3\|F\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}$.

证明 令

$$v(x) = \frac{\|F\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}}{\alpha} w(x),$$

$$w(x) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{4M(r+2) + R_0}{d_0},$$

其中 r 如定理 14.1 所示，$\alpha = \min(\sigma_0, 4M)$，$R_0$ 是适当小的正数，并且使得当 $h \leqslant h_0$ 时，

$$|R_h(w(x))| = |L_h w(x) - Lw(x)| \leqslant R_0.$$

于是，当 $x \in \Omega_h$ 时，

$$\begin{aligned}
L_h v(x) &= \frac{\|F\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}}{\alpha}(Lw(x) + R_h(w(x))) \\
&= \frac{\|F\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}}{\alpha}(-2a_1(x) - 2a_2(x) - 2x_1 a_3(x) - 2x_2 a_4(x) \\
&\quad + d(x)\ (x_1^2 + x_2^2) + \frac{d(x)}{d_0}(4M(r+2) \\
&\quad + R_0) + R_h(w(x))) \\
&\geqslant \frac{\|F\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}}{\alpha}(-2a_1(x) - 2a_2(x) - 2r|a_3(x)| \\
&\quad - 2r|a_4(x)| + 4M(r+2)) \\
&\geqslant \frac{4M}{\alpha}\|F\|_{\infty,\bar{\Omega}_h} \geqslant \|F\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}.
\end{aligned}$$

又由 (14.9)，当 $x \in \Gamma_h$ 时，

$$\begin{aligned}
L_h v(x) &= \frac{\|F\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}}{\alpha}(2\nu(x)x_1\cos(n, x_1) + 2\nu(x)x_2\cos(n, x_2) \\
&\quad + \gamma(x)w(x) + R_h(w(x))) \\
&\geqslant \frac{\|F\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}}{\alpha}(2\nu_0 x_1\cos(n, x_1) + 2\nu_0 x_2\cos(n, x_2) - R_0) \\
&\geqslant \frac{\sigma_0\|F\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}}{\alpha} \geqslant \|F\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}.
\end{aligned}$$

综合上面的结果即得所证的结论。

根据定理 14.1 和 14.2，在相应的条件下，格式 (14.2) 对右端

$f(x)$ 和边界条件 $g(x)$ 是按最大模稳定的. 如果逼近误差是 $O(h^q)$, $\tilde{u}(x)=u(x)-U(x)$, 则

$$L_h\tilde{u}(x)=O(h^q),\quad x\in\bar{\Omega}_h,$$

从而 $\|\tilde{u}\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}=O(h^q)$.

上面的估计方法是一般的. 对于某些具体的问题, 则可用离散 Green 函数得到更好的估计, 即若靠近边界处的逼近误差是 $O(h^{q-2})$, 而其余点上的逼近误差是 $O(h^q)$, 则仍有 $\|\tilde{u}\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}=O(h^q)$. 例 4.10 就是这种情况.

例 14.2 (Hubbard (1966)) 设 Γ_h, Ω_h^*, Ω_h 的定义如例 4.10, 又定义 $\bar{\Delta}_h$, 即当 $x\in\Omega_h'$ 时, $\bar{\Delta}_hu(x)=\Delta_hu(x)$; 而当 $x\in\Omega_h^*$, 比如说 $x-a_mhe_m\in\Gamma_h$, $x+he_m\in\Omega_h$ 时, 则有

$$\bar{\Delta}_hu(x)=\frac{1}{h^2}\left\{\frac{1}{a_1}u(x-a_1he_1)+\frac{1}{a_2}u(x-a_2he_2)+u(x+he_1)\right.$$
$$\left.+u(x+he_2)-\left(\frac{1+a_1}{a_1}+\frac{1+a_2}{a_2}\right)u(x)\right\}.$$

今采用下列格式来计算 (14.3)

$$\begin{cases}-\bar{\Delta}_hu(x)=f(x), & x\in\Omega_h,\\ u(x)=g(x), & x\in\Gamma_h,\end{cases}$$

则可仿照例 4.10 得到

$$\|u\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}\leqslant c_1(\|f\|_{\infty,\Omega_h'}+h^2\|f\|_{\infty,\Omega_h^*}+\|g\|_{\infty,\Gamma_h}).$$

由于当 U 充分光滑时,

$$|\bar{\Delta}_hU(x)-\Delta U(x)|=\begin{cases}O(h^2), & x\in\Omega_h',\\ O(1), & x\in\Omega_h^*,\\ O, & x\in\Gamma_h,\end{cases}$$

所以仍有 $\|\tilde{u}\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}=O(h^2)$.

可以应用单调型格式证明 (14.1) 的解的存在性, 例如设 $\Omega=\{x|-1<x_1,x_2<1\}$, 并考虑问题 (14.3), 其中 $f\equiv0$. 计算它的格式是

$$\begin{cases}-\Delta_hu(x)=0, & x\in\Omega_h,\\ u(x)=g(x), & x\in\Gamma_h,\end{cases}\tag{14.10}$$

它是正型格式，且 $\|u\|_{\infty,\bar{Q}_h} \leqslant \|g\|_{\infty,\Gamma_h}$。

下面先证明，在任意的连同其边界都包含在Ω内的闭区域D中，$\|u_{x_m}\|_{\infty,D_h}$ 对 h 一致有界。由于总可用一个正方形来覆盖 D，因此不妨在正方形 $Q_h = \{x \mid |x_m| \leqslant \alpha, \alpha < 1, m = 1, 2\}$ 内证明上述结论。令

$$w(x) = u_{x_1}^2(x)F(x) + c_5 v(x),$$

其中

$$F(x) = F_1(x)F_2(x), \quad F_m(x) = (\alpha^2 - x_m^2)^2, \quad m = 1, 2,$$

$$\begin{aligned} v(x) = & u^2(x) + u^2(x + he_1) + u^2(x - he_1) \\ & + u^2(x + he_2) + u^2(x - he_2). \end{aligned}$$

不难证明

$$\begin{aligned} -\Delta_h(\varphi\phi) = & -\varphi\Delta_h\phi - \phi\Delta_h\varphi - \varphi_{x_1}\phi_{x_1} - \varphi_{\bar{x}_1}\phi_{\bar{x}_1} \\ & - \varphi_{x_2}\phi_{x_2} - \varphi_{\bar{x}_2}\phi_{\bar{x}_2}, \end{aligned} \tag{14.11}$$

因此

$$\begin{aligned} -\Delta_h w(x) = & -u_{x_1}^2(x)\Delta_h F(x) - F(x)\Delta_h(u_{x_1}^2(x)) \\ & - F_{x_1}(x)(u_{x_1}^2(x))_{x_1} - F_{\bar{x}_1}(x)(u_{x_1}^2(x))_{\bar{x}_1} \\ & - F_{x_2}(x)(u_{x_1}^2(x))_{x_2} - F_{\bar{x}_2}(x)(u_{x_1}^2(x))_{\bar{x}_2} \\ & - c_5\Delta_h v(x). \end{aligned} \tag{14.12}$$

因为 $\Delta_h u_{x_1}(x) = 0$，所以由 (14.11) 得到

$$-\Delta_h(u_{x_1}^2(x)) = -u_{x_1x_1}^2(x) - u_{x_1\bar{x}_1}^2(x) - u_{x_1x_2}^2(x) - u_{x_1\bar{x}_2}^2(x).$$

同样地，由 (14.11) 得到

$$-\Delta_h(u^2(x)) = -u_{x_1}^2(x) - u_{\bar{x}_1}^2(x) - u_{x_2}^2(x) - u_{\bar{x}_2}^2(x).$$

类似地可得到$-\Delta_h u^2(x + he_1)$，$-\Delta_h u^2(x - he_1)$，$-\Delta_h u^2(x + he_2)$ 和$-\Delta_h u^2(x - he_2)$ 的表达式。此外还有

$$(u_{x_1}^2(x))_{x_1} = (u_{x_1}(x) + u_{x_1}(x + he_1))u_{x_1x_1}(x),$$

$$(u_{x_1}^2(x))_{\bar{x}_1} = (u_{x_1}(x) + u_{x_1}(x - he_1))u_{x_1\bar{x}_1}(x),$$

$$(u_{x_1}^2(x))_{x_2} = (u_{x_1}(x) + u_{x_1}(x + he_2))u_{x_1x_2}(x),$$

$$(u_{x_1}^2(x))_{\bar{x}_2} = (u_{x_1}(x) + u_{x_1}(x - he_2))u_{x_1\bar{x}_2}(x).$$

把上面各式代入 (14.12) 后得到

$$\begin{aligned} -\Delta_h w(x) = & -c_5(u_{x_1}^2(x) + u_{\bar{x}_1}^2(x) + u_{x_2}^2(x) + u_{\bar{x}_2}^2(x) \\ & + u_{x_1}^2(x + he_1) + u_{\bar{x}_1}^2(x + he_1) + u_{x_2}^2(x + he_1) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ u_{x_2}^2(x + he_1) + u_{x_1}^2(x - he_1) + u_{x_1}^2(x - he_1) \\
&+ u_{x_2}^2(x - he_1) + u_{x_2}^2(x - he_1) + u_{x_1}^2(x + he_1) \\
&+ u_{x_1}^2(x + he_2) + u_{x_2}^2(x + he_2) + u_{x_1}^2(x + he_2) \\
&+ u_{x_1}^2(x - he_2) + u_{x_1}^2(x - he_2) + u_{x_2}^2(x - he_2) \\
&+ u_{x_2}^2(x - he_2)) - u_{x_1}^2(x)\Delta_h F(x) \\
&- \sum_{l=1}^{4} A_l(x),
\end{aligned}
\tag{14.13}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
A_1(x) &= F(x)u_{x_1x_1}^2(x) + F_{x_1}(x)(u_{x_1}(x) \\
&\quad + u_{x_1}(x + he_1))u_{x_1x_1}(x), \\
A_2(x) &= F(x)u_{x_1x_1}^2(x) + F_{x_1}(x)(u_{x_1}(x) \\
&\quad + u_{x_1}(x - he_1))u_{x_1x_1}(x), \\
A_3(x) &= F(x)u_{x_1x_2}^2(x) + F_{x_2}(x)(u_{x_1}(x) \\
&\quad + u_{x_1}(x + he_2))u_{x_1x_2}(x), \\
A_4(x) &= F(x)u_{x_1x_2}^2(x) + F_{x_2}(x)(u_{x_1}(x) \\
&\quad + u_{x_1}(x - he_2))u_{x_1x_2}(x).
\end{aligned}
$$

下面来估计 $A_l(x)$．由于

$$
F_{x_1}(x) = -2F_2(x)(a^2 - x_1^2)(2x_1 + h) + hF_2(x)(2x_1 + h)^2,
$$

因此

$$
\begin{aligned}
A_1(x) &= F_2(x)\{(a^2 - x_1^2)u_{x_1x_1}(x) - (2x_1 + h)(u_{x_1}(x) \\
&\quad + u_{x_1}(x + he_1))\}^2 - F_2(x)(2x_1 + h)^2(u_{x_1}(x) \\
&\quad + u_{x_1}(x + he_1))^2 + hF_2(x)(2x_1 + h)^2(u_{x_1}(x) \\
&\quad + u_{x_1}(x + he_1))u_{x_1x_1}(x) \\
&\geqslant -F_2(x)(2x_1 + h)^2(u_{x_1}(x) + u_{x_1}(x + he_1))^2 \\
&\quad + F_2(x)(2x_1 + h)^2(u_{x_1}^2(x + he_1) - u_{x_1}^2(x)) \\
&\geqslant -F_2(x)(2x_1 + h)^2(2u_{x_1}^2(x) + 2u_{x_1}(x)u_{x_1}(x + he_1)) \\
&\geqslant -F_2(x)(2x_1 + h)^2(3u_{x_1}^2(x) + u_{x_1}^2(x + he_1)).
\end{aligned}
$$

类似地有

$$
\begin{aligned}
A_2(x) &\geqslant -F_2(x)(2x_1 - h)^2(3u_{x_1}^2(x) + u_{x_1}^2(x - he_1)), \\
A_3(x) &\geqslant -F_1(x)(2x_2 + h)^2(3u_{x_1}^2(x) + u_{x_1}^2(x + he_2)),
\end{aligned}
$$

$$A_4(x) \geqslant -F_1(x)(2x_2-h)^2(3u_{x_1}^2(x)+u_{x_1}^2(x-he_2)).$$

把以上四式代入 (14.13) 后得到

$$\begin{aligned}
-\Delta_h w(x) \leqslant & -[c_5+\Delta_h F(x)-3F_2(x)(2x_1+h)^2 \\
& -3F_2(x)(2x_1-h)^2-3F_1(x)(2x_2+h)^2 \\
& -3F_1(x)(2x_2-h)^2]u_{x_1}^2(x) \\
& -[c_5-F_2(x)(2x_1+h)^2]u_{x_1}^2(x+he_1) \\
& -[c_5-F_2(x)(2x_1-h)^2]u_{x_1}^2(x-he_1) \\
& -[c_5-F_1(x)(2x_2+h)^2]u_{x_1}^2(x+he_2) \\
& -[c_5-F_1(x)(2x_2-h)^2]u_{x_1}^2(x-he_2),
\end{aligned}$$

因此当 c_5 适当大时，$-\Delta_h w(x) \leqslant 0$. 根据例 4.7，$w(x)$ 只能在 $|x_m|=a$ 上取得最大值，因此在正方形内部一致地有

$$w(x) \leqslant 5c_5\|u\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}^2 \leqslant 5c_5\|g\|_{\infty,\Gamma_h}^2,$$

从而

$$u_{x_1}^2(x) \leqslant \frac{5c_5\|g\|_{\infty,\Gamma_h}^2}{(\alpha^2-x_1^2)^2(\alpha^2-x_2^2)^2},$$

故在正方形 $\{x \mid |x_m| \leqslant \alpha_1, \alpha_1<\alpha\}$ 内，$|u_{x_1}(x)|$ 对 x 和 h 一致有界，类似地可证明其它一阶差商的一致有界性. 由于这些一阶差商也满足原差分方程，所以在正方形 $\{x \mid |x_m| \leqslant \alpha_2, \alpha_2<\alpha_1\}$ 内，$u(x)$ 的二阶差商也一致有界. 依此类推下去.

现在把网格函数 $u(x)$ 线性插值为连续函数 $U_h(x)$. 于是 $U_h(x)$ 和它的二阶差商在上述正方形内一致有界且等度连续. 在正方形外，用任意方法把 $U_h(x)$ 延拓到 $\bar{\Omega}$，只要保持 $U_h(x)$ 的连续性和各阶差商的一致有界性.

现在作一系列正方形 Ω_{h_l}，使得 $\bar{\Omega}_{h_l} \subset \Omega_{h_{l+1}}$，$\bigcup_{l=1}^{\infty} \Omega_{h_l}=\Omega$. 在每个 Ω_{h_l} 内，可由 Arzela 引理选取子列 $\{U_{h_l}(x)\}$，使得当 $l\to\infty$ 时，$U_{h_l}(x)$ 及其二阶差商都是一致收敛的. 应用对角线方法，可选出一个子列，仍记为 $U_{h_l}(x)$，使得当 $l\to\infty$ 时，$U_{h_l}(x)$，$U_{h_l,x_1\bar{x}_1}(x)$，$U_{h_l,x_2\bar{x}_2}(x)$ 分别在 Ω 内一致收敛到连续函数 $U(x)$，$U_1(x)$ 和 $U_2(x)$. 还可证明 $U_1=\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}$，$U_2=\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}$. 最后在原差

分方程中令 $l \to \infty$，即知 U 满足 Laplace 方程。

如果 $g(x)$ 是连续的，则可仿 § 11.1 中的方法证明 $U(x) \in C(\bar{\Omega})$，并且当 $x \in \Gamma$ 时，$U(x) = g(x)$。此外，应用极值原理，不难证明 (14.3) 的古典解是唯一的。

定理 14.3 设 $\Omega = \{x \mid -1 < x_1,\ x_2 < 1\}$，$g$ 在 Γ 上连续，那末问题 (14.3) 有唯一的古典解。

可以把上面证明方法推广到更一般区域上的多维 Laplace 方程 Dirichlet 问题，可见 Петровский (1941) 的文章。

14.2 高精度单调型格式

关于高精度单调型格式的研究，主要集中于两个方面。首先，高精度格式往往不是正型的，所以必须细致地判别它的单调性质。其次，在边界附近，差分格式的逼近精度一般较差，因此必须巧妙地估计误差，从而证明：即使靠近边界处的逼近精度稍差一些，但差分格式解的精度仍然不变。 Bramble，Hubbard (1963a, b, 1964a, b) 等详细地讨论了这些问题。为方便计，本节只考虑问题 (14.3)，暂假定 Ω 是以原点为中心的长方形。

定义差分算子 $\bar{\Delta}_h$，即当 $x \in \Omega'_h$ 时，

$$
\begin{aligned}
\bar{\Delta}_h u(x) = \frac{-1}{12h^2}&(u(x+2he_1)+u(x-2he_1)\\
&+u(x+2he_2)+u(x-2he_2))\\
&+\frac{4}{3h^2}(u(x+he_1)+u(x-he_1)\\
&+u(x+he_2)+u(x-he_2))\\
&-\frac{5}{h^2}u(x);
\end{aligned}
$$

当 $x \in \Omega_h^*$ 时，则 $\bar{\Delta}_h u(x) = \Delta_h u(x)$。

解 (14.3) 的差分格式是

$$
\begin{cases}
-\bar{\Delta}_h u(x) = f(x), & x \in \Omega_h, \\
u(x) = g(x), & x \in \Gamma_h.
\end{cases}
\tag{14.14}
$$

把网格点排列为 $x^{(1)},\cdots,x^{(N)}$，A_{lj} 表示差分格式在点 $x^{(l)}$ 上关于 $u(x^{(j)})$ 的系数，矩阵 $A=(A_{lj})$，$\bar{A}=DA$；其中 D 是对角阵，它的元素是

$$D_{ll}=\begin{cases}1, & \text{当 } x^{(l)}\in\Gamma_h \text{ 时},\\ \dfrac{h^2}{4}, & \text{当 } x^{(l)}\in\Omega_h^* \text{ 时},\\ \dfrac{h^2}{5}, & \text{当 } x^{(l)}\in\Omega_h' \text{ 时}.\end{cases}$$

于是 $\bar{A}$ 的对角线元素为 1. 又当 $x^{(l)}\in\Gamma_h$ 时，$\bar{A}_{lj}=\delta_{lj}$. 当 $x^{(l)}\in\Omega_h^*$ 时，相应的元素 $\bar{A}_{lj}$ 如图 14.4 所示。图上当中一格的系数是 $\bar{A}_{ll}$，与它紧邻的四格的系数是 $\bar{A}_{lj}$，其中 $x^{(j)}$ 恰为 $x^{(l)}$ 的邻点，其余元素 $\bar{A}_{lj}=0$. 类似地，当 $x^{(l)}\in\Omega_h'$ 时，相应的元素如图 14.5 所示.

	$-\frac{1}{4}$	
$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$
	$-\frac{1}{4}$	

图 14.4 $x^{(l)}\in\Omega_h^*$

		$\frac{1}{60}$		
		$-\frac{4}{15}$		
$\frac{1}{60}$	$-\frac{4}{15}$	1	$-\frac{4}{15}$	$\frac{1}{60}$
		$-\frac{4}{15}$		
		$\frac{1}{60}$		

图 14.5 $x^{(l)}\in\Omega_h'$

下面来估计 $\|u(x)\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}$.

命题 14.1 A 是单调阵.

证明 由于 $D^{-1}>0$，所以只要证明 $\bar{A}$ 是单调阵. 令

$$\bar{A}=I-H_1-H_2,$$

其中，当 $x^{(l)}\in\Gamma_h$ 时，$(H_1)_{lj}=0$；当 $x^{(l)}\in\Omega_h^*$ 时，H_1 的元素如图 14.6 所示；当 $x^{(l)}\in\Omega_h'$ 时，H_1 的元素如图 14.7 所示，这里 $0\leqslant\varepsilon$，$\varepsilon_1\leqslant\frac{1}{4}$. 当 $x^{(l)}\in\Gamma_h$ 时，$(H_2)_{lj}=0$；当 $x^{(l)}\in\Omega_h^*$ 时，H_2 的元素

	$\frac{1}{4}-\varepsilon_1$	
$\frac{1}{4}-\varepsilon_1$		$\frac{1}{4}-\varepsilon_1$
	$\frac{1}{4}-\varepsilon_1$	

图 14.6　$x^{(l)}\in\Omega_h^*$

	$\frac{1}{4}-\varepsilon$	
$\frac{1}{4}-\varepsilon$		$\frac{1}{4}-\varepsilon$
	$\frac{1}{4}-\varepsilon$	

图 14.7　$x^{(l)}\in\Omega_h'$

	ε_1	
ε_1		ε_1
	ε_1	

图 14.8　$x^{(l)}\in\Omega_h^*$

		$-\frac{1}{60}$		
		$\frac{1}{60}+\varepsilon$		
$-\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}+\varepsilon$		$\frac{1}{60}+\varepsilon$	$-\frac{1}{60}$
		$\frac{1}{60}+\varepsilon$		
		$-\frac{1}{60}$		

图 14.9　$x^{(l)}\in\Omega_h'$

如图14.8所示，当 $x^{(l)}\in\Omega_h'$ 时，H_2 的元素如图 14.9 所示。

若能证明 $(I-H_1)^{-1}H_2\geqslant 0$，则就满足定理 4.24 的全部条件，从而 $\bar{A}$ 是单调阵。事实上 $H_1\geqslant 0$，此外又有

$$
\begin{aligned}
(I-H_1)^{-1}H_2 &= H_2+H_1H_2+H_1^2H_2+\cdots \\
&= H_2+H_1H_2+H_1^2(H_2+H_1H_2)+\cdots,
\end{aligned}
$$

所以又把问题归结为证明 $H_2+H_1H_2\geqslant 0$。

根据 H_2 的定义，仅当 $x^{(l)}\in\Omega_h'$，且 $x^{(j)}$ 与 $x^{(l)}$ 相距 $2h$ 时，才有 $(H_2)_{lj}=-\frac{1}{60}$。但此时，$(H_1H_2)_{lj}$ 的表达式中有一项为 $\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\left(\frac{1}{60}+\varepsilon\right)$ 或 $\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\varepsilon_1$。今选取 $\varepsilon=\frac{7}{60}$，$\varepsilon_1=\frac{1}{8}$，则

这两个值都不小于 $\frac{1}{60}$，因此 $H_2 + H_1H_2 \geqslant 0$，从而证明了本命题。

现在定义下列离散 Green 函数

$$\begin{cases}-\bar{\Delta}_h G_h(x, y) = h^{-2}\delta(x, y), & x \in \Omega_h, \\ G_h(x,y) = \delta(x,y), & x \in \Gamma_h.\end{cases}$$

于是，(14.14) 的解为

$$u(x) = h^2 \sum_{y \in \Omega_h} G_h(x, y)f(y) + \sum_{y \in \Gamma_h} G_h(x, y)g(y). \tag{14.15}$$

因为 $G_h(x,y) \geqslant 0$，所以得到

$$|u(x)| \leqslant \|f\|_{\infty,\Omega_h'} \sum_{y \in \Omega_h'} h^2 G_h(x, y) + \|f\|_{\infty,\Omega_h^*} \sum_{y \in \Omega_h^*} h^2 G_h(x, y) + \|g\|_{\infty,\Gamma_h} \sum_{y \in \Gamma_h} G_h(x, y). \tag{14.16}$$

命题 14.2 设 r 是 Ω 的外接圆半径，则对一切 $x \in \bar{\Omega}_h$，

$$h^2 \sum_{y \in \Omega_h'} G_h(x, y) \leqslant \frac{r^2}{4}.$$

证明 令

$$v(x) = \frac{r^2}{4} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{4} - h^2 \sum_{y \in \Omega_h} G_h(x, y).$$

于是，当 $x \in \Omega_h$ 时，

$$-\bar{\Delta}_h v(x) = 1 + h^2 \sum_{y \in \Omega_h} \bar{\Delta}_h G_h(x, y) = 0.$$

又当 $x \in \Gamma_h$ 时，$v(x) \geqslant 0$. 从而由 A 的单调性，对一切 $x \in \bar{\Omega}_h$，$v(x) \geqslant 0$，并由此推得所证的结论。

命题 14.3 对一切 $x \in \bar{\Omega}_h$，都有

$$\sum_{y \in \Omega_h^*} G_h(x, y) \leqslant 2.$$

证明 设 $\bar{D}$ 是对角阵，其元素为

$$(\overline{D}_{ll})^{-1}=\sum_{j}(I-H_1)_{lj}=\begin{cases}1, & \text{当 } x^{(l)}\in\Gamma_h \text{ 时},\\ 4\sigma_1-\dfrac{1}{2}, & \text{当 } x^{(l)}\in\Omega_h^* \text{ 时},\\ 4\sigma-\dfrac{7}{15}, & \text{当 } x^{(l)}\in\Omega_h' \text{ 时},\end{cases}$$

于是

$$\sum_{j=1}^{N}(\overline{D}(I-H_1))_{lj}=1, \tag{14.17}$$

并且

$$\overline{A}=\overline{D}^{-1}(I-\overline{D}H_2(I-H_1)^{-1}\overline{D}^{-1})\overline{D}(I-H_1).$$

令 $H=\overline{D}H_2(I-H_1)^{-1}\overline{D}^{-1}$，则有

$$\overline{A}=\overline{D}^{-1}(I-H)\overline{D}(I-H_1).$$

可以仿照定理 4.24 的证明过程验证，$I-(I-H_1)^{-1}H_2$ 是 Minkowski 矩阵，所以 H 的谱半径 $\rho(H)=\rho(H_2(I-H_1)^{-1})=\rho((I-H_1)^{-1}H_2)<1$，因此 $I-H$ 是非奇异的，并且有

$$(I-H)^{-1}=I+H+H^2+\cdots.$$

又可仿定理4.24的证明方法得到 $(I-H)^{-1}\geqslant 0$. 此外还有

$$\sum_{j=1}^{N}(\overline{D}^{-1}(I-H))_{lj}\geqslant 0. \tag{14.18}$$

下面用 $l(x)$ 表示点 x 的序号. 因为

$$\overline{A}^{-1}=(\overline{D}(I-H_1))^{-1}(I-H)^{-1}\overline{D},$$

所以

$$\sum_{y\in\Omega_h^*}G_h(x,y)=h^{-2}\sum_{y\in\Omega_h^*}(\overline{A}^{-1}D)_{l(x)l(y)}$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{y\in\Omega_h^*}([\overline{D}(I-H_1)]^{-1}(I-H)^{-1}\overline{D})_{l(x)l(y)}.$$

显然有

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\{[\overline{D}(I-H_1)]^{-1}\}_{l(x)k}\{\overline{D}(I-H_1)\}_{kj}=1,$$

故由(14.17)得到

$$\sum_{k=1}^{N}\{[\bar{D}(I-H_1)]^{-1}\}_{l(x)k}=1,$$

因此

$$\sum_{y\in\Omega_h^*}G_h(x,y)\leqslant\frac{1}{4}\max_{x\in\bar{\Omega}_h}\left(\sum_{y\in\Omega_h^*}((I-H)^{-1}\bar{D})_{l(x)l(y)}\right).$$

(14.19)

如果 $y\in\Omega_h^*$，$y^{(1)}\in\Gamma_h$，且 $\bar{A}_{l(y)l(y^{(1)})}\neq 0$，则经计算得到

$$(H_2(I-H_1)^{-1})_{l(y)l(y^{(1)})}\geqslant(H_2)_{l(y)l(y^{(1)})}=\varepsilon_1=\frac{1}{8}.$$

又由 $\bar{D}$ 的定义，

$$\bar{D}_{l(y)l(y)}=2,\qquad \bar{D}_{l(y^{(1)})l(y^{(1)})}=1, \tag{14.20}$$

因此得到

$$H_{l(y)l(y^{(1)})}=\bar{D}_{l(y)l(y)}[H_2(I-H_1)^{-1}]_{l(y)l(y^{(1)})}\bar{D}^{-1}{}_{l(y^{(1)})l(y^{(1)})}$$
$$\geqslant 2\varepsilon_1=\frac{1}{4}.$$

因为在所讨论的情况中，$y\neq y^{(1)}$，所以有

$$-[\bar{D}^{-1}(I-H)]_{l(y)l(y^{(1)})}\geqslant\frac{1}{8}. \tag{14.21}$$

现在作向量 η，其分量是

$$\eta_l=\begin{cases}1, & \text{当 } x^{(l)}\in\Omega_h,\\ 0, & \text{当 } x^{(l)}\in\Gamma_h.\end{cases}$$

于是，当 $y\in\Omega_h^*$ 时，

$$[\bar{D}^{-1}(I-H)\eta]_{l(y)}=\sum_{y^{(1)}\in\Omega_h}\{\bar{D}^{-1}(I-H)\}_{l(y)l(y^{(1)})}$$
$$=\sum_{y^{(1)}\in\bar{\Omega}_h}\{\bar{D}^{-1}(I-H)\}_{l(y)l(y^{(1)})}$$
$$-\sum_{y^{(1)}\in\Gamma_h}\{\bar{D}^{-1}(I-H)\}_{l(y)l(y^{(1)})}.$$

由 (14.18) 和 (14.21) 推得

$$\{\bar{D}^{-1}(I-H)\eta\}_{l(y)}\geqslant\frac{1}{8},$$

所以对一切 $x\in\bar{\Omega}_h$，

$$1 \geqslant \{[(I-H)^{-1}\overline{D}][\overline{D}^{-1}(I-H)\eta]\}_{I(x)}$$

$$> \sum_{y\in\Omega_h^*}[(I-H)^{-1}\overline{D}]_{I(x)I(y)}[\overline{D}^{-1}(I-H)\eta]_{I(y)}$$

$$\geqslant \frac{1}{8}\sum_{y\in\Omega_h^*}[(I-H)^{-1}\overline{D}]_{I(x)I(y)}.$$

把上式代入(14.19)即得所证.

命题 14.4 对一切 $x\in\overline{\Omega}_h$,

$$\sum_{y\in\Gamma_h} G_h(x,y)=1.$$

证明 在(14.14)中令 $u(x)\equiv 1$, 由(14.15)即得所证.

综合上面三个命题和(4.16)就得到下面的结果:

定理 14.4 若 $u(x)$ 是(14.14)的解,则

$$\|u\|_{\infty,\overline{\Omega}_h}\leqslant\frac{r^2}{4}\|f\|_{\infty,\Omega_h'}+2h^2\|f\|_{\infty,\Omega_h^*}+\|g\|_{\infty,\Gamma_h}.$$

如果 $U\in C^6(\overline{\Omega})$, $\tilde{u}(x)=u(x)-U(x)$, 则有

$$\begin{cases}-\overline{\Delta}_h\tilde{u}(x)=O(h^4), & x\in\Omega_h',\\ -\overline{\Delta}_h\tilde{u}(x)=O(h^2), & x\in\Omega_h^*,\\ \tilde{u}(x)=0, & x\in\Gamma_h,\end{cases}$$

从而 $\|\tilde{u}\|_{\infty,\overline{\Omega}_h}=O(h^4)$.

可以把上述结果推广到非长方形区域上. 把与 Γ 相交的网格点的集合记为 Γ_h, 内点集合记为 Ω_h. 若 $x\in\Omega_h$, 并且至少有一个邻点(即与它相距为 h 的点)不属于 $\overline{\Omega}_h$, 则记为 $x\in\Omega_h^{**}$. 若 $x\in\Omega_h$, 且至少有一个邻点在 Ω_h^{**} 中, 则记为 $x\in\Omega_h^*$. $\Omega_h'=\Omega_h/(\Omega_h^*\cup\Omega_h^{**})$. 定义差分算子 $\overline{\Delta}_h$, 当 $x\in\Omega_h'\cup\Omega_h^*$ 时, $\overline{\Delta}_h u(x)=\Delta_h u(x)$, 其中 Δ_h 如前所定义; 若 $x\in\Omega_h^{**}$, 例如 $x-a_m he_m\in\Gamma_h$, $x+he_m\in\Omega_h$, 则有

$$\overline{\Delta}_h u(x)=h^{-2}\sum_{m=1}^{2}\Big(\frac{a_m-1}{a_m+2}u(x+2he_m)+\frac{2(2-a_m)}{a_m+1}u(x+he_m)$$

$$+\frac{6}{a_m(a_m+1)(a_m+2)}u(x-a_m he_m)$$

$$-\left(\frac{3-a_m}{a_m}\right) u(x)\Big).$$

于是,计算 (14.3) 的差分格式是

$$\begin{cases} -\bar{\Delta}_h u(x) = f(x), & x \in \Omega_h, \\ u(x) = g(x), & x \in \Gamma_h. \end{cases}$$

可以证明,存在正常数 c_1, 使得

$$\|u\|_{\infty,\bar{\Omega}_h} \leqslant c_1(\|f\|_{\infty,\Omega'_h} + h^2\|f\|_{\infty,\Omega_h^*\cup\Omega_h^{**}} + \|g\|_{\infty,\Gamma_h}).$$

若 $U \in C^6(\bar{\Omega})$, $\tilde{u}(x) = u(x) - U(x)$, 则有

$$\begin{cases} -\bar{\Delta}_h\tilde{u}(x) = O(h^4), & x \in \Omega'_h, \\ -\bar{\Delta}_h\tilde{u}(x) = O(h^2), & x \in \Omega_h^* \cup \Omega_h^{**}, \\ \tilde{u}(x) = 0, & x \in \Gamma_h. \end{cases}$$

从而 $\|\tilde{u}\|_{\infty,\bar{\Omega}_h} = O(h^4)$.

椭圆型方程的差分格式往往是单调型的，但若带有二次混合偏导数的话，则所得的格式很可能是非单调型的. 例如设 Ω 是以原点为中心的正方形,所考虑的问题是

$$\begin{cases} -\Delta U - \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = f, & x \in \Omega, \\ U = g, & x \in \Gamma. \end{cases} \tag{14.22}$$

相应的差分格式是

$$\begin{cases} L_h u(x) = -\Delta_h u(x) - \dfrac{1}{4h^2}\,(u(x + he_1 + he_2) \\ \qquad\qquad - u(x - he_1 + he_2) - u(x + he_1 - he_2) \\ \qquad\qquad + u(x - he_1 - he_2)) = f(x), & x \in \Omega_h, \\ L_h u(x) = u(x) = g(x), & x \in \Gamma_h, \end{cases} \tag{14.23}$$

Diaz, Roberts (1952) 指出, (14.23) 不是单调型的. 事实上,若设 Ω_h 仅有一点 y, 并且

$$\begin{cases} u(y) = -1, \\ u(y - he_1 + he_2) = 16, \\ u(y) = 0, \quad \text{当 } x \neq y,\ x \neq y - he_1 + he_2, \end{cases}$$

则显然有 $L_h u(x) \geqslant 0$。但 $u(y) < 0$，所以 (14.23) 不是单调型格式。

若 $g = 0$，则可从原方程中消去一些系数，使得所得到的矩阵 A 是单调的。事实上，设 D 是对角阵，对角线元素是 $\frac{h^2}{4}$，$\bar{A} = DA$，则 $\bar{A}$ 的对角线元素为 1。又把 $\bar{A}$ 分解为 $\bar{A} = I - H_1 - H_2$。当 $x \in \Omega'_h$ 时，元素 $(H_\sigma)_{lj}$ 如图 14.10 所示。若 $x \in \Omega^*_h$，例如说 $x \in \Omega^{*-}_{h,2}$，则 $(H_\sigma)_{lj}$ 如图 14.11 所示。

$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

$x \in \Omega'_h$ 时的 H_1

$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$
0	0	0
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{16}$

$x \in \Omega'_h$ 时的 H_2

图 14.10

$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

$x \in \Omega^{*-}_{h,2}$ 时的 H_1

$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$
0	0	0
0	0	0

$x \in \Omega^{*-}_{h,2}$ 时的 H_2

图 14.11

不难证明，定理 4.24 的全部条件满足，从而 A 是单调阵。又定义离散 Green 函数 $G_h(x, y)$，

$$\begin{cases} L_h G_h(x, y) = \frac{1}{h^2} \delta(x, y), & x \in \Omega_h, \\ G_h(x, y) = 0, & x \in \Gamma_h. \end{cases}$$

则有

$$u(x) = h^2 \sum_{y \in \Omega_h} G_h(x, y) f(y).$$

由于 $G_h(x, y) \geqslant 0$ 和 $h^2 \sum_{y \in \Omega_h} G_h(x, y) \leqslant c_1$，所以 $\|u\|_{\infty, \bar{\Omega}_h} \leqslant c_1 \|f\|_{\infty, \Omega_h}$。若 $U \in C^4(\bar{\Omega})$，$\tilde{u}(x) = u(x) - U(x)$，则有 $\|\tilde{u}\|_{\infty, \bar{\Omega}_h} = O(h^2)$。

14.3 算子组合法

除了用待定系数法和采用高精度数值微分公式构造高精度差分格式以外，还可通过简单差分算子的组合得到高精度格式。为方便计，设 Ω 是长方形，并考虑问题(14.3)。假设 $x \in \Omega_h$，$x^{(l)}$ 的位置如图 14.12 所示。逼近 $\Delta U(x)$ 的最简单差分算子是 Δ_h，逼近误差是 $O(h^2)$。在图 14.12 的标号下，

$$\Delta_h u(x) = \frac{1}{h^2}\left(\sum_{l=1}^{4} u(x^{(l)}) - 4u(x)\right).$$

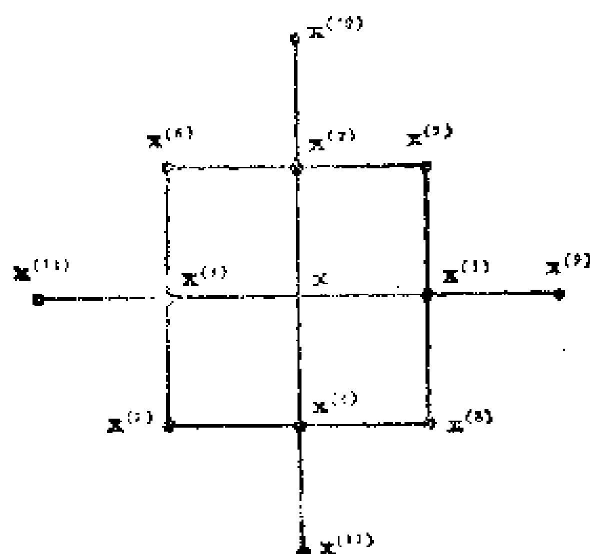


图 14.12

把坐标轴旋转 $\frac{\pi}{4}$，并以 $\sqrt{2}h$ 为步长，则得到逼近误差也为 $O(h^2)$ 的另一个差分算子 Δ_h'，

$$\Delta'_h u(x) = \frac{1}{2h^2}\left(\sum_{i=5}^{8} u(x^{(i)}) - 4u(x)\right).$$

设 b_1 和 b_2 是正常数，并作线性组合 $b_1\Delta_h u(x) + b_2\Delta'_h u(x)$。现在把 $U(x)$ 代入上式，由 Taylor 展开式得到

$$\begin{aligned} b_1\Delta_h u(x) + b_2\Delta'_h u(x) &= (b_1 + b_2)\Delta u(x) \\ &+ \frac{2h^2}{4!}\left\{(b_1 + b_2)\left(\frac{\partial^4 U(x)}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 U(x)}{\partial x_2^4}\right)\right. \\ &\left. + 6b_2 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}\right\} + \cdots. \end{aligned} \tag{14.24}$$

令 $b_1 = \frac{2}{3}$, $b_2 = \frac{1}{3}$，则 $b_1 + b_2 = 3b_2 = 1$，于是得到新的差分算子 Δ_h，

$$\Delta_h u(x) = \frac{1}{6h^2}\left[4\sum_{i=1}^{4} u(x^{(i)}) + \sum_{i=5}^{8} u(x^{(i)}) - 20u(x)\right].$$

如果 $U \in C^8(\Omega)$，则有

$$\begin{aligned} \Delta_h U(x) &= \Delta U(x) + \frac{2h^2}{4!}\Delta^2 U(x) \\ &+ \frac{2h^4}{6!}\left(\Delta^3 U(x) + 2\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}\Delta U(x)\right) \\ &+ \frac{2}{3}\cdot\frac{h^6}{8!}\left\{3\Delta^4 U(x) + 16\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}\Delta^2 U(x)\right. \\ &\left. + 20\frac{\partial^8 U(x)}{\partial x_1^4 \partial x_2^4}\right\} + \cdots. \end{aligned} \tag{14.25}$$

因此，下列格式的逼近误差是 $O(h^6)$，

$$\begin{cases} -\Delta_h u(x) = f(x) + \dfrac{2h^2}{4!}\Delta f(x) \\ \qquad + \dfrac{2h^4}{6!}\left(\Delta^2 f(x) + 2\dfrac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} f(x)\right) & x \in \Omega_h, \\ u(x) = g(x), & x \in \Gamma_h. \end{cases} \tag{14.26}$$

此类高精度格式的优点是计算简单，并且是正型的，因此可用 Gerschgorin 方法证明 $\|U - u\|_{\infty,\Omega_h} = O(h^6)$，详见 Uhlmann

(1958), Канторович, Крылов (1962) 和 Волков (1962) 等人的文章。

Bramble, Hubbard (1964a) 构造了更高精度的格式。为方便计，设 $f\equiv 0$。因为在展开式(14.25)中，h^8 项的系数有因子 $\frac{\partial^{10}U}{\partial x_1^{10}}+\frac{\partial^{10}U}{\partial x_2^{10}}$，所以

$$\Delta_h U(x)=\frac{40h^6}{3\cdot 8!}\cdot\frac{\partial^8 U(x)}{\partial x_1^4\partial x_2^4}+O(h^{10}).\tag{14.27}$$

把坐标轴旋转 $\frac{\pi}{4}$，并以 $\sqrt{2}h$ 为步长，则得到另一个差分算子 $\bar\Delta_h'$，

$$\bar\Delta_h' u(x)=\frac{1}{12h^2}\left\{4\sum_{l=5}^{8}u(x^{(l)})+\sum_{l=9}^{12}u(x^{(l)})-20u(x)\right\},$$

并且

$$\Delta_h' u(x)=\frac{40h^6}{3\cdot 7!}\cdot\frac{\partial^8 U(x)}{\partial x_1^4\partial x_2^4}+O(h^{10}).$$

再作线性组合算子 $\bar\Delta_h=\frac{1}{7}(8\Delta_h-\Delta_h')$，即

$$\bar\Delta_h u(x)=\frac{1}{84h^2}\left(64\sum_{l=1}^{4}u(x^{(l)})+12\sum_{l=5}^{8}u(x^{(l)})\right.$$
$$\left.-\sum_{l=9}^{12}u(x^{(l)})-300u(x)\right),$$

从而当 $x\in\Omega_h'$ 时，

$$\bar\Delta_h U(x)=O(h^{10}).$$

若 $x\in\Omega_h^*$，例如 $x\in\Omega_{h,2}^{*-}$，那末

$$\frac{\partial^8 U(x)}{\partial x_1^4\partial x_2^4}=\frac{\partial^8 U(x)}{\partial x_1^8}=\frac{\partial^8 U}{\partial x_1^8}(x^{(4)})+h\frac{\partial^9 U}{\partial x_1^9}(\tilde x).$$

由于此时 $x^{(4)}\in\Gamma_h$，所以

$$\frac{\partial^8 U(x)}{\partial x_1^4\partial x_2^4}=\frac{\partial^8 g(x^{(4)})}{\partial x_1^8}+O(h).$$

把它代入(14.27)后有

$$\Delta_h U(x) = \frac{40h^6}{3\cdot 8!}\,\frac{\partial^8 g(x^{(i)})}{\partial x_i^8} + O(h^7).$$

现在用下列格式来计算 (14.3)，

$$\begin{cases} -\bar{\Delta}_h u(x) = 0, & x \in \Omega_h', \\ -\Delta_h u(x) = \mathscr{L}(g), & x \in \Omega_h^*, \\ u(x) = 0, & x \in \Gamma_h, \end{cases} \qquad (14.28)$$

其中 $\mathscr{L}(g)$ 是 g 的八阶导数的适当倍数，使得逼近误差为 $O(h^7)$.

(14.28) 不是正型格式. 设 D 是一个正对角阵，适当地选择元素 D_{ll} 后即得到 $\bar{A} = DA$，$\bar{A}$ 的元素如图 14.13 所示

$-\frac{1}{20}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{20}$
$-\frac{1}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$
$-\frac{1}{20}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{20}$

$x \in \Omega_h^*$ 时的 $\bar{A}$

		$\frac{1}{300}$		
	$-\frac{1}{25}$	$-\frac{16}{75}$	$-\frac{1}{25}$	
$\frac{1}{300}$	$-\frac{16}{75}$	1	$-\frac{16}{75}$	$\frac{1}{300}$
	$-\frac{1}{25}$	$-\frac{16}{75}$	$-\frac{1}{25}$	
		$\frac{1}{300}$		

$x \in \Omega_h'$ 时的 $\bar{A}$

图 14.13

把 $\bar{A}$ 分解为 $\bar{A} = I - H_1 - H_2$，H_1 的元素如图 14.14 所示，

$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$
$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$

$x \in \Omega_h^*$ 时的 H_1

$\frac{1}{25}$	$\frac{8}{75}$	$\frac{1}{25}$
$\frac{8}{75}$		$\frac{8}{75}$
$\frac{1}{25}$	$\frac{8}{75}$	$\frac{1}{25}$

$x \in \Omega_h'$ 时的 H_1

图 14.14

H_3 的元素如图 14.15 所示。

	$\frac{1}{10}$	
$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{10}$
	$\frac{1}{10}$	

$x\in\Omega_h^*$ 时的 H_3

		$-\frac{1}{300}$		
		$\frac{8}{75}$		
$-\frac{1}{300}$	$\frac{8}{75}$		$\frac{8}{75}$	$-\frac{1}{300}$
		$\frac{8}{75}$		
		$-\frac{1}{300}$		

$x\in\Omega_h'$ 时的 H_3

图 14.15

可仿上节的方法证明 $(I-H_1)^{-1}H_3\geqslant 0$，从而 $\bar{A}$ 和 A 是单调阵。又定义离散 Green 函数 $G_h(x,y)$，

$$\begin{cases} -\bar{\Delta}_h G_h(x,y)=h^{-2}\delta(x,y), & x\in\Omega_h', \\ -\Delta_h G_h(x,y)=h^{-2}\delta(x,y), & x\in\Omega_h^*, \\ G_h(x,y)=\delta(x,y), & x\in\Gamma_h, \end{cases}$$

则 $G_h(x,y)\geqslant 0$，并且对一切 $v(x)$ 都有

$$v(x)=-h^2\sum_{y\in\Omega_h'}G_h(x,y)\bar{\Delta}_h v(y)-h^2\sum_{y\in\Omega_h^*}G_h(x,y)\Delta_h v(y)$$

$$+\sum_{y\in\Gamma_h}G_h(x,y)v(y),$$

因此，(14.28) 的解为

$$u(x)=h^2\sum_{y\in\Omega_h^*}G_h(x,y)\mathscr{L}(g(y))+\sum_{y\in\Gamma_h}G_h(x,y)g(y).$$

还可证明

$$h^2\sum_{y\in\Omega_h'}G_h(x,y)\leqslant c_1,$$

$$\sum_{y \in \Omega_h^*} G_h(x, y) \leqslant c_2,$$

$$\sum_{y \in \Gamma_h} G_h(x, y) \leqslant 1,$$

因此

$$\|u\|_{\infty,\bar{\Omega}_h} \leqslant c_3(h^2 \|\mathscr{L}(g)\|_{\infty,\Omega_h^*} + \|g\|_{\infty,\Gamma_h}).$$

若 $U \in C^{12}(\bar{\Omega})$, $\tilde{u}(x) = u(x) - U(x)$, 则

$$\begin{cases} -\bar{\Delta}_h \tilde{u}(x) = O(h^{10}), & x \in \Omega_h', \\ -\bar{\Delta}_h \tilde{u}(x) = O(h^7), & x \in \Omega_h^*, \\ \tilde{u}(x) = 0, & x \in \Gamma_h, \end{cases}$$

因此 $\|\tilde{u}\|_{\infty,\bar{\Omega}_h} = O(h^9)$.

14.4 解有奇性的情况

Hubbard (1966) 研究了解有奇性时的误差估计. Bramble, Hubbard, Zlamal (1968) 又把它推广到 n 维空间上. 设 $x \in \mathscr{R}^n$, 考虑下列问题

$$\begin{cases} -\Delta U(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ U(x) = g(x), & x \in \Gamma. \end{cases} \tag{14.29}$$

用 h 表示 x_m 的网格步长. 把网格线与 Γ 的交点的全体记为 Γ_h, 内点集合记为 Ω_h. 若 $x \in \Omega_h$, 且至少有一个邻点 (即与 x 相距 h 的点) 属于 Γ_h, 则记 $x \in \Omega_h^*$, $\Omega_h' = \Omega_h / \Omega_h^*$. 又把 x 的邻点的连线所组成的四边形记为 $N(x)$, 并且假定当 $x \in \bar{\Omega}_h$, $y \in N(x)$时, $|y| \geqslant \eta h$, 其中 η 是正常数. 例如若把原点取为某个网格正方形 $\{x | x_m' - h \leqslant x_m \leqslant x_m' + h, x' \in \Omega_h'\}$ 的中心, 则总满足这个条件. 类似地可讨论其它情况.

定义差分算子 $\Delta_h = \sum_{m=1}^{n} \bar{\Delta}_{h,m}$. 当 x 的邻点是 $x - a_m h e_m$, $x + b_m h e_m (0 < a_m, b_m \leqslant 1, 1 \leqslant m \leqslant n)$ 时,

$$\bar{\Delta}_{h,m} u(x) = \frac{2}{(a_m + b_m)h^2} \left(\frac{u(x - a_m h e_m)}{a_m} + \frac{u(x + b_m h e_m)}{b_m} \right.$$

$$-\left(\frac{1}{a_m}+\frac{1}{b_m}\right)u(x)\Big\}.$$

如果 $U\in C^4(N(x)\cap\Omega)$，则当 $x\in\Omega_h'$ 时，

$$\Delta_h U(x)-\Delta U(x)=\frac{h^2}{24}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial^4 U(x')}{\partial x_m^4}+\frac{\partial^4 U(x'')}{\partial x_m^4}\right), \tag{14.30}$$

其中x'和x''是邻点连线上的适当的点。若 $U\in C^3(N(x)\cap\Omega)$，则当 $x\in\Omega_h^*$ 时，

$$\Delta_h U(x)-\Delta U(x)=\frac{h}{3}\sum_{m=1}^{n}\Big[\left(\frac{b_m^2}{a_m+b_m}\right)\frac{\partial^3 U(x''')}{\partial x_m^3} -\left(\frac{a_m^2}{a_m+b_m}\right)\frac{\partial^3 U(x'''')}{\partial x_m^3}\Big]. \tag{14.31}$$

解(14.29)的格式是

$$\begin{cases}-\Delta_h u(x)=f(x), & x\in\Omega_h,\\ u(x)=g(x), & x\in\Gamma_h.\end{cases} \tag{14.32}$$

定义下列离散 Green 函数

$$\begin{cases}-\Delta_h G_h(x,y)=h^{-n}\delta(x,y), & x\in\Omega_h,\\ G_h(x,y)=\delta(x,y), & x\in\Gamma_h.\end{cases}$$

由于$-\Delta_h$是单调算子，所以 $G_h(x,y)\geqslant 0$，并且对一切 $v(x)$，

$$v(x)=h^n\sum_{y\in\Omega_h}G_h(x,y)(-\Delta_h v(y))+\sum_{y\in\Gamma_h}G_h(x,y)v(y). \tag{14.33}$$

我们假定 $U(x)\in C^4(\bar\Omega/\{0\})$，并存在整数 q 和实数 γ，$0<\gamma\leqslant 1$，使得 $b=q+\gamma>2-n$，并且

$$|D^\alpha U(x)|\leqslant\begin{cases}c_1, & \text{当 } |\alpha|\leqslant q,\\ c_1|x|^{b-|\alpha|}, & \text{当 } q+1\leqslant|\alpha|\leqslant 4,\end{cases} \tag{14.34}$$

其中 c_1 是正常数，$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$\alpha_i\geqslant 0$，$|\alpha|=\sum^{n}\alpha$

$|x|^2=\sum_{m=1}^{n}x_m^2$, $D^\alpha U(x)=\dfrac{\partial^{|\alpha|}U(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$, 于是当 $x\in\Omega_h'$ 时

$$|\Delta_h U(x)-\Delta U(x)|\leqslant c_2h^2(|x|^{b-4}+1);$$

当 $x\in\Omega_h^*$ 时,

$$|\Delta_h U(x)-\Delta U(x)|\leqslant\begin{cases}c_3h, & \text{若 } q=3,\\ c_3h(|x|^{b-3}+1), & \text{若 } 2-n\leqslant q\leqslant 2.\end{cases}$$

令 $\tilde{u}(x)=u(x)-U(x)$, 则由 (14.33) 得到

$$|\tilde{u}(x)|\leqslant c_4h^{n+2}\sum_{y\in\Omega_h'}G_h(x,y)|y|^{b-4}$$

$$+c_4h^{n+1}\sum_{y\in\Omega_h^*}G_h(x,y)|y|^{b-3}. \tag{14.35}$$

下面分析 $G_h(x,y)$ 的性质.

命题 14.5 若$2-n<b<0$, 则

$$h^n\sum_{y\in\Omega_h'}G_h(x,y)|y|^{b-2}\leqslant c_5|x|^b,$$

$$h^n\sum_{y\in\Omega_h^*}G_h(x,y)|y|^b\leqslant c_5h^2|x|^b.$$

证明 设 a, r 和 κ 是待定常数, $\kappa^2\leqslant 1$. 又定义

$$\varphi^2(x)=|x|^2+ah^2,$$

$$\psi(x)=\begin{cases}r\varphi^b(x), & x\in\Omega_h,\\ 0, & x\in\Gamma_h.\end{cases}$$

若 $x\in\Omega_h$, $y\in N(x)$, 则总可选择 κ, 使得

$$\kappa^{-2}\varphi^2(x)\geqslant\varphi^2(y)\geqslant\kappa^2\varphi^2(x). \tag{14.36}$$

事实上,若 $y=x+\delta he_m$, $|\delta|\leqslant 1$, 则

$$\varphi^2(y)=(x_m+\delta h)^2+|x|^2-x_m^2+ah^2$$
$$=\varphi^2(x)+2\delta hx_m+\delta^2h^2,$$

因此

$$\varphi^2(y)-\kappa^2\varphi^2(x)\geqslant(1-\kappa^2)|x|^2-2h|x_m|+(1-\kappa^2)ah^2$$
$$\geqslant((1-\kappa^2)a-(1-\kappa^2)^{-1})h^2.$$

若 a 满足

$$a \geqslant 2(1-\kappa^2)^{-1}, \tag{14.37}$$

则就证明了(14.36)的第二式。类似地可证明第一式。

经计算得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 \varphi^b(x)}{\partial x_m^4} &= 3b(b-2)\varphi^{b-4}(x) + 6b(b-2)(b-4)x_m^2\varphi^{b-6}(x) \\ &\quad + b(b-2)(b-4)(b-6)x_m^4\varphi^{b-8}(x) \\ &\leqslant b(b-2)\varphi^{b-4}(x)\{3 + 6(b-4)x_m^2\varphi^{-2}(x) \\ &\quad + (b-4)(b-6)x_m^2\varphi^{-2}(x)\} \\ &\leqslant b(b-2)\varphi^{b-4}(x)(3 + b(b-4)) \\ &\leqslant b(b-1)(b-2)(b-3)\varphi^{b-4}(x). \end{aligned} \tag{14.38}$$

又有

$$-\Delta\varphi^b(x) = -b(n-2+b)\varphi^{b-2}(x) + ah^2b(b-2)\varphi^{b-4}(x).$$

把上式和(14.30),(14.36),(14.38)结合起来,即知当 $x \in \Omega_h'$ 时,

$$\begin{aligned}-\Delta_h\varphi^b(x) &\geqslant -b(n-2+b)\varphi^{b-2}(x) \\ &\quad + b(b-2)h^2\varphi^{b-4}(x)\left\{a - \frac{n(b-1)(b-3)\kappa^{b-4}}{12}\right\}.\end{aligned}$$

如果 a 还满足

$$a \geqslant \frac{n(b-1)(b-3)\kappa^{b-4}}{12(1-\kappa^2)^3}, \tag{14.39}$$

则有

$$-\Delta_h\varphi^b(x) \geqslant -b(n-2+b)\varphi^{b-2}(x). \tag{14.40}$$

又因为

$$\varphi^2(x) \leqslant \left(1 + \frac{a}{\eta^2}\right)|x|^2, \tag{14.41}$$

所以,若

$$-rb(n-2+b)\left(1 + \frac{a}{\eta^2}\right)^{\frac{b-2}{2}} \geqslant 1, \tag{14.42}$$

则对一切 $x \in \Omega_h'$,

$$-\Delta_h\psi(x) \geqslant |x|^{b-2}, \tag{14.43}$$

又由(14.36)得到

$$-\bar{\Delta}_{h,m}\varphi^b(x) = \frac{-2}{(a_m+b_m)h^2}\left\{\frac{\varphi^b(x - a_mhe_m)}{a_m}\right.$$

$$+\frac{\varphi^b(x+b_mhe_m)}{b_m}-\left(\frac{1}{a_m}+\frac{1}{b_m}\right)\varphi^b(x)\Big\}$$

$$\geqslant \frac{2(1-\kappa^b)}{(a_m+b_m)h^2}\left(\frac{1}{a_m}+\frac{1}{b_m}\right)\varphi^b(x)$$

$$\geqslant \frac{2}{a_mb_mh^2}(1-\kappa^b)\varphi^b(x). \tag{14.44}$$

记

$$\delta(x,y)=\begin{cases}1, & 若\ y\in\Gamma_h,\\ 0, & 若\ y\notin\Gamma_h,\end{cases}$$

则由 (14.44) 得到

$$-\Delta_h\psi(x)=-r\bar{\Delta}_h\varphi^b(x)+2rh^{-2}\sum_{x',x''\in\Gamma_h}\left(\frac{\varphi^b(x')}{a_m(a_m+b_m)}\right.$$

$$\left.+\frac{\varphi^b(x'')}{b_m(a_m+b_m)}\right)\geqslant 2rh^{-2}(1-\kappa^b)\varphi^b(x)\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{a_mb_m}$$

$$+2r\kappa^{-b}h^{-2}\varphi^b(x)\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{a_m+b_m}\left(\frac{\delta(x,x')}{a_m}+\frac{\delta(x,x'')}{b_m}\right)$$

$$=2rh^{-2}\varphi^b(x)\Big\{(1-\kappa^b)\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{a_mb_m}$$

$$+\kappa^{-b}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{a_m+b_m}\left(\frac{\delta(x,x')}{a_m}+\frac{\delta(x,x'')}{b_m}\right)\Big\}.$$

由于

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{a_m+b_m}\left(\frac{\delta(x,x')}{a_m}+\frac{\delta(x,x'')}{b_m}\right)\geqslant\max_m\left(\frac{1}{2a_mb_m}\right)$$

$$\geqslant\frac{1}{2n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{a_mb_m},$$

所以

$$-\Delta_h\psi(x)\geqslant 2rh^{-2}\varphi^b(x)\left(1-\kappa^b+\frac{\kappa^{-b}}{2n}\right)\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{a_mb_m}.$$

选择 κ 充分接近 1，则

$$1-\kappa^b+\frac{\kappa^{-b}}{2n}\geqslant\frac{1}{4n}. \tag{14.45}$$

于是，若

$$\frac{r}{2n}\left(1+\frac{a}{\eta^2}\right)^b \geqslant 1, \tag{14.46}$$

则对一切 $x\in\Omega_h^*$,

$$-\Delta_h\psi(x)\geqslant\frac{r}{2nh^2}\varphi^b(x)\geqslant\frac{r}{2nh^2}\left(1+\frac{a}{\eta^2}\right)^b|x|^b\geqslant h^{-2}|x|^b. \tag{14.47}$$

具体选择 a, r 和 κ 时,先取 $\kappa^2<1$ 并满足 (14.45). 再选择 a, 使得满足 (14.39). 最后选取 r, 使得满足 (14.42) 和 (14.46).

把 $\psi(x)$ 代入 (14.33), 即由 (14.43) 和 (14.47) 得到

$$\psi(x)\geqslant h^n\sum_{y\in\Omega_h'}G_h(x,y)|y|^{b-2}+h^{n-2}\sum_{y\in\Omega_h^*}G_h(x,y)|y|^b,$$

因为 $\psi(x)<r|x|^b$, 由此即得所证的结论.

上面的命题中要求 $b<0$, 下面给出另一个估计式.

命题 14.6 设

$$v(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{r_2}\log\left(\dfrac{d^2+ah^2}{|x|^2+ah^2}\right), & n=2,\\ \dfrac{1}{(n-2)r_n}(|x|^2+ah^2)^{\frac{2-n}{2}}, & n\geqslant 3,\end{cases}$$

其中 a, r_n 是与 h 无关的适当正数, d 大于 Ω 的直径, 那末,对一切 x, $y\in\Omega_h$,

$$G_h(x,y)\leqslant v(x-y).$$

证明 可以选择 r_n, 使得

$$-\bar{\Delta}_h v(0)\geqslant-\Delta_h G_h(x,y)|_{x=y}.$$

例如,当 $x\in\Omega_h'$ 时,可选取

$$r_n\leqslant\begin{cases}4\log\left(\dfrac{1+a}{a}\right), & n=2,\\ \dfrac{2n}{n-2}\left[a^{\frac{2-n}{2}}-(a+1)^{\frac{2-n}{2}}\right], & n\geqslant 3.\end{cases}$$

当 $x\in\Omega_h^*$ 时,也可选取 r_n, 使得 r_n 有正的下界. 从而 $v(x)$ 是有意义的,并且当 $x\in\Gamma_h$, $y\in\Omega_h$ 时, $v(x-y)\geqslant 0$.

若 $x\in\Omega_h'$, 可仿照 (14.40) 的证明方法得到

$$- \Delta_h v(x-y) \geqslant 0, \qquad x \in \Omega'_h,\ y \in \Omega_h,\ x \neq y.$$

当 $x \in \Omega_h^*$ 时，也可证明

$$- \Delta_h v(x-y) \geqslant 0, \qquad x \in \Omega_h^*,\ y \in \Omega_h,\ x \neq y.$$

综合上面的结果，即由 $-\Delta_h$ 的单调性得到命题的结论.

引理 14.1 设 $-n < p_1,\ p_2 < 0,\ D_h \in \Omega_h$，并当 $y \in D_h$ 时，

$$|x^{(1)} - y| \geqslant \eta h > 0, \qquad |x^{(2)} - y| \geqslant \eta h > 0,$$

则

$$h^n \sum_{y \in D_h} |x^{(1)} - y|^{p_1} |x^{(2)} - y|^{p_2} \leqslant c_5(|x^{(1)} - x^{(2)}|^{n+p_1+p_2} + 1).$$

证明 可仿 Hubbard (1966) 方法证明

$$h^n \sum_{y \in D_h} |x^{(1)} - y|^{p_1} |x^{(2)} - y|^{p_2} \leqslant c_6 \int_\Omega |x^{(1)} - y|^{p_1} |x^{(2)} - y|^{p_2} dy.$$

又可仿 Friedman (1964) 的证明得到

$$\int_\Omega |x^{(1)} - y|^{p_1} |x^{(2)} - y|^{p_2} dy \leqslant c_7\{|x^{(1)} - x^{(2)}|^{n+p_1+p_2} + 1\}.$$

命题 14.7 若 $2-n < b$，并且 $n=2,\ b>0$ 或 $n \geqslant 3$，$b \geqslant 0$，则

$$h^n \sum_{y \in \Omega'_h} G_h(x, y)|y|^{b-2} \leqslant c_8.$$

证明 例如设 $n \geqslant 3$，$b \geqslant 0$，则由命题 14.6 得到

$$h^n \sum_{y \in \Omega'_h} G_h(x, y)|y|^{b-2} \leqslant \frac{h^n}{(n-2)r_n} \sum_{y \in \Omega'_h} (|x-y|^2 + ah^2)^{\frac{2-n}{2}} |y|^{b-2}.$$

最后应用了引理 14.1. 可类似地证明 $n=2$，$b>0$ 时的结论.

定理 14.5 设 $U(x) \in C^4(\bar{\Omega}/\{0\})$，(14.34) 满足，$\varepsilon > 0$，那末存在依赖于定解条件和 ε 的正常数 $c(\varepsilon)$，使得

$$|\tilde{u}(x)| \leqslant \begin{cases} c(\varepsilon)h^{b+n-2-\varepsilon}|x|^{\varepsilon+2-n}, & \text{当 } 2-n < b \leqslant 4-n \text{ 时}, \\ c(\varepsilon)h^2|x|^{b-2}, & \text{当 } 4-n < b < 2 \text{ 时}, \\ c(\varepsilon)h^2, & \text{当 } n \leqslant 2,\ b>2, \text{ 或 } n \geqslant 3,\ b \geqslant 2 \text{ 时}. \end{cases}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，可能 $c(\varepsilon) \to \infty$.

证明　对一切 $y \in \bar{\Omega}_h$，我们有

$$h^2|y|^{b-4} \leqslant c_9 h^{b+n-2-\varepsilon}|y|^{\varepsilon-n}, \qquad 2-n<b\leqslant 4-n,$$

$$h|y|^{b-3} \leqslant c_9 h^{b+n-4-\varepsilon}|y|^{\varepsilon+2-n}, \qquad 2-n<b\leqslant 5-n.$$

由命题 14.5 和 14.7 得到

$$h^{n+2}\sum_{y\in\Omega_h'} G_h(x,y)|y|^{b-4}$$

$$\leqslant \begin{cases} c(\varepsilon)h^{b+n-2-\varepsilon}|x|^{\varepsilon+2-n}, & 2-n<b\leqslant 4-n,\\ c(\varepsilon)h^2|x|^{b-2}, & 4-n<b<2,\\ c_{10}h^2, & 2<b,\ n=2 \text{ 或 } \\ & \quad 2\leqslant b,\ n\geqslant 3. \end{cases}$$

类似地有

$$h^{n+1}\sum_{y\in\Omega_h^*} G_h(x,y)|y|^{b-3}$$

$$\leqslant \begin{cases} c(\varepsilon)h^{b+n-2-\varepsilon}|x|^{\varepsilon+2-n}, & 2-n<b\leqslant 5-n,\\ c(\varepsilon)h^3|x|^{b-3}, & 5-n<b<3,\\ c_{11}h^3, & 3<b. \end{cases}$$

把以上两式代入 (14.35) 即得所证.

如果 $U\in C^4(\bar{\Omega}/\{0\})$，并且

$$|D^\alpha(x)|\leqslant c_{12}|x|^{2-|\alpha|}, \qquad |\alpha|=3,4,$$

则由定理 14.5 得到

$$\|\tilde{u}\|_\infty \leqslant \begin{cases} c(\varepsilon)h^{2-\varepsilon}, & n=2,\\ c(\varepsilon)h^2, & n=3. \end{cases}$$

如果 $U\in C^4(\bar{\Omega}/\{0\})$，并且

$$|D^\alpha(x)|\leqslant c_{13}|x|^{\mu+4-|\alpha|-n}, \qquad |\alpha|=3,4,\ 0<\mu<n-2,$$

则

$$|\tilde{u}(x)|\leqslant c(\varepsilon)h^2|x|^{2-n+\mu}, \qquad x\in\Omega_h. \tag{14.48}$$

又当 $p'>-n$，$|y|\geqslant \eta h>0$ 时，可以仿照引理 14.1 证明

$$h^n\sum_{y\in\Omega_h}|y|^{p'}\leqslant c_{14},$$

因此当 $p<\dfrac{n}{n-2-\mu}$ 时，由 (14.48) 得到

$$\|\tilde{u}\|_{l^p} \leqslant c(\varepsilon)h^2.$$

如果 $U \in C^4(\bar{\Omega}/\{0\})$，且

$$|D^\alpha(x)| \leqslant c(\varepsilon)|x|^{\mu+2-|\alpha|-n}, \qquad |\alpha| = 3, 4, \ 0 < \mu \leqslant 2,$$

则有

$$\|\tilde{u}(x)\|_\infty \leqslant c(\varepsilon)h^{\mu-\varepsilon}|x|^{2-n+\varepsilon},$$

$$\|\tilde{u}\|_{l^p} \leqslant c(\varepsilon)h^{\mu-\varepsilon}, \qquad p < \frac{n}{n-2}.$$

Bramble, Hubbard, Zlamal (1968) 还讨论了另一种 n 维差分算子 $\bar{\Delta}_h = \sum_{m=1}^{n} \bar{\Delta}_{h,m}$，即当 $x - a_m h e_m$，$x + b_m h e_m$ 为 x 邻点时，

$$\bar{\Delta}_{h,m}u(x) = \frac{1}{h^2}\left\{\frac{u(x - a_m h e_m)}{a_m} + \frac{u(x + b_m h e_m)}{b_m} - \left(\frac{1}{a_m} + \frac{1}{b_m}\right)u(x)\right\}.$$

他们还讨论了高精度格式的误差估计和外边值问题等.

一般说来，当奇点在 Ω 内时，误差较大；而当奇点在边界 Γ 上时，则误差较小. 详见 Hubbard (1966) 的文章.

Fox, Sankar (1969), Fox (1971) 等还采用奇点分离法. 例如考虑极坐标形式的二维 Laplace 方程的 Dirichlet 问题，原点是边界折线的交点，那末，在它附近令

$$u(\rho, \varphi) = u_0(\rho, \varphi) + \sum_{l=1}^{M} c_l u_l(\rho, \varphi),$$

其中 $u_l(\rho, \varphi)$ 是形如 $\rho^{\alpha_l}(\log \rho A_l(\varphi) + B_l(\varphi))$ 的函数的线性组合，在其余部分则用通常的差分格式. 关于分离奇性的方法，还可见 Motz (1946), Woods (1953), Forsythe, Wasow (1960) 和 Канторович, Крылов (1962) 等人的文章.

14.5 Von Neumann 问题的差分格式，广义离散 Green 函数

在前三节中应用离散 Green 函数细致地估计了高精度格式的计算误差，但只限于 Dirichlet 问题. 定理 14.2 可应用于 Von Neumann 问题，但要求 $d \geqslant d_0 > 0$. 本节考虑下列 Laplace 方程

的 Von Neumann 问题

$$
\begin{cases}
-\Delta U = f, & x \in \Omega, \\
\dfrac{\partial U}{\partial n} = g, & x \in \Gamma,
\end{cases}
\tag{14.49}
$$

其中 $x \in \mathscr{R}^2$，并满足相容性条件

$$
\int_\Omega f dx = -\int_\Gamma g ds.
$$

为了保证解的唯一性，还要求

$$
\int_\Omega U(x) dx = 0.
$$

Wolf (1926) 最早计算了 (14.49)． эйдус (1952)，Inoue (1954) 也研究了有关的问题，例如在边界上给出斜导数． Giese (1958) 构造了计算 (14.49) 的差分格式，又对 Ω 是矩形的情况，应用 Fourier 方法构造了离散 Green 函数，并且证明计算误差是 $O(h^2|\ln h|)$．黄鸿慈 (1964) 基于广义 Green 函数的思想 (见Courant, Hilbert (1953))，对一般区域上的 (14.49) 的差分格式构造了广义离散 Green 函数． 若 Ω 是矩形，那末，计算误差也是 $O(h^2|\ln h|)$．

计算 (14.49) 的一个差分格式是

$$
\begin{cases}
-\Delta_h u(x) = f(x), & x \in \Omega_h, \\
u_n(x) = g(x), & x \in \Gamma_h, \\
h^2 \sum\limits_{x \in \Omega_h} u(x) = 0,
\end{cases}
\tag{14.50}
$$

相应的离散 Green 函数可定义为

$$
\begin{cases}
-\Delta_h G_h(x, y) = h^{-2}\delta(x, y), & x \in \Omega_h, \\
G_{h,n}(x, y) = 0, & x \in \Gamma_h.
\end{cases}
$$

但它的系数矩阵是奇异的．为此，黄鸿慈(1964)定义下列广义离散 Green 函数 $G_h(x, y)$，

$$
\begin{cases}
-\Delta_h G_h(x, y) = h^{-2}\delta(x, y) - Nh^{-2}, & x \in \Omega_h, \\
G_{h,n}(x, y) = 0, & x \in \Gamma_h,
\end{cases}
\tag{14.51}
$$

其中N是网格内点的个数．由于

$$\sum_{x\in\Omega_h}(h^{-2}\delta(x,y)-Nh^{-2})=0,$$

所以(14.51)一定有解．把(14.51)对$u(x)$求内积，由引理4.10的第二式得到

$$u(x)=-(G,\Delta_h u)+B(G,u). \tag{14.52}$$

特别若在引理4.10中令 $v(x)\equiv 1$，则有

$$(1,\Delta_h u)-B(1,u)=0,$$

所以 $G_h(x,y)$ 可相差一个任意常数．

(14.52)又可改写成

$$u(x)=h^2\sum_{y\in\Omega_h}G_h(x,y)f(y)+\frac{h}{2}\sum_{m=1}^{2}\sum_{y\in\Gamma_{h,m}^{+}}(G_h(x,y)$$

$$+G_h(x,y-he_m))g(y)+\frac{h}{2}\sum_{m=1}^{2}\sum_{y\in\Gamma_{h,m}^{-}}(G_h(x,y)$$

$$+G_h(x,y+he_m))g(y),$$

所以

$$\|u\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}\leqslant c_0(\|f\|_\infty+\|g\|_{\infty,\Gamma_h})\sup_{x\in\bar{\Omega}_h}\sup_{y\in\bar{\Omega}_h}|G_h(x,y)|. \tag{14.53}$$

下面对特殊的$\bar{\Omega}_h$来构造$G_h(x,y)$．假设$Jh=1$，网格点x的坐标值是 $x_m=\frac{2j_m+1}{2J}$，$m=1,2$．当 $0\leqslant j_m\leqslant J-1$ 时，$x\in\Omega_h$；当 $j_m=-1$ 或J时，$x\in\Gamma_h$．令

$$w_{l_1l_2}(x)=\cos l_1\pi x_1\cos l_2\pi x_2,\qquad 0\leqslant l_1,\ l_2\leqslant J-1,$$

则经计算得到

$$\begin{cases}-\Delta_h w_{l_1l_2}(x)=\lambda_{l_1l_2}w_{l_1l_2}(x), & x\in\Omega_h,\\ w_{l_1l_2,n}(x)=0, & x\in\Gamma_h,\\ \lambda_{l_1l_2}=4h^{-2}\left(\sin^2\frac{l_1\pi h}{2}+\sin^2\frac{l_2\pi h}{2}\right).\end{cases} \tag{14.54}$$

又由三角函数的正交性得到

$$\sum_{x\in\Omega_h} w_{l_1l_2}(x)w_{l_1'l_2'}(x)=\begin{cases}0, & 若\ l_1\neq l_1'\ 或\ l_2\neq l_2',\\ \dfrac{J^2}{2}, & 若\ l_1=l_1',\ l_2=l_2',\ 且至少有一个为零,\\ \dfrac{J^2}{4}, & l_1=l_1'\neq 0,\ l_2=l_2'\neq 0.\end{cases}$$

(14.55)

设

$$G_h(x,y)=\sum_{l_1=0}^{J-1}\sum_{l_2=0}^{J-1}a_{l_1l_2}(y)w_{l_1l_2}(x),$$

则由 (14.54) 得到

$$-\Delta_h G_h(x,y)=\sum_{l_1=0}^{J-1}\sum_{l_2=0}^{J-1}\lambda_{l_1l_2}a_{l_1l_2}(y)w_{l_1l_2}(x).$$

把上式代入 (14.51)，再对 $w_{l_1l_2}(x)$ 求内积，就由 (14.55) 得到

$$a_{l_1l_2}(y)=\begin{cases}\dfrac{2\cos l_1\pi y_1\cos l_2\pi y_2}{\lambda_{l_1l_2}}, & 若\ l_1=0\ 或\ l_2=0,\\ \dfrac{4\cos l_1\pi y_1\cos l_2\pi y_2}{\lambda_{l_1l_2}}, & 若\ l_1\neq 0,\ l_2\neq 0.\end{cases}$$

因为 $\lambda_{00}=0$，所以 $a_{00}(y)$ 是任意的，不妨就取为零，从而得到

$$G_h(x,y)=h^2\sum_{l_1=1}^{J-1}\sum_{l_2=1}^{J-1}\frac{\cos l_1\pi x_1\cos l_2\pi x_2\cos l_1\pi y_1\cos l_2\pi y_2}{\sin^2\dfrac{l_1\pi h}{2}+\sin^2\dfrac{l_2\pi h}{2}}$$

$$+\frac{h^2}{2}\sum_{l_1=1}^{J-1}\frac{\cos l_1\pi x_1\cos l_1\pi y_1}{\sin^2\dfrac{l_1\pi h}{2}}$$

$$+\frac{h^2}{2}\sum_{l_2=1}^{J-1}\frac{\cos l_2\pi x_2\cos l_2\pi y_2}{\sin^2\dfrac{l_2\pi h}{2}}.$$

因为当 $0\leqslant\beta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\sin\beta\geqslant\dfrac{2\beta}{\pi}$，所以

$$|G_h(x,y)| \leqslant \sum_{l_1=1}^{J-1}\sum_{l_2=1}^{J-1}\frac{1}{l_1^2+l_2^2}+\sum_{l_1=1}^{J-1}\frac{1}{l_1^2} \leqslant \sum_{l_1=2}^{J-1}\sum_{l_2=2}^{J-1}\frac{1}{l_1^2+l_2^2}$$

$$+2\sum_{l_1=1}^{J-1}\left(\frac{1}{1+l_1^2}+\frac{1}{l_1^2}\right) \leqslant \int_0^J\int_0^J\frac{dx_1dx_2}{x_1^2+x_2^2}$$

$$+c_1 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{2}J}\frac{d\rho d\varphi}{\rho}+c_1=\frac{\pi}{2}\ln J+c_2.$$

从而由(14.53)得到

$$\|u\|_{\infty,\bar{D}_h} \leqslant c_0\left(\frac{\pi}{2}\ln J+c_2\right)(\|f\|_\infty+\|g\|_{\infty,\Gamma_h}).$$

假设 $U(x)$ 可以延拓到全平面,而保持四阶偏导数连续,并记 $\tilde{u}(x)=u(x)-U(x)$,则有

$$\begin{cases}-\Delta_h\tilde{u}(x)=O(h^2), & x\in\Omega_h,\\ \tilde{u}_x(x)=O(h^2), & x\in\Gamma_h.\end{cases}$$

于是

$$\|\tilde{u}\|_{\infty,\bar{D}_h} \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\ln J+c_2\right)\cdot O(h^2)=O(h^2|\ln h|).$$

冯康,郭本瑜还证明了(见郭本瑜,茅德康(1976))

$$\|G_h(x,y)\|_{1,\infty} \leqslant c_3(\ln J+c_4),$$

因此 $u(x)$ 的一阶中心差商也以 $O(h^2|\ln h|)$ 的速率收敛到相应的导数.

可以把上述方法推广到三维问题的误差估计.

14.6 多维边值问题的分裂外推法

为了既不增加计算复杂性,又提高计算精度,则常采用外推法来改进. 例如设 $\Omega=\{x|0<x_m<1,\ 1\leqslant m\leqslant n\}$,并考虑下列问题

$$\begin{cases}LU=\Delta U-f=0, & x\in\Omega,\\ U=0, & x\in\Gamma.\end{cases} \tag{14.56}$$

记 $L_hu(x)=-\Delta_hu(x)-f(x)$,则有

$$LU(x)-L_hU(x)=\varphi(x)+o(h^2), \tag{14.57}$$

其中

$$\varphi(x)=\frac{h^2}{12}\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial^4 U(x)}{\partial x_m^4}.$$

用 u_{h_l} 表示下列差分格式的解

$$\begin{cases}L_{h_l}u_{h_l}(x)=0, & x\in\Omega_{h_l},\\ u_{h_l}(x)=0, & x\in\Gamma_{h_l}.\end{cases}\tag{14.58}$$

如果 $h_1=2h_2$，并采用通常的外推法，则由定理 2.5 得到

$$U(x)=u_{h_2}(x)+\frac{1}{3}\left(u_{h_2}(x)-u_{h_1}(x)\right)+o(h_1^2).$$

上述算法的缺点是工作量太大．例如设 $Jh_1=1$，那末计算 $u_{h_1}(x)$ 时用到 J^n 个网格点，而计算 $u_{h_2}(x)$ 时，却用到了 $(2J)^n$ 个网格点，从而大大增加了存贮量和计算量．为了克服这个缺点，Lin Qun, Lu Tao(1984)提出了分裂外推法．具体地说，记 $\Omega_h^{(0)}=\Omega_h, L_h^{(0)}=L_h$，$\varphi^{(0)}(x)=\varphi(x)$，又在 x_m 方向把网格步长从 h 缩小到 $\frac{h}{2}$，把所得的网格区域记为 $\Omega_h^{(m)}$．定义差分算子 $L_h^{(m)}$，

$$\begin{aligned}L_h^{(m)}u(x)=&-\frac{4}{h^2}\left(u\left(x+\frac{h}{2}e_m\right)-2u(x)+u\left(x-\frac{h}{2}e_m\right)\right)\\&-\frac{1}{h^2}\sum_{\substack{1\leqslant l\leqslant n\\ l\neq m}}\left(u(x+he_l)-2u(x)\right.\\&\left.+u(x-he_l)\right)-f(x),\end{aligned}$$

则得到

$$LU(x)-L_h^{(m)}U(x)=\varphi^{(m)}(x)+o(h^2),$$

其中

$$\varphi^{(m)}(x)=\frac{h^2}{12}\sum_{\substack{1\leqslant l\leqslant n\\ l\neq m}}\frac{\partial^4 U(x)}{\partial x_l^4}+\frac{h^2}{48}\frac{\partial^4 U(x)}{\partial x_m^4}.$$

现在用下式计算 $u^{(m)}(x)$，

$$\begin{cases}L_h^{(m)}u^{(m)}(x)=0, & x\in\Omega_h^{(m)},\ 0\leqslant m\leqslant n,\\ u^{(m)}(x)=0, & x\in\Gamma_h^{(m)},\ 0\leqslant m\leqslant n.\end{cases}\tag{14.59}$$

因为

$$4\sum_{m=1}^{n}\varphi^{(m)}(x)-(4n-3)\varphi^{(0)}(x)=0,$$

所以根据定理 2.6，当 $x\in\Omega_h$ 时，

$$U(x)=\frac{1}{3}\left(4\sum_{m=1}^{n}u^{(m)}(x)-(4n-3)u^{(0)}\right)+o(h^4).$$

因为当计算 $u^{(m)}(x)$ 时，只用到 $2J^n$ 个网格点，因此大大节省了工作量. 分裂外推法还特别适用于平行算法. 可以把分裂外推法推广到更一般的情况.

关于改进精度的其它方法还可见 Марчук, Шайдуров(1979) 的文章.

14.7 守恒型差分格式

Тихонов, Самарский (1956) 等把椭圆型方程还原为积分守恒形式，然后建立差分格式. 例如设 $\Omega=\{x|0<x_1,x_2<1\}$, $\Gamma^{(1)}=\{x|x_1=0$ 或 $x_2=0\}$, $\Gamma^{(2)}=\{x|x_1=1$ 或 $x_2=1\}$, $\nu(x)\geq\nu_0>0$，所考虑的问题是下列散度型方程

$$\begin{cases}-(\nabla\cdot\nu\nabla)U(x)=f(x), & x\in\Omega,\\ U(x)=g_1(x), & x\in\Gamma^{(1)},\\ \nu\dfrac{\partial U}{\partial n}=g_2(x), & x\in\Gamma^{(2)}.\end{cases}\tag{14.60}$$

假设 $D\in\Omega$，其边界为 Γ_D，则由 Green 公式得到

$$\int_{\Gamma_D}\nu\frac{\partial U}{\partial n}ds+\int_D fdx=0.\tag{14.61}$$

用 h 表示 x_m 的网格步长，$Jh=1$. 又记 $U_1=\dfrac{\partial U}{\partial x_1}$, $U_2=\dfrac{\partial U}{\partial x_2}$. 若 $x\in\Omega_h$，就取 D 为以 x 为中心，边长为 h 的正方形. 于是由(14.61)得到

$$A_1(x)+B_1(x)+C_1(x)+D_1(x)=F_1(x),\tag{14.62}$$

其中

$$A_1(x)=-\int_{x_2-\frac{h}{2}}^{x_2+\frac{h}{2}}\nu U_1\left(x_1+\frac{h}{2},y_2\right)dy_2,$$

$$B_1(x) = -\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}} \nu U_2\left(y_1, \quad x_2 + \frac{h}{2}\right) dy_1,$$

$$C_1(x) = \int_{x_2-\frac{h}{2}}^{x_2+\frac{h}{2}} \nu U_1 \left(x_1 - \frac{h}{2}, y_2\right) dy_2,$$

$$D_1(x) = \int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}} \nu U_2 \left(y_1, \ x_2 - \frac{h}{2}\right) dy_1,$$

$$F_1(x) = \int_{x_2-\frac{h}{2}}^{x_2+\frac{h}{2}} \int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}} f(y_1, y_2) dy_1 dy_2.$$

根据近似微分、积分公式，把上面前四式分别用下面四式来代替

$$A_1(x) \longrightarrow \frac{u(x_1, x_2) - u(x_1 + h, x_2)}{h} \int_{x_2-\frac{h}{2}}^{x_2+\frac{h}{2}} \nu\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_2\right) dy_2,$$

$$B_1(x) \longrightarrow \frac{u(x_1, x_2) - u(x_1, x_2 + h)}{h} \int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}} \nu\left(y_1, \ x_2 + \frac{h}{2}\right) dy_1,$$

$$C_1(x) \longrightarrow \frac{u(x_1, x_2) - u(x_1 - h, x_2)}{h} \int_{x_2-\frac{h}{2}}^{x_2+\frac{h}{2}} \nu\left(x_1 - \frac{h}{2}, y_2\right) dy_2,$$

$$D_1(x) \longrightarrow \frac{u(x_1, x_2) - u(x_1, x_2 - h)}{h} \int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}} \nu\left(y_1, \ x_2 - \frac{h}{2}\right) dy_1.$$

把这些近似式代入(14.62)，即得到具体的算式．在实际计算时，还要对其中的积分进行数值计算．

若 $x \in \Gamma^{(1)}$，则只要令 $u(x) = g_1(x)$．

若 $x \in \Gamma^{(2)}$，例如 $x_1 = 1$，则把 D 取为边长分别为 h 和 $\frac{h}{2}$ 的长方形，而点 x 恰为其中一条长边的中点．于是由(14.61)得到

$$A_2(x) + B_2(x) + C_2(x) + D_2(x) = F_2(x), \quad (14.63)$$

其中

$$A_2(x) = -\int_{x_2-\frac{h}{2}}^{x_2+\frac{h}{2}} \nu U_1(1, y_2) dy_2 = -\int_{x_2-\frac{h}{2}}^{x_2+\frac{h}{2}} g_2(1, y_2) dy_2,$$

$$B_2(x) = -\int_{1-\frac{h}{2}}^{1} \nu U_2\left(y_1, \ x_2 + \frac{h}{2}\right) dy_1,$$

$$C_2(x) = \int_{x_2-\frac{h}{2}}^{x_2+\frac{h}{2}} \nu U_1\left(1 - \frac{h}{2}, \ y_2\right) dy_2,$$

$$D_2(x) = \int_{1-\frac{h}{2}}^{1} \nu U_2\left(y_1, \ x_2 - \frac{h}{2}\right) dy_1,$$

$$F_2(x) = \int_{x_2-\frac{h}{2}}^{x_2+\frac{h}{2}} \int_{1-\frac{h}{2}}^{1} f(y_1, \ y_2) dy_1 dy_2.$$

在以上各项中，$A_2(x)$ 和 $F_2(x)$ 是已知的，其余各项按下式来逼近

$$B_2(x) \longrightarrow \frac{u(1, \ x_2) - u(1, \ x_2 + h)}{h} \int_{1-\frac{h}{2}}^{1} \nu\left(y_1, \ x_2 + \frac{h}{2}\right) dy_1,$$

$$C_2(x) \longrightarrow \frac{u(1, \ x_2) - u(1 - h, \ x_2)}{h} \int_{x_2-\frac{h}{2}}^{x_2+\frac{h}{2}} \nu\left(1 - \frac{h}{2}, \ y_2\right) dy_2,$$

$$D_2(x) \longrightarrow \frac{u(1, \ x_2) - u(1, \ x_2 - h)}{h} \int_{1-\frac{h}{2}}^{1} \nu\left(y_1, \ x_2 - \frac{h}{2}\right) dy_1.$$

把它们代入 (14.63) 后即得到具体的算式.

最后，当 $x_1 = x_2 = 1$ 时，那末把 D 取为以 x 为顶点，边长为 $\frac{h}{2}$ 的正方形．于是由 (14.61) 得到

$$A_3(x) + B_3(x) + C_3(x) + D_3(x) = F_3(x), \quad (14.64)$$

其中

$$A_3(x) = -\int_{1-\frac{h}{2}}^{1} \nu U_1(1, \ y_2) dy_2 = -\int_{1-\frac{h}{2}}^{1} g_1(1, \ y_2) dy_2,$$

$$B_3(x) = -\int_{1-\frac{h}{2}}^{1} \nu U_2(y_1, \ 1) dy_1 = -\int_{1-\frac{h}{2}}^{1} g_2(y_1, \ 1) dy_1,$$

$$C_3(x) = \int_{1-\frac{h}{2}}^{1} \nu U_1\left(1 - \frac{h}{2}, \ y_2\right) dy_2,$$

$$D_3(x)=\int_{1-\frac{h}{2}}^{1}\nu U_2\left(y_1,1-\frac{h}{2}\right)dy_1,$$

$$F_3(x)=\int_{1-\frac{h}{2}}^{1}\int_{1-\frac{h}{2}}^{1}f(y_1,y_2)dy_1dy_2.$$

用下列方式逼近 $C_3(x)$ 和 $D_3(x)$,

$$C_3(x)\longrightarrow\frac{u(1,1)-u(1-h,1)}{h}\int_{1-\frac{h}{2}}^{1}\nu\left(1-\frac{h}{2},y_2\right)dy_2,$$

$$D_3(x)\longrightarrow\frac{u(1,1)-u(1,1-h)}{h}\int_{1-\frac{h}{2}}^{1}\nu\left(y_1,1-\frac{h}{2}\right)dy_1.$$

把它们代入 (14.64) 后即得到具体的算式.

根据积分守恒形式建立的差分格式有下列优点:

(i) 在每个D中, 解 $u(x)$ 保持了局部的离散形式的守恒性. 把它们相加后,则满足整体的守恒性.

(ii) 如果原来的问题是自共轭的, 则得到的差分格式的系数矩阵也往往是对称正定或对称半正定的. 对第一, 三类边值问题和某些第二类边值问题,格式还常常是正型的.

(iii) 可以把D取为曲边形,所以适宜于曲线网格和不规则的网格边界.

(iv) 它自然地处理了第二类边值条件,因此不会带来边值逼近误差,所以近似解的精度较高.

(v) 由于不出现 $\nu(x)$ 在网格点上的值, 而只出现它的积分值,因此适用于间断系数问题或内边界问题.

有关非规则网格上的守恒型格式的研究,可见 Varga (1962), Самарский, Андреев (1976), Фрязинов, Маслянкина (1977) 和 Фрязинов (1979a, b, 1980) 等人的文章. 有关应用方面的工作还可见黄鸿慈 (1964), 冯康 (1978) 的文章.

14.8 能量方法,高阶方程

研究椭圆型差分格式的另一个重要途径是能量方法. Соа-

rant, Friedrichs, Lewy (1928) 最早提出了这个思想，以后的工作是由 Stummel (1967), Thomée, Westergren (1968), Kuo Pen-yu (1977)等人开展的。这个方法是椭圆型方程 L^2 理论(例如见 Bers, John, Schechter (1957)) 的离散模拟.

设 $x \in \mathscr{R}^n$, 并考虑下列问题

$$\begin{cases} -(\nabla \cdot \nu \nabla)U + dU = f, & x \in \Omega, \\ \sigma \dfrac{\partial U}{\partial n} + \gamma U = g, & x \in \Gamma, \end{cases} \tag{14.65}$$

其中 $0 \leqslant \nu_0 \leqslant \nu(x) \leqslant \nu_1$, $0 \leqslant \sigma(x) \leqslant \sigma_1$, $0 \leqslant \gamma(x) \leqslant \gamma_1, d_0 \leqslant d(x)$, $|d(x)| \leqslant d_1$. 它的解满足下列能量关系式

$$\sum_{m=1}^{n} \left\|\sqrt{\nu}\, \frac{\partial U}{\partial x_m}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_\Gamma \gamma U \frac{\partial U}{\partial n}\, ds + \int_\Omega dU^2 dx = \int_\Omega fU dx.$$

设 x_m 的网格步长为 h, $N(\Gamma_h)$ 表示 Γ_h 的适当小的邻域,并假定存在正常数 $\bar{\nu}_0$ 和 c_0, 使得对一切 $x, y \in N(\Gamma_h)$, 都有

$$\bar{\nu}_0 \leqslant \nu(x), \qquad \left|\frac{\nu(x)}{\nu(y)}\right| \leqslant c_0.$$

用下列格式计算 (14.65)

$$\begin{cases} -\Delta_h^{(\nu)} u(x) + du(x) = f(x), & x \in \Omega_h, \\ \sigma(x) u_n(x) + \gamma(x) u(x) = g(x), & x \in \Gamma_h. \end{cases} \tag{14.66}$$

把上式对 $u(x)$ 求内积,由引理 4.10 得到下列离散能量关系式

$$(|u|_1^{(\nu)})^2 - B^{(\nu)}(u, u) + (d, u^2) = (f, u). \tag{14.67}$$

先考虑 Dirichlet 问题. 下面用 c_l 表示某些正常数.

定理 14.6 如果

(i) $\sigma(x) \equiv 0$, $\gamma(x) \equiv 1$, $\bar{\nu}_0 > 0$,

(ii) $d_0 > 0$ 或 $\chi_0 = \nu_0 - c_1 d_1 > 0$,

其中 c_1, c_2 使得下式成立 (见引理 4.4)

$$\|v\|^2 \leqslant c_1 |v|_1^2 + c_2 \|v\|_{\Gamma_h}^2,$$

那末

$$(|u|_1^{(\nu)})^2 + \|u\|^2 + S^{(\nu)}(u, u) \leqslant c_3(\|f\|^2 + h^{-1}\|g\|_{\Gamma_h}^2).$$

证明 此时有

$$
\begin{aligned}
-B_m^{(\nu)}(u,u) = S_m^{(\nu)}(u,u) + \frac{h^{n-2}}{2}\sum_{x\in\Gamma_{h,m}^+}(\nu(x-he_m) \\
-\nu(x))g(x)u(x-he_m) - \frac{h^{n-2}}{2}\sum_{x\in\Gamma_{h,m}^+}\nu(x-he_m)g^2(x) \\
+\frac{h^{n-2}}{2}\sum_{x\in\Gamma_{h,m}^-}(\nu(x+he_m)-\nu(x))g(x)u(x+he_m) \\
-\frac{h^{n-2}}{2}\sum_{x\in\Gamma_{h,m}^-}\nu(x+he_m)g^2(x).
\end{aligned}
$$

设 ε 是适当小的正数，则

$$
-B^{(\nu)}(u,u) \geqslant (1-\varepsilon)S^{(\nu)}(u,u) - \frac{c_4}{h}\|g\|_{\Gamma_h}^2.
$$

把它代入 (14.67)，则得到

$$
\begin{aligned}
(|u|_1^{(\nu)})^2 + (1-\varepsilon)S^{(\nu)}(u,u) + (d,u^2) \leqslant \varepsilon\|u\|^2 \\
+\frac{\|f\|^2}{4\varepsilon} + \frac{c_4}{h}\|g\|_{\Gamma_h}^2.
\end{aligned}
\tag{14.68}
$$

若 $d_0>0$，则取 $\varepsilon=\frac{1}{2}\min(d_0,1)$，从而

$$
(|u|_1^{(\nu)})^2 + \frac{d_0}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}S^{(\nu)}(u,u) \leqslant \frac{\|f\|^2}{4\varepsilon} + \frac{c_4}{h}\|g\|_{\Gamma_h}^2.
$$

若 $\chi_0>0$，则取 $\varepsilon=\frac{1}{2}\min\left(\frac{\chi_0}{c_1},1\right)$. 由引理 4.4 得到

$$
\begin{aligned}
|(d,u^2)| + \varepsilon\|u\|^2 &\leqslant (d_1+\varepsilon)\|u\|^2 \\
&\leqslant \left(d_1+\frac{\chi_0}{2c_1}\right)(c_1|u|_1^2 + c_2\|g\|_{\Gamma_h}^2) \\
&\leqslant \left(\frac{c_1 d_1}{\nu_0}+\frac{\chi_0}{2\nu_0}\right)(|u|_1^{(\nu)})^2 + \left(c_2 d_1 + \frac{c_2\chi_0}{2c_1}\right)\|g\|_{\Gamma_h}^2.
\end{aligned}
$$

把它代入 (14.68)，就得到

$$
\frac{\chi_0}{2\nu_0}(|u|_1^{(\nu)})^2 + \frac{1}{2}S^{(\nu)}(u,u) \leqslant c_5(\|f\|^2 + h^{-1}\|g\|_{\Gamma_h}^2).
$$

再次应用引理 4.4，即得所证.

注记 14.1　设 $\mathscr{D} = \{x | f(x) \neq 0\}$, $\bar{d}_0 = \inf\limits_{x \in \mathscr{D}} d(x) > 0$, 则

$$|(u, f)| \leqslant \frac{\bar{d}_0}{2} \sum_{x \in \mathscr{D}} h^2 u(x) + \frac{1}{2\bar{d}_0} \sum_{x \in \mathscr{D}} h^2 f(x).$$

所以,若 $d_0 \geqslant 0$, $\nu_0 \geqslant 0$, $\bar{\nu}_0 > 0$ (即可能在内点发生退化现象),则定理 14.6 的结论仍然成立.

下面考虑 Von Neumann 问题. 若 $d(x) \equiv 0$, 则为了保证解的唯一性,尚需补充一个条件,例如

$$\sum_{x \in \Omega_h} u(x) = 0. \tag{14.69}$$

定理 14.7　如果

(i) $\sigma(x) \equiv 1$, $\gamma(x) \equiv 0$, $\nu_0 > 0$,

(ii) $d_0 > 0$ 或者 $d(x) \equiv 0$, 且 (14.69) 成立,

那末

$$(|u|_1^{(\nu)})^2 + \|u\|^2 \leqslant c_6(\|f\|^2 + \|g\|_{\Gamma_h}^2).$$

证明　此时有

$$-B_m^{(\nu)}(u, u) = -\frac{h^{n-1}}{2} \sum_{x \in \Gamma_{h,m}^+} g(x)[\nu(x - he_m)u(x) + \nu(x)u(x - he_m)] - \frac{h^{n-1}}{2} \sum_{x \in \Gamma_{h,m}^-} g(x)[\nu(x + he_m)u(x) + \nu(x)u(x + he_m)].$$

由引理 4.9 得到

$$|B^{(\nu)}(u, u)| \leqslant \varepsilon\|u\|_{\Gamma_h}^2 + \varepsilon\|u\|_{\Omega_h^*}^2 + \frac{c_7}{\varepsilon}\|g\|_{\Gamma_h}^2$$

$$\leqslant 2\varepsilon(|u|_1^{(\nu)})^2 + \varepsilon c_8\|u\|^2 + \frac{c_7}{\varepsilon}\|g\|_{\Gamma_h}^2.$$

代入 (14.67) 后得到

$$(1 - 2\varepsilon)(|u|_1^{(\nu)})^2 + (d, u^2) \leqslant (\varepsilon_1 + \varepsilon c_8)\|u\|^2 + \frac{\|f\|^2}{4\varepsilon_1} + \frac{c_7}{\varepsilon}\|g\|_{\Gamma_h}^2. \tag{14.70}$$

若 $d_0 > 0$, 则取 $\varepsilon = \frac{1}{4}\min\left(\frac{d_0}{c_8}, 1\right)$, $\varepsilon_1 = \frac{d_0}{4}$, 并由此推

得所证的结论。

若 $d(x)\equiv 0$，且 (14.69) 成立，则由引理 4.4 得到 $\|u\|^2\leqslant c_9(|u|_1^{(\nu)})^2$. 在 (14.70) 中取 $\varepsilon=\frac{1}{8}\min\left(\frac{1}{c_8c_9},\ 1\right)$，$\varepsilon_1=\frac{1}{8c_9}$，就得到所证的结论.

最后讨论第三类边值问题.

定理 14.8 如果

(i) $\sigma(x)\equiv 1$，$\gamma\geqslant\gamma_0>0$，$\bar{\nu}_0>0$，

(ii) $d_0>0$，或者 $\chi_0=\nu_0-c_1d_1>0$，

那么

$$(|u|_1^{(\nu)})^2+\|u\|_{\Gamma_h}^2\leqslant c_{10}(\|f\|^2+\|g\|_{\Gamma_h}^2).$$

证明 由边界条件得到

$$\begin{aligned}-B_m^{(\nu)}(u,u)=&\frac{h^{n-1}}{2}\sum_{x\in\Gamma_{h,m}^+}(\nu(x-he_m)u(x)\\&+\nu(x)u(x-he_m))(\gamma(x)u(x)-g(x))\\&+\frac{h^{n-1}}{2}\sum_{x\in\Gamma_{h,m}^-}(\nu(x+he_m)u(x)\\&\qquad+\nu(x)u(x+he_m))(\gamma(x)u(x)-g(x))\\=&\frac{h^{n-1}}{2}\sum_{x\in\Gamma_{h,m}^+}((\nu(x-he_m)+\nu(x)\\&+h\gamma(x)\nu(x))u(x)-h\nu(x)g(x))(\gamma(x)u(x)-g(x))\\&+\frac{h^{n-1}}{2}\sum_{x\in\Gamma_{h,m}^-}((\nu(x+he_m)+\nu(x)\\&+h\gamma(x)\nu(x))u(x)-h\nu(x)g(x))(\gamma(x)u(x)-g(x)),\end{aligned}$$

因此

$$-B^{(\nu)}(u,u)\geqslant(\gamma_0\bar{\nu}_0-\varepsilon)\|u\|_{\Gamma_h}^2-\frac{c_{11}}{\varepsilon}\|g\|_{\Gamma_h}^2.$$

把它代入 (14.67)，即得到

$$\begin{aligned}(|u|_1^{(\nu)})^2+(\gamma_0\bar{\nu}_0-\varepsilon)\|u\|_{\Gamma_h}^2+(d,u^2)\leqslant\varepsilon\|u\|^2\\+\frac{\|f\|^2}{4\varepsilon}+\frac{c_{11}}{\varepsilon}\|g\|_{\Gamma_h}^2.\end{aligned}$$

若 $d_0>0$，则取 $\varepsilon=\frac{1}{2}\min(d_0,\gamma_0\bar{\nu}_0)$，从而

$$(|u|_1^{(\nu)})^2+\frac{\gamma_0\bar{\nu}_0}{2}\|u\|_{\Gamma_h}^2+\frac{d_0}{2}\|u\|^2\leqslant c_{12}(\|f\|^2+\|g\|_{\Gamma_h}^2).$$

若 $\chi_0>0$，则取 $\varepsilon=\frac{1}{2}\min\left(\gamma_0\nu_0,\frac{\chi_0}{c_1}\right)$，从而

$$\frac{\chi_0}{2\nu_0}(|u|_1^{(\nu)})^2+\frac{\gamma_0\bar{\nu}_0}{2}\|u\|_{\Gamma_h}^2\leqslant c_{12}(\|f\|^2+\|g\|_{\Gamma_h}^2).$$

最后应用了引理 4.4.

注记 14.2 综合上面的证明方法，就可得到混合边值问题的能量估计式．能量方法不仅适用于退化型椭圆型差分格式，而且也是研究混合型差分格式的有希望的途径．

可以从能量不等式出发，估计收敛速率．例如设 $\sigma(x)\equiv0$，$\gamma(x)\equiv1$，$U\in C^4(\bar{\Omega})$，Γ_h 与 Γ 的距离是 $O(h)$，当 $x\in\Gamma_h$ 时，$u(x)=g(x')$，其中 $x'\in\Gamma$，$|x-x'|\leqslant h$．那末，在定理 14.6 的条件下，

$$(|\tilde{u}|_1^{(\nu)})^2+\|\tilde{u}\|^2+S^{(\nu)}(\tilde{u},\tilde{u})=O(h^2)\quad.$$

若 $\Gamma=\Gamma_h$，那末

$$(|\tilde{u}|_1^{(\nu)})^2+\|\tilde{u}\|^2+S^{(\nu)}(\tilde{u},\tilde{u})=O(h^4).$$

又例如 $\sigma(x)\equiv1$，$\gamma(x)\equiv0$，并适当选择网格边界，使得当 $x\in\Gamma_h$ 时，$\tilde{u}_n(x)=O(h^2)$．那末，在定理 14.7 的条件下，

$$(|\tilde{u}|_1^{(\nu)})^2+\|\tilde{u}\|^2=O(h^4).$$

能量方法也适用于高阶方程．例如考虑下列问题

$$\begin{cases}\Delta^2U=f, & x\in\Omega,\\ -\Delta U=g_1, & x\in\Gamma,\\ U=g_2, & x\in\Gamma.\end{cases}$$

记 $V=-\Delta U$，则有

$$\begin{cases}-\Delta V=f, & x\in\Omega,\\ -\Delta U=V, & x\in\Omega,\\ V=g_1, & x\in\Gamma,\\ U=g_2, & x\in\Gamma.\end{cases}$$

计算它的格式是

$$\begin{cases} -\Delta_h v(x) = f(x), & x \in \Omega_h, \\ -\Delta_h u(x) = v(x), & x \in \Omega_h, \\ v(x) = g_1(x), & x \in \Gamma_h, \\ u(x) = g_2(x), & x \in \Gamma_h. \end{cases}$$

把第一、二两式分别对 $v(x)$ 和 $u(x)$ 求内积，由引理 4.10 得到

$$\begin{cases} |v|_1^2 - B(v, v) = (v, f), \\ |u|_1^2 - B(u, u) = (u, v). \end{cases}$$

由边界条件推得

$$\begin{cases} |v|_1^2 + (1-\varepsilon)S(v, v) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\|v\|^2 + \dfrac{1}{2\varepsilon}\|f\|^2 + c_{13}h^{-1}\|g_1\|_{\Gamma_h}^2, \\ |u|_1^2 + (1-\varepsilon)S(u, u) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\|u\|^2 + \dfrac{1}{2\varepsilon}\|v\|^2 + c_{13}h^{-1}\|g_2\|_{\Gamma_h}^2. \end{cases}$$

把上面两式线性组合后得到

$$\begin{aligned} &|v|_1^2 + \varepsilon_1|u|_1^2 + (1-\varepsilon)S(v, v) + \varepsilon_1(1-\varepsilon)S(u, u) \\ &\quad \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon}\right)\|v\|^2 + \frac{\varepsilon\varepsilon_1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|f\|^2 \\ &\quad\quad + c_{13}h^{-1}\|g_1\|_{\Gamma_h}^2 + \varepsilon_1 c_{13}h^{-1}\|g_2\|_{\Gamma_h}^2. \end{aligned}$$

取 $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\min\left(\dfrac{1}{c_1}, 1\right)$, $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon^2$, 则有

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon}\right)\|v\|^2 \leqslant \varepsilon\|v\|^2 \leqslant \frac{1}{2c_1}\|v\|^2 \leqslant \frac{1}{2}|v|_1^2 \\ &\quad + \frac{c_1 c_2}{2}\|g_1\|_{\Gamma_h}^2, \quad \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2 \leqslant \frac{1}{4c_1}(c_1|u|_1^2 + c_2\|g_2\|_{\Gamma_h}^2) \\ &\leqslant \frac{1}{4}|u|_1^2 + \frac{c_2}{4c_1}\|g_2\|_{\Gamma_h}^2, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|v|_1^2 + \frac{\varepsilon_1}{2}|u|_1^2 + \frac{1}{2}S(v, v) + \frac{\varepsilon_1}{2}S(u, u) \\ &\quad \leqslant c_{14}(\|f\|^2 + h^{-1}\|g_1\|_{\Gamma_h}^2 + \varepsilon_1 h^{-1}\|g_2\|_{\Gamma_h}^2). \end{aligned}$$

若 $h \leqslant \dfrac{1}{4}\min\left(\dfrac{1}{c_1^2}, 1\right)$, 则可取 $\varepsilon_1 = h$, 从而得到

$$|v|_1^2 + S(v, v) \leqslant c_{15}(\|f\|^2 + h^{-1}\|g_1\|_{\Gamma_h}^2 + \|g_2\|_{\Gamma_h}^2).$$

14.9 离散 Schauder 估计，Poisson 方程的解的存在性

Thomée, Westergren (1968)对一般的高阶椭圆型差分算子建立了能量估计式．

设 $x\in\mathscr{R}^n$, $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $\alpha_m\geqslant 0$, $|\alpha|=\sum_{m=1}^{n}\alpha_m$, $a_\alpha(x)\in C^\infty(\Omega)$, $U(x)$ 是复值函数，

$$
\begin{aligned}
D^\alpha U(x) &= \frac{\partial^{|\alpha|}U(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},\\
LU(x) &= \sum_{|\alpha|\leqslant p} a_\alpha(x)D^\alpha U(x).
\end{aligned}
\tag{14.71}
$$

又设 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)$, $\theta^\alpha=\theta_1^{\alpha_1}\theta_2^{\alpha_2}\cdots\theta_n^{\alpha_n}$, $|\theta|^2=\sum_{m=1}^{n}\theta_m^2$. 下列多项式称为 L 的特征多项式

$$
p(\theta,x)=\sum_{|\alpha|=p} a_\alpha(x)\theta^\alpha i^{|\alpha|}. \tag{14.72}
$$

若对一切 θ 和 $x\in\Omega$, $p(\theta,x)\neq 0$, 则称 L 是椭圆型的．如果 $\bar\Omega^{(1)}\subset\Omega^{(2)}$, 则记为 $\Omega^{(1)}\ll\Omega^{(2)}$. 于是，当 $\Omega^{(1)}\ll\Omega$ 时，存在正常数 χ_0, 使得对一切 θ 和 $x\in\Omega^{(1)}$, 都有

$$
|p(\theta,x)|\geqslant\chi_0|\theta|^p.
$$

如果上式对一切 θ 和 $x\in\Omega$ 都成立，则称 L 在 Ω 上是一致椭圆的，χ_0 称为算子 L 的椭圆常数．

可以证明，若 L 是椭圆的，$\Omega^{(1)}\ll\Omega^{(2)}\ll\Omega$, 则存在正常数 c_0, 使得

$$
\|U\|_{H^{p+q}(\Omega^{(1)})}\leqslant c_0(\|LU\|_{H^q(\Omega^{(2)})}+\|U\|_{L^2(\Omega^{(2)})}). \tag{14.73}
$$

用 h 表示网格步长．设 $B(x,h)$ 是复值函数．若对一切 $h\leqslant h_0$ 和 $x\in\Omega^{(1)}\ll\Omega$, 都有 $B(x,h)\in C^\infty(\Omega^{(1)}\times[0,h_0])$, 则记为 $B(x,h)\in C^\infty(\Omega,h)$. 此时对一切 k, 都有

$$
B(x,h)=\sum_{l=0}^{k-1}h^l B_l(x)+h^k\tilde{B}_k(x,h),
$$

其中 $B_l(x)\in C^\infty(\Omega)$, $\tilde{B}_k(x,h)\in C^\infty(\Omega,h)$.

记 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$，$T^\sigma u(x)=u(x+\sigma h)$。当 $\sigma_m=1$ 时，则把 T^σ 记为 $T^{(1)}$. 用下列差分算子逼近 L,

$$L_h u(x)=h^{-p}\sum_\sigma A_\sigma(x,h)T^\sigma u(x), \tag{14.74}$$

并假定当 $|\sigma|\geqslant\sigma_1>0$ 时，$A_\sigma(x,h)\equiv0$. 今后还简记

$$u_{x_m^{\alpha_m}}(x)=u_{\underbrace{x_m x_m\cdots x_m}_{\alpha_m}}(x),\qquad u_{x^\alpha}(x)=u_{x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_m^{\alpha_m}}(x).$$

为了建立(14.73)的离散模拟，需要证明一些引理.

引理 14.2 存在正常数 $\xi_{\alpha\gamma\mu}$，使得

$$T^\alpha u(x)=\sum_{|\gamma|<k}\frac{\alpha!\,h^{|\gamma|}}{\gamma!(\alpha-\gamma)!}u_{x^\gamma}(x)+R_k^{(\alpha)}u(x), \tag{14.75}$$

其中

$$R_k^{(\alpha)}u(x)=h^k\sum_{|\gamma|=k}\sum_\mu\xi_{\alpha\gamma\mu}T^\mu u_{x^\gamma}(x).$$

证明 记 $\partial_x^\alpha=(\partial_{x_1})^{\alpha_1}\cdots(\partial_{x_n})^{\alpha_n}$. 当 $\alpha_m=1$ 时，把 ∂_x^α 简记为 $\partial_x^{(1)}$. 于是有

$$T^\alpha u(x)=(I+\partial_x^{(1)})^\alpha u(x)=\sum_\gamma\frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!}\partial_x^\gamma u(x).$$

因为 $\partial_x^\gamma u(x)=h^{|\gamma|}u_{x^\gamma}(x)$，并且当 $|\gamma|\geqslant k$ 时，存在 $s\leqslant\gamma$，$|s|=k$，所以

$$\partial_x^\gamma u(x)=h^k(T^{(1)}-I)^{\gamma-s}u_{x^s}(x),$$

从而得到引理的结论.

引理 14.3 L_h 对 L 的逼近是相容的，当且仅当存在复值函数 $C_{\nu\gamma}(x)\in C^\infty(\Omega)$ $(\gamma\neq0)$ 和 $C_{\nu0}(x,h)\in C^\infty(\Omega,h)$，使得

$$L_h u(x)=\sum_\nu\sum_{|\gamma|\leqslant p}C_{\nu\gamma}T^\nu u_{x^\gamma}(x), \tag{14.76}$$

其中

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_\nu C_{\nu\gamma}(x)=a_\gamma(x), & \gamma\neq0\\ \displaystyle\sum_\nu C_{\nu0}(x,0)=a_0(x),\end{cases} \tag{14.77}$$

若 $A_\sigma(x,h)$ 是 h 的至多 p 阶多项式，则

$$C_{\nu 0}(x, h) = C_{\nu 0}(x, 0) \in C^{\infty}(\Omega).$$

证明 当 $h \to 0$ 时，$T^{\nu}U_{x^{\gamma}}(x) \to D^{\gamma}U(x)$. 故若 (14.77) 成立，则 $L_hU(x) \to LU(x)$，即充分性得证.

下面来证明必要性. 假设当 $\sigma \leqslant \sigma_0$ 时，$A_{\sigma}(x, h) \equiv 0$. 记 $V(x) = T^{\sigma_0}U(x)$，于是由 (14.74) 和引理 14.2 得到

$$\begin{aligned}
L_hU(x) &= h^{-p}\sum_{\delta \geqslant 0} A_{\sigma_0+\delta}(x, h)T^{\delta}V(x) \\
&= h^{-p}\sum_{\delta}\sum_{k=0}^{p-1} h^k A_{\sigma_0+\delta, k}(x)T^{\delta}V(x) \\
&\quad + \sum_{\delta} \widetilde{A}_{\sigma_0+\delta, p}(x, h)T^{\delta}V(x) \\
&= \sum_{l=0}^{p-1} h^{-p+l}\sum_{|\gamma| \leqslant l}\left(\sum_{\delta}\frac{\delta!}{(\delta-\gamma)!\gamma!}\right. \\
&\quad \left.\cdot A_{\sigma_0+\delta, l-|\gamma|}(x)\right)T^{\sigma_0}U_{x^{\gamma}}(x) \\
&\quad + \sum_{\omega \geqslant 0}\sum_{0<|\gamma| \leqslant p}\left(\sum_{\delta}\xi_{\delta,\gamma,\omega}A_{\sigma_0+\delta, p-|\gamma|}(x)\right)T^{\sigma_0+\omega}U_{x^{\gamma}}(x) \\
&\quad + \sum_{\delta}\widetilde{A}_{\sigma_0+\delta, p}(x, h)T^{\sigma_0+\delta}U(x).
\end{aligned} \tag{14.78}$$

上式右端的第一项是 $\sum_{r=1}^{p} O\left(\frac{1}{h^r}\right)$. 如果 L_h 对 L 的逼近是相容的，它必定等于零. 令 $h \to 0$，即得到 (14.77)，并且

$$\begin{cases}
C_{\nu\gamma}(x) = \sum_{l}\xi_{l-\sigma_0,\gamma,\nu-\sigma_0}A_{l, p-|\gamma|}(x), & \gamma \neq 0, \\
C_{\nu 0}(x, h) = \widetilde{A}_{\nu, p}(x, h).
\end{cases}$$

差分算子 L_h 的主部是指

$$\begin{aligned}
\widetilde{L}_h u(x) &= h^{-p}\sum_{\sigma} A_{\sigma}(x, 0)T^{\sigma}u(x) \\
&= \sum_{\nu}\sum_{|\gamma|=p} C_{\nu\gamma}(x)T^{\nu}u_{x^{\gamma}}(x).
\end{aligned} \tag{14.79}$$

算子 L_h 的特征多项式是

$$P_h(\theta, x) = \sum_{\sigma} A_\sigma(x, 0) e^{i\sigma\theta}.$$

又记 $\Theta = \{\theta \mid |\theta_m| \leqslant \pi, 1 \leqslant m \leqslant n\}$. 若对一切 $x \in \Omega$ 和 $\theta \in \Theta$, $P_h(\theta, x) \neq 0$, 则称 L_h 是椭圆型差分算子.

引理 14.4 设 L_h 是 Ω 上的椭圆型差分算子, $\Omega^{(1)} \ll \Omega$, 则存在正常数 χ_1, 使得对一切 $x \in \Omega$ 和 $\theta \in \Theta$,

$$|P_h(\theta, x)| \geqslant \chi_1 \left(\sum_{m=1}^{n} (1 - \cos\theta_m) \right)^{\frac{p}{2}},$$

其中 χ_1 被称为 L_h 的椭圆常数.

证明 根据 (14.77), 对于固定的 $\Omega^{(1)} \ll \Omega$, 当 $\theta \to 0$ 时, 一致地有

$$P_h(\theta, x) = p(\theta, x) + o(|\theta|^p).$$

由于 L 在 $\Omega^{(1)}$ 上是一致椭圆的, 因此存在 $\chi_2 > 0$, 使得当 $|\theta| \leqslant \delta$ 时,

$$|P_h(\theta, x)| \geqslant \chi_2 |\theta|^p.$$

另一方面, L_h 也是椭圆型的, 故存在 $\chi_3 > 0$, 使得对一切 $|\theta| \geqslant \delta$,

$$|P_h(\theta, x)| \geqslant \chi_3 |\theta|^p.$$

所以, 对一切 $x \in \Omega^{(1)}$ 和 $\theta \in \Theta$, 都有

$$|P_h(\theta, x)| \geqslant \chi_4 |\theta|^p.$$

最后则应用了下列不等式

$$\left(\sum_{m=1}^{n} (1 - \cos\theta_m) \right)^{\frac{p}{2}} \leqslant c_1 |\theta|^p, \qquad \forall \theta \in \Theta.$$

下面记 $j = (j_1, j_2, \cdots, j_n)$, 网格点坐标 $x_m = j_m h$. $\mathscr{M}_h$ 表示复值网格函数集合. 若 $u \in \mathscr{M}_h$, 且有有限支集, 则记为 $u \in \mathscr{N}_h$. 如果当 $x \bar{\in} \Omega$ 时, $u(x) = 0$, 则记为 $u \in \mathscr{N}_h(\Omega)$, 并用 $d(u)$ 表示支集的直径. 定义

$$(u, v) = h^n \sum_j u(jh) v^*(jh), \quad \|u\|^2 = (u, u),$$

$$\|u\|_\infty = \sup_j |u(jh)|.$$

类似地引入 $|u|_l$, $\|u\|_l$, $\|u\|_{l, \Omega^{(1)}}$ 等定义. 又对 $u \in \mathscr{N}_h(\Omega)$, 引入

Fourier 变换

$$\hat{u}(\theta)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\sum_{j}h^{n}u(jh)e^{-ij\theta},$$

于是成立下列 Parseval 等式

$$\|u\|^2=h^{-n}\int_{\Theta}|\hat{u}(\theta)|^2d\theta. \qquad (14.80)$$

特别，$u_{x^\alpha}(x)$ 的 Fourier 变换是

$$h^{-|\alpha|}\left(\prod_{m=1}^{n}(e^{i\theta_m}-1)^{\alpha_m}\right)\hat{u}(\theta). \qquad (14.81)$$

又若 L_h 的主部 $\tilde{L}_h$ 是常系数差分算子，那末 $\tilde{L}_hu(x)$ 的 Fourier 变换是

$$h^{-p}P_h(\theta)\hat{u}(\theta). \qquad (14.82)$$

引理 14.5 若 $u\in\mathscr{N}_h(\Omega)$，$h\leqslant 1$，$p\geqslant 0$，则存在正常数 c_2，使得

$$\|u\|_p\leqslant c_2\sum_{m=1}^{n}\|u_{x_m^p}\|.$$

证明 根据 Hardy、littlewood, Pólya (1952) 的文章，非负序列的几何平均值不超过它的算术平均值，故当 $|\alpha|=p$ 时

$$\left|\prod_{m=1}^{n}(e^{i\theta_m}-1)^{\alpha_m}\right|^2\leqslant\sum_{m=1}^{n}|e^{i\theta_m}-1|^{2p},$$

从而由 (14.80)，(14.81) 得到

$$\|u_{x^\alpha}\|^2\leqslant c_3\sum_{m=1}^{n}\|u_{x_m^p}\|^2,\qquad |\alpha|=p. \qquad (14.83)$$

又因为 $u\in\mathscr{N}_h(\Omega)$，所以，当 $1\leqslant l\leqslant p$ 时，$|u|_{l-1}\leqslant c_4|u|_l$，从而结合 (14.83) 推得所证的结论.

引理 14.6 假设椭圆型差分算子 L_h 对 L 的逼近是相容的，在 Ω 上有椭圆常数 χ_1，它的主部是常系数. 那末，存在正常数 c_5，使得对一切 $u\in\mathscr{N}_h(\Omega)$，

$$\|u\|_p\leqslant\chi_1^{-1}c_5\|\tilde{L}_hu\|.$$

证明 由 (14.80)—(14.82) 得到

$$\|\hat{L}_h u\|^2 = h^{-n-2p}\int_\Theta |P_h(\theta)|^2 |\hat{u}(\theta)|^2 d\theta,$$

$$\sum_{m=1}^{n} \|u_{x_m^p}\|^2 = h^{-n-2p}\int_\Theta \left(\sum_{m=1}^{n}(1-\cos\theta_m)^p\right)|\hat{u}(\theta)|^2 d\theta.$$

结合引理 14.4，14.5 即得所证.

引理 14.7 假设椭圆型差分算子 L_h 对 L 的逼近是相容的，$\Omega^{(1)} \ll \Omega$. 那末，存在正常数 h_0，d_0 和 c_6，使得当 $d(u) \leqslant d_0$，$h \leqslant h_0$ 时，对一切 $u \in \mathscr{N}_h(\Omega^{(1)})$，

$$\|u\|_p \leqslant c_6 \|\tilde{L}_h u\|.$$

证明 由 (14.79)

$$\tilde{L}_h u(x) = \sum_\nu \sum_{|\gamma|=p} C_{\nu\gamma}(x) T^\nu u_{x^\gamma}(x).$$

假设 $x' = (j_1' h, j_2' h, \cdots, j_n' h)^*$ 在 $u(x)$ 的支集中，令

$$\tilde{L}'_h u(x) = \sum_\nu \sum_{|\gamma|=p} C_{\nu\gamma}(x') T^\nu u_{x^\gamma}(x).$$

则存在仅与 x' 有关的正常数 c_7，使得

$$\|u\|_p \leqslant c_7 \|\tilde{L}'_h u\|.$$

另一方面 $d(u) \leqslant d_0$，故当 h 充分小时

$$\|(\tilde{L}_h - \tilde{L}'_h)u\| = \left\|\sum_\nu \sum_{|\gamma|=p} (C_{\nu\gamma}(x) - C_{\nu\gamma}(x')) T^\nu u_{x^\gamma}\right\|$$

$$\leqslant c_8 \max_{\nu,\gamma} \omega(C_{\nu\gamma}, 2d_0;\ \Omega^{(1)}) \|u\|_p,$$

其中 $\omega(C_{\nu\gamma}, 2d_0;\ \Omega^{(1)})$ 表示 $C_{\nu\gamma}$ 在 $\Omega^{(1)}$ 上的连续范数. 当 d_0 适当小时，它也适当小.

结合以上两式，就得到所证的结论.

引理 14.8 假设椭圆型差分算子 L_h 对 L 的逼近是相容的，$\Omega^{(1)} \ll \Omega$，那末，存在正常数 h_0 和 c_9，使得当 $h \leqslant h_0$ 时，对一切 $u \in \mathscr{N}_h(\Omega^{(1)})$，都有

$$\|u\|_p \leqslant c_9(\|L_h u\| + \|u\|_{p-1}).$$

证明 因为 $u \in \mathscr{N}_h(\Omega^{(1)})$，所以根据引理 14.3，只要证明

$$\|u\|_p \leqslant c_{10}(\|\tilde{L}_h u\| + \|u\|_{p-1}). \tag{14.84}$$

设 d_0 如引理 14.7 所示．作函数列 $\varphi_l(x)\in C_0^\infty(\Omega)$，$l=1,2,\cdots,L$，使得 $d(\varphi_l)\leqslant d_0$，并且在 $\Omega^{(1)}$ 上，$\sum_{l=1}^{L}\varphi_l(x)\equiv 1$，于是有

$$u(x)=\sum_{l=1}^{L}\varphi_l(x)u(x).$$

因为 $d(\varphi_l u)\leqslant d_0$，故根据引理 14.7

$$\|u_{x^\alpha}\|\leqslant\sum_{l}^{L}\|(\varphi_l u)_{x^\alpha}\|\leqslant c_{11}\sum_{l=1}^{L}\|\tilde{L}_h(\varphi_l u)\|,\qquad |\alpha|=p.$$

但是

$$(vw)_{x^\alpha}=\sum_{\gamma\leqslant\alpha}\frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!}T^\gamma w_{x^{\alpha-\gamma}}v_{x^\gamma},$$

因此

$$\|\tilde{L}_h(\varphi_l u)-\varphi_l\tilde{L}_h u\|\leqslant c_{12}\|u\|_{p-1}.$$

结合引理 14.5 即得所证．

引理 14.8 本身是一个很好的能量估计式，但它要求 $u(x)\in\mathscr{N}_h(\Omega^{(1)})$．为了得到与 (14.73) 相应的结果，还需应用 Friedrichs (1953) 的技巧．下面设 $\Omega^{(1)}\ll\Omega^{(2)}\ll\Omega$，$\varphi\in C_0^\infty(\Omega^{(2)})$，并且当 $x\in\Omega$ 时，$\varphi(x)\geqslant 0$，而当 $x\in\Omega^{(1)}$ 时，$\varphi(x)\equiv 1$．又定义范数

$$\|u\|_M^{(\varphi)}=\sum_{|\alpha|\leqslant M}\|\varphi^{|\alpha|}u_{x^\alpha}\|_{\Omega^{(2)}}.$$

引理 14.9 假设 M，N 是不小于 1 的自然数，$|\alpha|\leqslant M$，$|\alpha|+|\gamma|\leqslant N$．那末，存在正常数 h_0 和 c_{13}，使得当 $h\leqslant h_0$ 时，对一切 $u\in\mathscr{M}_h$，

$$\|\mathscr{A}_{\sigma\gamma N}(\varphi)u_{x^\alpha}\|\leqslant c_{13}\|u\|_{M-1}^{(\varphi)}.\tag{14.85}$$

其中

$$\mathscr{A}_{\sigma\gamma N}(\varphi)=T^\sigma(\varphi^N)_{x^\gamma}-D^\gamma(\varphi^N),$$

特别有

$$\|T^\sigma(\varphi^N)_{x^\gamma}u_{x^\alpha}\|\leqslant c_{14}\|u\|_M^{(\varphi)}.\tag{14.86}$$

证明 应用归纳法来证明．若 $M=1$，则 $|\alpha|=1$．由于 $|\gamma|\leqslant N-1$，$N\geqslant 1$，故当 $h\to 0$ 时，

$$T^\sigma(\varphi^N)_{x^\gamma}-D^\gamma(\varphi^N)=O(h).$$

又当 h 适当小时，上式左端在 $\Omega^{(2)}$ 外为零．再考虑到 $|\alpha|=1$ 时，

$$|hu_{x^\alpha}(x)| \leqslant |T^\alpha u(x)| + |u(x)|,$$

所以 (14.85) 成立,并由此推得 (14.86).

假定结论已经对$M-1$成立. 由 Taylor 展开式得到

$$\mathscr{A}_{\sigma\gamma N}(\varphi) = \sum_{l=1}^{|\alpha|} h^l \Phi_l \varphi^{|\alpha|-l},$$

其中 Φ_l 是有界函数. 从而有

$$\|\mathscr{A}_{\sigma\gamma N}(\varphi) u_{x^\alpha}\| \leqslant c_{15} \sum_{l=1}^{|\alpha|} \|\varphi^{|\alpha|-l} h^l u_{x^\alpha}\|.$$

因为当 $|\alpha| \geqslant l$ 时, $h^l u_{x^\alpha}(x)$ 可改写成 $T^\nu u_{x^\mu}$ 的线性组合形式, 其中 $\mu = |\alpha| - l$, 所以由$M-1$时的 (14.86) 式得到

$$\|\mathscr{A}_{\sigma\gamma N}(\varphi) u_{x^\alpha}\| \leqslant c_{16} \sum_{|\mu| \leqslant M-1} \sum_{\nu} T^{-\nu}(\varphi^{|\mu|}) u_{x^\mu}\|$$
$$\leqslant c_{17} \|u\|_{M-1}^{(\varphi)},$$

因此 (14.85) 对M成立,并由此推出 (14.86).

引理 14.10 若$M \geqslant 1$, $|\alpha| + |\gamma| \leqslant M \leqslant N$, 那末存在正常数 h_0 和 c_{18}, 使得当 $h \leqslant h_0$ 时,对一切 $u \in \mathscr{M}_h$,

$$\|(\varphi^N u_{x^\gamma})_{x^\alpha} - \varphi^N u_{x^{\alpha+\gamma}}\| \leqslant c_{18} \|u\|_{M-1}^{(\varphi)}, \tag{14.87}$$

特别有

$$\|(\varphi^N u_{x^\gamma})_{x^\alpha}\| \leqslant c_{19} \|u\|_M^{(\varphi)}. \tag{14.88}$$

证明

$$(\varphi^N u_{x^\gamma})_{x^\alpha} - \varphi^N u_{x^{\alpha+\gamma}} = \sum_{\substack{\nu \leqslant \alpha \\ \nu \neq 0}} \frac{\alpha!}{\nu!(\alpha-\nu)!} T^\nu u_{x^{\alpha+\gamma-\nu}} (\varphi^N)_{x^\nu},$$

从而由 (14.86) 得到 (14.87), 并由此得到 (14.88).

引理 14.11 对任意的 $M \geqslant 1$ 和 $\varepsilon > 0$, 都存在正常数 c_{20}, 使得当 h 适当小时,对一切 $u \in \mathscr{M}_h$,

$$\|u\|_{M-1}^{(\varphi)} \leqslant \varepsilon \|u\|_M^{(\varphi)} + c_{20} \|u\|^{(\varphi)}.$$

证明 采用归纳法. 当 $M = 1$ 时,它是显然成立的. 今假定引理对 $M-1$ 成立. 设 $|\alpha| = M-1$, $\alpha_m \neq 0$, 则由 Abel 公式得到

$$\|\varphi^{M-1} u_{x^\alpha}\|^2 = ((\varphi^{2M-2} u_{x^\alpha})_{\bar{x}_m}, u_{x^{\alpha'}})$$
$$= (\varphi^{2M-2} (u_{x^\alpha})_{\bar{x}_m}, u_{x^{\alpha'}}) + ((\varphi^{2M-2})_{x_m} u_{x^\alpha}, T_m^{+} u_{x^{\alpha'}}), \tag{14.89}$$

其中

$$T_m^+ u(x) = u(x + hc_m), \quad u_{x^{\alpha'}} = u_{x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m - 1}\cdots x_n^{\alpha_n}},$$

根据(14.86)，上式右端第一项的绝对值不超过

$$c_{21}\|u\|_M^{(\varphi)} \cdot \|u\|_{M-2}^{(\varphi)}.$$

又因为

$$(\varphi^{2M-2})_{x_m} = \sum_{l=0}^{2M-3} h^l \Phi_l \varphi^{2M-3-l},$$

所以(14.89)的右端的第二项的绝对值不超过

$$\left|\sum_{l=0}^{2M-3} h^l(\Phi_l \varphi^{2M-3-l} u_{x^\alpha}, T_m^+ u_{x^{\alpha'}})\right|$$

$$\leqslant \sum_{|\gamma|\leqslant M-1} \sum_{|\mu|\leqslant M-2} \sum_{\sigma} \sum_{\nu} |(\varphi^{|\gamma|} T^\sigma u_{x^\gamma}, \varphi^{|\mu|} T^\nu u_{x^\mu})|$$

$$\leqslant c_{22}\|u\|_{M-1}^{(\varphi)}\|u\|_{M-2}^{(\varphi)} \leqslant c_{23}\|u\|_M^{(\varphi)}\|u\|_{M-2}^{(\varphi)}.$$

把以上两个估计式代入(14.89)，就得到

$$\|u\|_{M-1}^{(\varphi)} \leqslant (c_{24}\|u\|_M^{(\varphi)}\|u\|_{M-2}^{(\varphi)})^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|u\|_M^{(\varphi)} + \frac{c_{25}}{2\varepsilon}\|u\|_{M-2}^{(\varphi)}.$$

因为引理的结论对 $M-1$ 成立，所以

$$\frac{c_{25}}{2\varepsilon}\|u\|_{M-2}^{(\varphi)} \leqslant \frac{1}{2}\|u\|_{M-1}^{(\varphi)} + c_{26}\|u\|^{(\varphi)},$$

从而得到引理的结论.

定理 14.9 假设 Ω 是有界区域，椭圆型差分算子对 L 的逼近是相容的，那末，对一切 $\Omega^{(1)} \ll \Omega^{(2)} \ll \Omega$ 和 k，都存在正常数 h_0 和 c_{27}，使得当 $h \leqslant h_0$ 时，对一切 $u \in \mathscr{M}_h$，

$$\|u\|_{p+k,\Omega^{(1)}} \leqslant c_{27}(\|L_h u\|_{k,\Omega^{(2)}} + \|u\|_{\Omega^{(2)}}).$$

证明 对一切 $k \geqslant 0$，

$$\|u\|_{p+k}^{(\varphi)} = \sum_{|\alpha|=p+k} \|\varphi^{p+k} u_{x^\alpha}\| + \|u\|_{p+k-1}^{(\varphi)}.$$

由引理 14.10，当 $|\gamma| = p$，$|\mu| = k$ 时，

$$\|(\varphi^{p+k} u_{x^\mu})_{x^\gamma} - \varphi^{p+k} u_{x^{\mu+\gamma}}\| \leqslant c_{28}\|u\|_{p+k-1}^{(\varphi)},$$

因此

$$\|u\|_{p+k}^{(\varphi)} \leqslant c_{29}\left(\sum_{|\gamma|=k} \|\varphi^{p+k} u_{x^\gamma}\|_p + \|u\|_{p+k-1}^{(\varphi)}\right).$$

故由引理 14.8 得到

$$\|u\|_{p+k}^{(\varphi)} \leqslant c_{30}\Big(\sum_{|\gamma|=k}\|L_h(\varphi^{p+k}u_{x^\gamma})\| + \sum_{|\gamma|=k}\|\varphi^{p+k}u_{x^\gamma}\|_{p-1} + \|u\|_{p+k-1}^{(\varphi)}\Big). \tag{14.90}$$

又由引理 14.9 和引理 14.10，当 $|\gamma| = k$ 时，

$$\|L_h(\varphi^{p+k}u_{x^\gamma}) - \varphi^{p+k}(L_h u)_{x^\gamma}\| \leqslant c_{31}\|u\|_{p+k-1}^{(\varphi)},$$

$$\|\varphi^{p+k}u_{x^\gamma}\|_{p-1} \leqslant c_{32}\|u\|_{p+k-1}^{(\varphi)},$$

把它们代入 (14.90)，即得到

$$\|u\|_{p+k}^{(\varphi)} \leqslant c_{33}\Big(\sum_{|\gamma|=k}\|\varphi^{p+k}(L_h u)_{x^\gamma}\| + \|u\|_{p+k-1}^{(\varphi)}\Big).$$

从而由引理 14.11，

$$\|u\|_{p+k}^{(\varphi)} \leqslant c_{34}\Big(\sum_{|\gamma|=k}\|\varphi^{p+k}(L_h u)_{x^\gamma}\| + \|u\|^{(\varphi)}\Big).$$

最后，适当地选择 φ，就得到定理的结论。

应用离散形式的嵌入定理(见 (4.50) 式)，还得到下面结果：

定理 14.10 设 $\Omega^{(1)}$, $\Omega^{(2)}$, Ω 和 L_h 如定理 14.9 所示。那末，对一切 α，都存在正常数 h_0 和 c_{35}，使得当 $h \leqslant h_0$，

$$k = \max\Big(\Big[\frac{n}{2}\Big] + |\alpha| + 1 - p,\ 0\Big)$$

时，对一切 $u \in \mathscr{M}_h$，

$$\|u_{x^\alpha}\|_{\infty,\Omega^{(1)}} \leqslant c_{35}(\|L_h u\|_{k,\Omega^{(2)}} + \|u\|_{\Omega^{(2)}}).$$

Thomée (1968, 1970) 还应用离散 Green 函数建立了更精细的关于 Schauder 内点估计（见 Douglis, Nirenberg (1955)）的离散模拟．记

$$\|u\|_{\infty,k,\Omega}^{(\lambda)} = \max(\|u\|_{\infty,k,\Omega},\ \|u\|_{\infty,k,\Omega}^{(\lambda)}),$$

其中

$$\|u\|_{\infty,k,\Omega}^{(\lambda)} = \max_{x,y}\Big\{\frac{u_{x^\alpha}(x) - u_{x^\alpha}(y)}{|x-y|^\lambda},\ |\alpha| = k,\ T^\alpha x \in \bar{\Omega},\ T^\alpha y \in \bar{\Omega}\Big\}.$$

若 L_h 是在 Ω 上椭圆型的，$\Omega^{(1)} \ll \Omega^{(2)} \ll \Omega$，则对一切 k 和 $0 < \lambda < 1$，都存在正常数 h_0 和 c_{36}，使得当 $h \leqslant h_0$ 时，对一切 $u \in \mathscr{M}_h$，

$$\|u\|_{\infty,p+k,\Omega^{(1)}}^{(\lambda)} \leqslant c_{36}(\|L_h u\|_{\infty,k,\Omega^{(2)}}^{(\lambda)} + \|u\|_{\infty,\Omega^{(2)}}).$$

这就是离散形式的 Schauder 估计.

由离散形式的 Schauder 估计,可以直接得到高阶椭圆型差分格式对右端函数按最大模的稳定性,还可以用它证明微分方程解的存在性.

设 $\Omega = \{x \mid 0 < x_m < 1,\ 1 \leqslant m \leqslant n\}$, 并考虑下列 Poisson 方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta U = f, & x \in \Omega, \\ U = 0, & x \in \Gamma, \end{cases} \tag{14.91}$$

其中 $f \in C^{[\frac{n}{2}]+2}(\bar{\Omega})$, Γ 适当光滑.

今采用下列差分格式

$$\begin{cases} -\Delta_h u(x) = f(x), & x \in \Omega_h, \\ u(x) = 0, & x \in \Gamma_h. \end{cases} \tag{14.92}$$

不难验证, $-\Delta_h$ 是椭圆型差分算子,它的特征多项式是

$$P_h(\theta, x) = 2\sum_{m=1}^{n}(1 - \cos\theta_m).$$

把 (14.92)的解适当地插值为连续函数 $U_h(x)$.由定理 14.10,对任意的 $\Omega^{(1)} \ll \Omega$, $\|U_{h,x^\alpha}\|_{\infty,\Omega^{(1)}}(|\alpha| \leqslant 3)$ 对 h 一致有界,因此 $U_{h,x^\alpha}(x)(|\alpha| \leqslant 2)$ 是一致有界且等度连续的,故可选取子列 $\{U_{h_l,x^\alpha}(x)\}$, 使得它们在 $\Omega^{(1)}$ 上,分别一致收敛到连续函数 $U^{(\alpha)}(x)$, 并且 $U^{(\alpha)}(x) = D^\alpha U(x)$. 又因为 $\Omega^{(1)}$ 是任意的,故可仿照定理 14.3 的证明方法,得到函数 $U(x)$, 使得它满足 (14.91). 由极值原理, (14.91) 的解是唯一的.

定理 4.11 若 $f \in C^{[\frac{n}{2}]+2}(\bar{\Omega})$, Γ 适当光滑,那末 (14.91) 有唯一的古典解.

14.10 高阶差商的误差估计,加速收敛的局部平均法

可以应用上节的结果估计高阶差商的误差. 特别, 若把差商局部地组合起来,则可得到超收敛性.

设 Ω 是有界区域, Γ 适当光滑. L 是 p 阶椭圆型偏微分算子,其形式如同 (14.71), 并且 $a_\alpha(x) \in C^\infty(\Omega)$, $f(x) \in C^\infty(\Omega)$. 所考

虑的问题是

$$\begin{cases} LU = f, & x \in \Omega, \\ U = g, & x \in \Gamma. \end{cases} \tag{14.93}$$

根据 (14.73) 和嵌入定理，它的解 $U \in C^{\infty}(\Omega)$.

计算 (14.93) 的差分格式是

$$\begin{cases} L_h u(x) = M_h f(x), & x \in \Omega_h, \\ u(x) = g(x), & x \in \Gamma_h, \end{cases} \tag{14.94}$$

其中 L_h 是 p 阶椭圆型差分算子，M_h 是适当的线性差分算子，它对恒等算子 I 的逼近是相容的. 不妨假定，当 $h \to 0$ 时

$$\|L_h U - M_h(LU)\|_\infty = O(h^{N_1}).$$

又设 d^α 是 $|\alpha|$ 阶差商的一种组合，使得当 $h \to 0$ 时，

$$\|d^\alpha U - D^\alpha U\|_\infty = O(h^{N_2}).$$

定理 14.12 假设 $\Omega^{(1)} \ll \Omega^{(2)} \ll \Omega$，那末存在仅与 U 和 Ω 有关的正数 h_0 和 c_1，使得对一切 $h \leqslant h_0$，

$$\|d^\alpha u - D^\alpha U\|_{\infty,\Omega^{(1)}} \leqslant c_1(h^{\min(N_1,N_2)} + \|U - u\|_{\Omega^{(2)}}).$$

证明

$$\begin{aligned} \|d^\alpha u - D^\alpha U\|_{\infty,\Omega^{(1)}} &\leqslant \|d^\alpha U - D^\alpha U\|_{\infty,\Omega^{(1)}} + \|d^\alpha U - d^\alpha u\|_{\infty,\Omega^{(1)}} \\ &\leqslant \|d^\alpha U - d^\alpha u\|_{\infty,\Omega^{(1)}} + c_2 h^{N_2}. \end{aligned}$$

根据定理 14.10，当 $k = \max\left(\left[\frac{n}{2}\right] + |\alpha| + 1 - p,\ 0\right)$ 时，

$$\|d^\alpha U - d^\alpha u\|_{\infty,\Omega^{(1)}} \leqslant c_3(\|L_h(U - u)\|_{k,\Omega^{(2)}} + \|U - u\|_{\Omega^{(2)}}).$$

另一方面，

$$L_h(U - u) = L_h U - M_h f = L_h U - M_h(LU).$$

由 Taylor 展开式得到

$$(L_h U - M_h(LU))_{x^\alpha} = O(h^{N_1}),$$

因此

$$\|L_h(U - u)\|_{k,\Omega^{(2)}} \leqslant c_4 h^{N_1}.$$

注记 14.3 若 $\|U - u\|_{\Omega^{(2)}} = O(h^{N_3})$，则

$$\|d^\alpha u - D^\alpha U\|_{\infty,\Omega^{(1)}} = O(h^{\min(N_1,N_2,N_3)}).$$

若 $d^\alpha = I$，则还有

$$\|U - u\|_{\infty,\Omega^{(1)}} = O(h^{\min(N_1,N_3)}).$$

下面举几个例子来说明定理 14.12 的应用。

例 14.3 设 $a_l(x) > a > 0$, $l = 1, 2$, 并考虑下列问题

$$\begin{cases} -a_1(x)\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} - a_2(x)\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = f(x), & x \in \Omega, \\ U(x) = g(x), & x \in \Gamma. \end{cases}$$

逼近它的差分格式是

$$\begin{cases} L_h u(x) = M_h f(x), & x \in \Omega_h, \\ u(x) = g(x), & x \in \Gamma_h, \end{cases}$$

其中当 $x \in \Omega'_h$ 时

$$\begin{aligned} L_h u(x) = &-\left\{a_1(x) + \frac{h^2}{12}\left[\Delta a_1(x) - 2a_1^{-1}(x)\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\right)^2\right.\right. \\ &\left.\left.- 2a_2^{-1}(x)\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_2}\right]\right\} u_{x_1\bar{x}_1}(x) \\ &-\left\{a_2(x) + \frac{h^2}{12}\left[\Delta a_2(x) - 2a_2^{-1}(x)\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_2}\right)^2\right.\right. \\ &\left.\left.- 2a_1^{-1}(x)\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\right]\right\} u_{x_2\bar{x}_2}(x) \\ &- \frac{h^2}{6}\left[\frac{\partial a_1}{\partial x_2} - a_2^{-1}(x)a_1(x)\frac{\partial a_2}{\partial x_2}\right] u_{x_1\bar{x}_1\hat{x}_2}(x) \\ &- \frac{h^2}{6}\left[\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - a_1^{-1}(x)a_2(x)\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\right] u_{x_2\bar{x}_2\hat{x}_1}(x) \\ &- \frac{h^2}{12}(a_1(x) + a_2(x))u_{x_1\bar{x}_1x_2\bar{x}_2}(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_h f(x) = f(x) + \frac{h^2}{12}\Big(&\Delta_h f(x) - 2a_1^{-1}(x)\frac{\partial a_1}{\partial x_1} f_{\hat{x}_1}(x) \\ &- 2a_2^{-1}(x)\frac{\partial a_2}{\partial x_2} f_{\hat{x}_2}(x)\Big). \end{aligned}$$

它的逼近精度是 $O(h^4)$. 尤其当 $a_1(x) \equiv 1$, $a_2(x) \equiv 1$ 时，它就是著名的九点格式. 又在 Ω_h^* 上，采用适当的较低阶的差分格式，于是可仿 § 14.2 的方法证明: $\|U - u\|_\infty = O(h^4)$.

L_h 是椭圆型差分算子，它的特征多项式是

$$P_h(\theta, x) = 2a_1(x)(1 - \cos\theta_1)\left(1 - \frac{1}{6}(1 - \cos\theta_2)\right)$$

$$+ 2a_2(x)(1 - \cos\theta_2)\left(1 - \frac{1}{6}(1 - \cos\theta_1)\right).$$

如果 $d^\alpha U(x)$ 对 $D^\alpha U(x)$ 的逼近误差是 $O(h^4)$，那末根据定理 14.12，$d^\alpha u(x)$ 对 $D^\alpha U(x)$ 的误差也是 $O(h^4)$.

例 14.4 设 $a_l(x) \geqslant a > 0$，$l = 1, 2$，并考虑下列问题

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(a_1(x)\dfrac{\partial U}{\partial x_1}\right) - \dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(a_2(x)\dfrac{\partial U}{\partial x_2}\right) = f(x), & x \in \Omega, \\ U = g(x), & x \in \Gamma. \end{cases}$$

其差分格式是

$$\begin{cases} L_h u(x) = -\left(a_1\left(x + \dfrac{h}{2}e_1\right)u_{x_1}(x)\right)_{\bar{x}_1} \\ \qquad\qquad - \left(a_2\left(x + \dfrac{h}{2}e_2\right)u_{x_2}(x)\right)_{\bar{x}_2} = f(x), & x \in \Omega_h, \\ u(x) = g(x), & x \in \Gamma_h. \end{cases}$$

设 Ω 是长方形，则当 $x \in \Gamma_h$ 时，$U(x) - u(x) = 0$. 故可仿 §14.8 中的方法证明 $|U - u|_1 = O(h^2)$，并由此得到 $\|U - u\| = O(h^2)$.

L_h 的主部是

$$\tilde{L}_h u(x) = -a_1(x)u_{x_1\bar{x}_1}(x) - a_2(x)u_{x_2\bar{x}_2}(x),$$

其特征多项式为

$$P_h(\theta, x) = 2a_1(x)(1 - \cos\theta_1) + 2a_2(x)(1 - \cos\theta_2),$$

因此 L_h 是椭圆型的. 如果 $d^\alpha U(x)$ 对 $D^\alpha U(x)$ 的逼近误差是 $O(h^2)$，那么 $d^\alpha U(x)$ 对 $D^\alpha U(x)$ 的误差也是 $o(h^2)$. 特别，若 $d^\alpha u(x) = u_{\hat{x}_m}(x)$，那末，对一切 $x \in \Omega^{(1)} \Subset \Omega$，

$$\left|u_{\hat{x}_m}(x) - \frac{\partial U}{\partial x_m}(x)\right| = O(h^2).$$

例 14.5 设 $x \in \mathscr{R}^n$，$a_{\sigma\gamma}(x)$ 组成一个正定对称矩阵，并考虑下列问题

$$\begin{cases} -\sum_{\alpha,\gamma=1}^{n} a_{\alpha\gamma}(x)\dfrac{\partial^2 U(x)}{\partial x_\alpha \partial x_\gamma} = f(x), & x\in\Omega, \\ U(x)=g(x), & x\in\Gamma. \end{cases}$$

其差分格式是

$$\begin{cases} L_h u(x) = -\sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha\alpha}(x) u_{x_\alpha \bar{x}_\alpha}(x) \\ \qquad -\sum_{\alpha\neq\gamma} a_{\alpha\gamma} u_{\hat{x}_\alpha \hat{x}_\gamma}(x) = f(x), & x\in\Omega_h, \\ u(x)=g(x), & x\in\Gamma_h. \end{cases}$$

假设当 $x\in\Gamma_h$ 时，$U(x)\equiv u(x)$，则可仿 § 14.8 中的方法证明 $|U-u|_1 = O(h^2)$，$\|U-u\| = O(h^2)$. Thomée (1964) 证明了 L_h 是椭圆型差分算子，所以对一切 $x\in\Omega_h$，

$$\left| u_{\hat{x}_m}(x) - \frac{\partial U}{\partial x_m}(x) \right| = O(h^2).$$

Thomée, Westergren (1968) 还举出了高阶方程的例子. 关于加速收敛的方法还可见 Марчук, Шаидуров (1979) 的著作.

14.11 舍入误差的概率估计

前面的各种误差估计都似乎过于悲观，因为即使舍入误差处处同号，上面的估计也成立. 假设边值是已知的，点 $x\in\Omega_h$ 已被排列为 $x^{(l)}$，$1\leqslant l\leqslant N$，$u_l = u(x^{(l)})$，差分格式是

$$(Au)_l = f_l, \qquad 1\leqslant l\leqslant N,$$

其中 A 是 $N\times N$ 阶矩阵，并假定存在对称正定的逆矩阵 A^{-1}，它的特征值是

$$o < \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_N.$$

用 $\tilde{u}(x)$ 和 $\tilde{f}(x)$ 表示 $u(x)$ 和 $f(x)$ 的误差. 按通常估计方法有

$$\|\tilde{u}\| \leqslant \mu_N \|\tilde{f}\|. \tag{14.95}$$

现在采用概率方法来估计误差. 假定每个 $\tilde{f}_l$ 都是正态分布的独立随机变量，其数学期望是 $E(\tilde{f}_l)=0$，方差是 σ^2. 令

$$\xi = \sigma^{-2}\|\tilde{f}\|^2 = \sigma^{-2}\sum_{l=1}^{N} \tilde{f}_l^2,$$

则 ξ 是具有 N 个自由度的 χ^2 分布，因此 $E(\xi)=N$，其方差是 $2N$.（见 Wilks (1943)）. 此外，当 $N>50$ 时，ξ 几乎是正态分布的，故以大于 0.997 的概率成立

$$N-3\sqrt{2N}\leqslant\sigma^{-2}\|\tilde{f}\|^2\leqslant N+3\sqrt{2N},$$

或者

$$\sqrt{N}\left(1-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{N}}\right)\leqslant\sigma^{-1}\|\tilde{f}\|^2\leqslant\sqrt{N}\left(1+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{N}}\right),$$

并由此得到

$$\sigma(\sqrt{N}-2.2)\leqslant\|\tilde{f}\|\leqslant\sigma(\sqrt{N}+2.2). \qquad (14.96)$$

又由于 $\tilde{u}=A^{-1}\tilde{f}$，所以当 $N>50$ 时，以大于 0.997 的概率成立

$$\|\tilde{u}\|_{\bar{\Omega}_h}\leqslant\mu_N\|\tilde{f}\|\leqslant\mu_N\sigma(\sqrt{N}+2.2). \qquad (14.97)$$

如果对 $\tilde{u}$ 也进行概率处理，则可进一步改进结果. 事实上

$$\tilde{u}_i=\sum_{j=1}^{N}A_{ij}^{-1}\tilde{f}_j,$$

$$E(\tilde{u}_i)=\sum_{j=1}^{N}A_{ij}^{-1}E(\tilde{f}_j)=0,$$

$$E(\tilde{u}_i^2)=\sum_{j=1}^{N}(A_{ij}^{-1})^2E(\tilde{f}_j^2)=\sigma^2\sum_{j=1}^{N}(A_{ij}^{-1})^2.$$

记 $v^2=\sum_{i,j=1}^{N}(A_{ij}^{-1})^2$，则有

$$E(\|\tilde{u}\|^2)=E\left(\sum_{i=1}^{N}\tilde{u}_i^2\right)=\sigma^2v^2. \qquad (14.98)$$

因为 v^2 是 $(A^{-1})^*A^{-1}=(A^{-1})^2$ 的迹，所以还有

$$v=\left(\sum_{i=1}^{N}\mu_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

例 14.6 设网格步长 $h=\frac{\pi}{J}$，$\Omega_h=\{x\,|\,h\leqslant x_m\leqslant\pi-h,\ m=1,2\}$，差分格式是

$$\begin{cases}-\Delta_h u(x)=f(x), & x\in\Omega_h,\\ u(x)=0, & x\in\Gamma_h.\end{cases}$$

显然，在 Ω_h 内共有 $(J-1)^2$ 个网格点. $-\Delta_h^{-1}$ 所对应的矩阵的特征值是

$$\mu_{pq}=\frac{h^2}{4}\left(\sin^2\frac{ph}{2}+\sin^2\frac{qh}{2}\right)^{-1},\qquad 1\leqslant p,\ q\leqslant J-1.$$

如果 h 适当小，那末

$$\frac{h^2}{8}\leqslant\mu_{pq}\leqslant\frac{1}{2}+\varepsilon,$$

其中 ε 也是适当小的正数. 又有

$$\nu^2=\sum_{p,q=1}^{J-1}\frac{h^4}{\left(4\sin^2\frac{ph}{2}+4\sin^2\frac{qh}{2}\right)^2}.$$

容易证明，当 h 适当小时，

$$\nu^2=\sum_{p,q=1}^{J-1}\frac{h^4}{[(ph)^2+(qh)^2]^2}+O(h^4)$$

$$\approx\sum_{p,q=1}^{\infty}\frac{1}{(p^2+q^2)^2}.$$

因此

$$\lim_{h\to 0}\nu^2=\frac{1}{(1+1)^2}+\frac{1}{(1+4)^2}+\cdots$$

$$+\frac{1}{(1+16)^2}+\cdots+R,$$

其中

$$R\leqslant\iint\limits_{\substack{x_1^2+x_2^2>4\\ x_1,x_2>0}}\frac{dx_1dx_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}=\frac{\pi}{68}<0.04620.$$

所以

$$\lim_{h\to 0}\nu^2=0.39862+0.04620\,\theta,\qquad 0<\theta<1.$$

把它代入 (14.98)，就得到

$$\sqrt{E(\|\tilde{u}\|^2)}\approx 0.65\sigma.$$

又由 (14.96)，$\sigma\approx\frac{\|\tilde{f}\|}{J}$，所以

$$\sqrt{E(\|\tilde{u}\|^2)}\approx\frac{0.65\|\tilde{f}\|}{J}.$$

如果采用(14.97)来估计，则由 $\mu_N \approx \frac{J}{2}$ 得到

$$\|\tilde{u}\| \leqslant \frac{1}{2}\|\tilde{f}\|.$$

因此，对 u 和 f 同时进行概率处理后，其误差界减小了 J 倍.

Абрамов (1953) 还给出了另一种概率估计方法.

§ 15 基于变分和其它原理的方法

本节讨论建立椭圆型方程边值问题计算格式的一些其它方法. 众所周知，许多椭圆型方程或不等方程的边值问题，在一定意义下等价于一个有约束或无约束的变分问题，因此可以基于变分原理建立各种格式. 本节介绍了有限元方法和 Соболев 空间插值理论的基本知识，它们是应用变分原理建立计算格式的基本工具. 接着，依次叙述了基于 Галеркин 方法和 Петров-Галеркин 方法的格式，后者更适用于奇异摄动问题. 本节还介绍了广义差分法和最小二乘法，它们都有各自的优点. 又简单地叙述了解椭圆型不等方程的 Галеркин 方法. 此外，还略述了 Schwarz 方法，它有利于平行计算，在本节的最后一部分中，将介绍配置法，边界积分法和边界值逼近法，前者往往导致超收敛性，后两者则节省了工作量.

15.1 椭圆型方程和不等方程的变分形式

设 V 是 Banach 空间，其范数是 $\|v\|_V$，K 是 V 中的非空子集. $a(v, w)$ 是 $V \times V$ 上的双线性连续泛函. $F(v)$ 是 V 上的线性连续泛函. 今考虑下列极小化问题

$$J(U) = \min_{v \in K} J(v), \tag{15.1}$$

其中

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - F(v).$$

定理 15.1 若 K 是 V 中的闭凸子集，$a(v, w)$ 是对称的，并且是

V 椭圆的，也就是说，存在正常数 a_0，使得

$$a(v, v) \geqslant a_0\|v\|_V^2, \qquad \forall v \in V,$$

那末，问题 (15.1) 有唯一解 U，并由下列不等式所决定

$$a(U, w - U) \geqslant F(w - U), \qquad \forall w \in K. \qquad (15.2)$$

特别，若 K 是一个顶点在原点的凸锥，则由下式来决定 U，

$$\begin{cases} a(U, w) \geqslant F(w), & \forall w \in K, \\ a(U, U) = F(U). \end{cases} \qquad (15.3)$$

若 K 是子空间，则有

$$a(U, w) = F(w), \qquad \forall w \in K. \qquad (15.4)$$

证明 双线性连续泛函 $a(v, w)$ 是 V 的内积. 根据 V 椭圆性条件，由它所决定的范数与原来的范数 $\|\cdot\|_V$ 是等价的，并构成一个 Hilbert 空间. 由 Riesz 表现定理，存在 $\tau F \in V$，使得 $F(w) = a(\tau F, w)$，从而由 $a(v, w)$ 的对称性得到

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2} a(v, v) - a(\tau F, v) \\ &= \frac{1}{2} a(v - \tau F, v - \tau F) - \frac{1}{2} a(\tau F, \tau F). \end{aligned}$$

因此，求解问题 (15.1) 等价于在集合 K 中，按范数 $\sqrt{a(v, v)}$ 的意义，找与 τF 的距离为极小的元素 U，而 U 恰为 τF 在 K 上按内积 $a(v, w)$ 的投影. 因为 K 是 V 的闭凸子集，故根据投影定理，这样的 U 是唯一存在的.

根据投影的性质，

$$a(\tau F - U, w - U) \leqslant 0, \qquad \forall w \in K.$$

它又可写成

$$F(w - U) = a(\tau F, w - U) \leqslant a(U, w - U), \qquad \forall w \in K.$$

这就证明了 (15.2).

下面假定 K 是一个以原点为顶点的闭凸锥. 若 $w \in K$，则 $U + w \in K$. 把 (15.2) 中的 w 代以 $U + w$，则得到

$$a(U, w) \geqslant F(w), \qquad \forall w \in K,$$

从而证明了 (15.3) 的第一式. 又在 (15.2) 中令 $w = 0$，则

$$a(U, U) \leqslant F(U).$$

再在 (15.3) 的第一式中令 $w = U$，则

$$a(U, U) \geqslant F(U).$$

结合以上两式就得到了 (15.3) 的第二式．反之，若把 (15.3) 中的两式相减，即推得 (15.2)．

如果 K 是子空间，则 (15.3) 的第一式对 w 和 $-w$ 都成立，因此

$$\begin{cases} a(U, w) \geqslant F(w), \\ a(U, w) \leqslant F(w), \end{cases}$$

所以 U 满足 (15.4)．反之，(15.4) 蕴含了 (15.3)．

注记 15.1　若 $a(v, w)$ 是非对称的，那末，相应的变分问题解的存在性仍然成立，但不再是极小化问题，可见 Lions, Stampacchia (1967) 的论著．

下面考虑 $K = V$ 的情况．Lax-Milgram (1954) 证明了下列结果：

定理 15.2　如果 V 是实 Hilbert 空间，$a(v, w)$ 是 $V \times V$ 上的双线性连续泛函，并且是 V 椭圆的，$F(w)$ 是线性连续泛函，那末，下列变分问题

$$a(U, w) = F(w), \quad \forall\ w \in V. \tag{15.5}$$

存在唯一解．

证明　假定 a_1, c_1 是两个正常数，使得

$$|a(v, w)| \leqslant a_1 \|v\|_V \|w\|_V,$$

$$|F(w)| \leqslant c_1 \|w\|_V.$$

对于任意的 $w \in V$，$a(v, w)$ 是 V 上的线性连续泛函，所以存在元素 $\mathscr{A} v \in V'$，使得

$$a(v, w) = \mathscr{A} v(w), \quad \forall\ w \in V, \tag{15.6}$$

其中 V' 是 V 的共轭空间．因为

$$\|\mathscr{A} v\|_{V'} = \sup_{w \in V} \frac{|\mathscr{A} v(w)|}{\|w\|_V} \leqslant a_1 \|v\|_V,$$

所以 $\mathscr{A}$ 是连续算子，并且 $\|\mathscr{A}\| \leqslant a_1$．

用 τ 表示从 V' 到 V 的算子，它定义为

$$F(w)=(\tau F, w)_V, \quad \forall F\in V', \ w\in V, \tag{15.7}$$
那末，(15.5) 又等价于下列算子方程
$$\tau \mathscr{A} U=\tau F. \tag{15.8}$$
现在来证明 (15.8) 有唯一解. 设 ρ 是正常数，并定义从 V 到 V 的算子 σ，
$$\sigma w=w-\rho(\tau \mathscr{A} w-\tau F).$$
可以证明，σ 有一个不动点. 事实上，由 (15.6) 得到
$$(\tau \mathscr{A} w, w)_V=\mathscr{A} w(w)=a(w, w)\geqslant a_0\|w\|_V^2.$$
又有
$$\|\tau \mathscr{A} w\|_V=\|\mathscr{A} w\|_{V'}\leqslant\|\mathscr{A}\|\|w\|_V\leqslant a_1\|w\|_V,$$
因此
$$\begin{aligned}\|w-\rho\tau \mathscr{A} w\|_V^2&\leqslant\|w\|_V^2-2\rho(\tau \mathscr{A} w, w)_V+\rho^2\|\tau \mathscr{A} w\|_V^2\\&\leqslant(1-2\rho a_0+\rho^2 a_1^2)\|w\|_V^2.\end{aligned}$$
今选取 $\rho\in\left(0, \dfrac{2a_0}{a_1^2}\right)$，则上式右端的系数小于 1. 因此 σ 是压缩算子，它具有一个不动点，从而 (15.8) 有唯一解.

问题 (15.5) 是适定的，因为
$$a_0\|U\|_V^2\leqslant a(U, U)=F(U)\leqslant\|F\|_{V'}\|U\|_V,$$
所以
$$\|U\|_V\leqslant\frac{\|F\|_{V'}}{a_0}.$$

Babuška, Aziz (1972) 推广了 Lax-Milgram 定理. 下面假定 V_1 和 V_2 是两个实 Hilbert 空间，$a(v, w)$ 是 $V_1\times V_2$ 上的双线性泛函，$F(w)$ 是 V_2 上的线性连续泛函，并考虑下列问题
$$a(U, w)=F(w), \qquad \forall w\in V_2. \tag{15.9}$$
定理 15.3 如果下列条件满足

(i) $|a(v, w)|\leqslant a_1\|v\|_{V_1}\|w\|_{V_2}, \qquad \forall v\in V_1, \ w\in V_2,$

(ii) $\inf\limits_{v\in V_1}\sup\limits_{w\in V_2}\dfrac{a(v, w)}{\|v\|_{V_1}\|w\|_{V_2}}\geqslant a_0>0,$

(iii) $\sup\limits_{v\in V_1}|a(v, w)|>0, \qquad \forall w\neq 0, \ w\in V_2,$

那末，(15.9) 有唯一解 U，并且

$$\|U\|_{V_1} \leqslant \frac{1}{a_0}\|F\|_{V_2'}. \tag{15.10}$$

证明 共分五步进行.

首先,根据条件(i),对任意的 $v \in V_1$, $a(v,w)$是 V_2 上的线性连续泛函,因此存在从 V_1 到 V_2 的算子 $\mathscr{A}$, 使得 $\mathscr{A} v \in V_2$, 并且

$$a(v, w) = (\mathscr{A} v, w)_{V_2}, \qquad \|\mathscr{A}\| \leqslant a_1.$$

其次证明, $\mathscr{A}(V_1)$ 是 V_2 中的一个闭集.事实上,由条件(ii),

$$\|\mathscr{A} v\|_{V_2} = \sup_{\substack{w \in V_2 \\ \|w\|_{V_2} \leqslant 1}} |(\mathscr{A} v, w)_{V_2}| = \sup_{\substack{w \in V \\ \|w\|_{V_2} \leqslant 1}} |a(v, w)|$$

$$\geqslant a_0\|v\|_{V_1}.$$

假设 $\{\mathscr{A} v^{(l)}\}$ 是 V_2 中的一个 Cauchy 序列,则由上式得到

$$\|\mathscr{A} v^{(l)} - \mathscr{A} v^{(l')}\|_{V_2} = \|\mathscr{A}(v^{(l)} - v^{(l')})\|_{V_2} \geqslant a_0\|v^{(l)} - v^{(l')}\|_{V_1},$$

因此 $\{v^{(l)}\}$ 也是一个 Cauchy 序列,这就证明了 $\mathscr{A}(V_1)$ 是 V_2 中的一个闭集.

第三,证明 $\mathscr{A}(V_1) = V_2$. 若不然,则由于 $\mathscr{A}(V_1)$ 是 V_2 中的闭子空间,因此存在 $w_0 \in V_2$, $w_0 \neq 0$, 使得

$$(\mathscr{A} v, w_0)_{V_2} = 0, \qquad \forall v \in V_1.$$

但由条件(iii),存在 $v_0 \in V_1$, 使得

$$|(\mathscr{A} v_0, w_0)_{V_2}| = |a(v_0, w_0)| > 0,$$

这显然是矛盾的.

第四,由于 $\mathscr{A}(V_1) = V_2$,所以对任意的 $w \in V_2$,必有 $v \in V_1$,使得 $\mathscr{A} v = w$, 并且

$$\|v\|_{V_1} \leqslant \frac{1}{a_0}\|\mathscr{A} v\|_{V_2} = \frac{1}{a_0}\|w\|_{V_2},$$

所以存在逆算子 $\mathscr{A}^{-1}$, 并且 $\|\mathscr{A}^{-1}\| \leqslant \dfrac{1}{a_0}$.

最后,根据 Riesz 定理,对任意的 $F \in V_2'$, 必存在 $w_1 \in V_2$, 使得

$$(w_1, w)_{V_2} = F(w), \qquad \forall w \in V_2,$$

其中 $\|w_1\|_{V_2} = \|F\|_{V_2'}$. 记 $U = \mathscr{A}^{-1} w_1$, 则 $U \in V_1$, $w_1 = \mathscr{A} U$, 亦即

$$a(U, w) = F(w), \qquad \forall w \in V_2,$$

从而 (15.9) 是有解的，其唯一性是显然的．

下面举例说明前面几个变分问题与椭圆型方程和不等方程的关系．假定 $x \in \mathscr{R}^n$，Ω 是有界区域，其边界是 Lipschitz 连续的．

例 15.1 设 $V = K = H_0^1(\Omega)$，$d \in L^\infty(\Omega)$，并且在 Ω 上几乎处处有 $d \geqslant 0$，$f \in L^2(\Omega)$．又定义

$$a(v, w) = \int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla w + dvw)dx,$$

$$F(w) = \int_\Omega fwdx.$$

因为 $d \geqslant 0$，所以 $a(v, w)$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 椭圆的．根据定理 15.1，存在唯一的函数 $U \in H_0^1(\Omega)$，使得

$$J(U) = \min_{v \in H_0^1} J(v),$$

或者等价地有

$$\int_\Omega (\nabla U \cdot \nabla w + dUw)dx = \int_\Omega fwdx, \qquad \forall w \in H_0^1(\Omega). \tag{15.11}$$

因为无限光滑，有限支集函数的空间属于 $H_0^1(\Omega)$，因此，我们已解决了如下问题，即找一个函数 $U \in H_0^1(\Omega)$，使得它在广义函数的意义下满足

$$-\Delta U + dU = f, \qquad x \in \Omega. \tag{15.12}$$

如果 U, d 和 f 足够光滑，U 在 Γ 上为零，那末上式在古典意义下也成立．反之，根据 Green 公式，可由上式推出 (15.11)．因此，(15.11)至少在形式上等价于下列 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta U + dU = f, & x \in \Omega, \\ U = 0, & x \in \Gamma. \end{cases} \tag{15.13}$$

通常把 (15.11) 的解理解为 (15.12) 的广义解． 如果 $U(x)$ 足够光滑，那末它等价于古典解．

如果 $V = H^1(\Omega)$，$K = \{v \in H^1(\Omega),\ v - U_0 \in H_0^1(\Omega)\}$，其中 $U_0 \in H^1(\Omega)$，它在 Γ 上的迹是 $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$，$a(v, w)$，$f(w)$ 的定

义同前，那末，仍可证明（见冯康（1975）），存在唯一的 $U\in K$，使得

$$J(U)=\min_{v\in K}J(v),$$

或者等价地有 $U\in K$，

$$\int_\Omega(\nabla U\cdot\nabla w+dUw)dx=\int_\Omega fwdx,\qquad\forall w\in K. \tag{15.14}$$

它又形式地等价于下列 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}-\Delta U+dU=f, & x\in\Omega,\\ U=g, & x\in\Gamma.\end{cases} \tag{15.15}$$

例 15.2 设 $V=K=H^1(\Omega)$，$d\in L^\infty(\Omega)$，并存在正常数 d_0，使得在 Ω 上几乎处处有 $d\geqslant d_0$，$f\in L^2(\Omega)$，$a(v,w)$ 和 $F(w)$ 的形式如同例 15.1 中所示。因为对一切 $v\in H^1(\Omega)$，

$$a(v,v)\geqslant\min\{1,d_0\}\|v\|^2_{H^1(\Omega)},$$

所以 $a(v,w)$ 是 $H^1(\Omega)$ 椭圆的。根据定理 15.1，存在唯一的函数 $U\in H^1(\Omega)$，它在 $H^1(\Omega)$ 上极小化泛函 $J(v)$，或者等价地有

$$\int_\Omega(\nabla U\cdot\nabla w+dUw)\,dx=\int_\Omega fwdx,\qquad\forall w\in H^1(\Omega). \tag{15.16}$$

因此，它至少在广义函数意义下满足 (15.12)。

如果 $U\in H^2(\Omega)$，则由 Green 公式得到

$$\int_\Omega(-\Delta U+dU)wdx+\int_\Gamma\frac{\partial U}{\partial n}wdS=\int_\Omega fwdx,\quad\forall w\in H^1(\Omega).$$

因此在 $L^2(\Omega)$ 意义下成立 (15.12)，并且对一切 $w\in H^1(\Omega)$，

$$\int_\Gamma\frac{\partial U}{\partial n}wdS=0,$$

故有 $\dfrac{\partial U}{\partial n}=0$。这样，(15.16) 形式地等价于下列 Von Neumann 问题

$$\begin{cases}-\Delta U+dU=f, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial U}{\partial n}=0, & x\in\Gamma.\end{cases}$$

如果 V，K，d，f 和 $a(v,w)$ 的意义同上，$g\in L^2(\Gamma)$，

$$F(w) = \int_\Omega fw dx + \int_\Gamma gw dS,$$

那末，这时的极小化问题的解形式地等价于下列问题的解

$$\begin{cases} -\Delta U + dU = f, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial U}{\partial n} = g, & x \in \Gamma. \end{cases}$$

若 $d \equiv 0$，则同样可以找到相应的极小化问题，使得它的解恰为上式的解（可见冯康（1965）），但此时要求满足补充条件

$$\int_\Omega f dx + \int_\Gamma g dS = 0.$$

例 15.3 假设 $\Gamma = \Gamma^{(1)} \cup \Gamma^{(2)}$, $\text{meas}(\Gamma^{(1)}) > 0$, $V = \{v \in H^1(\Omega) | v = 0, \text{ 在 } \Gamma^{(1)} \text{ 上}\}$. $v_{lm} \in L^\infty(\Omega)$, $d \in L^\infty(\Omega)$, 并且在 Ω 上几乎处处有 $d \geqslant 0$, $f \in L^2(\Omega)$. 又设存在正常数 v_0, 使得在 Ω 上几乎处处满足

$$\sum_{l,m=1}^{n} v_{lm} \xi_l \xi_m \geqslant v_0 \sum_{m=1}^{n} \xi_m^2,$$

其中 ξ_m 是任意实数. 定义

$$a(v, w) = \int_\Omega \left[\sum_{l,m=1}^{n} v_{ml} \frac{\partial U}{\partial x_l} \frac{\partial w}{\partial x_m} + dvw \right] dx,$$

$$F(w) = \int_\Omega fw dx.$$

因为 $\text{meas}(\Gamma^{(1)}) > 0$, 所以 $|v|_{H^1(\Omega)}$ 等价于 $\|v\|_{H^1(\Omega)}$. 根据定理 15.2, 相应的变分问题有唯一解 $U \in V$, 而且形式地等价于下列混合边值问题的解

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{l,m=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_m}\left(v_{ml} \frac{\partial U}{\partial x_l}\right) + dU = f, & x \in \Omega, \\ U = 0, & x \in \Gamma^{(1)}, \\ \dfrac{\partial U}{\partial n_A} = 0, & x \in \Gamma^{(2)}, \end{cases}$$

其中 $\dfrac{\partial}{\partial n_A}$ 是伴随法向导算子，即

$$\frac{\partial}{\partial n_A}U=\sum_{l,m=1}^{n}v_{ml}\ n_m\frac{\partial U}{\partial x_l}.$$

有关的材料可见 Lions (1962), Agmon (1965), Nečas (1967), Lions, Magenes (1968) 等人的论著.

在弹性力学中,经常遇到各种类型的变分问题,它们所对应的椭圆型方程可能是二阶,也可能是四阶的,可参见Ландау, Лифшиц (1965), Duvaut, Lions (1972), Fichera (1972a, b) 等人的文献.

例 15.4 考虑一个厚度为 e 的平板在垂直外力作用下的平衡位置 $U(x)$, 设单位面积上力的密度是 $\bar{f}$,

$$\bar{f}=\frac{Ee^3}{12(1-\sigma^2)}f,\qquad E=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu},\qquad \sigma=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)},$$

其中 λ, μ 是 Lamé 系数, E 和 σ 分别是 Young 模量和 Poisson 系数. 假定当 $f=0$ 时,平板的偏移 $U(x)=U(x_1, x_2)=0$. 此外,平板是刚性固定的. 于是,在一些近似假定下, $U(x)$ 是平板能量 $J(v)$ 的极小化问题的解,即

$$J(U)=\min_{v\in H_0^2(\Omega)}J(v),$$

其中

$$J(v)=\frac{1}{2}a(v,\ v)-F(v),$$

$$a(v,\ w)=\int_\Omega\left\{\Delta v\Delta w+(1-\sigma)\left(2\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)\right\}dx,$$

$$F(w)=\int_\Omega fwdx,\qquad f\in L^2(\Omega).$$

因为 $0<\sigma<\frac{1}{2}$, 所以 $a(v,\ w)$ 是 $H_0^2(\Omega)$ 椭圆的. 根据定理 15.1, 极小化问题的解 U 是唯一存在的, 并且满足相应的变分公式, 或者根据 Green 公式, 这个问题形式地等价于下列四阶方程的边值问题

$$
\begin{cases}
\Delta^2 U = f, & x \in \Omega, \\
U = \dfrac{\partial U}{\partial n} = 0, & x \in \Gamma.
\end{cases}
$$

下面再举一些变分不等式的例子，关于这一问题的系统理论研究是以 Fichera (1964) 开始的.

例 15.5 障碍问题. 设 $n=2$，非负函数 $G(x)$ 表示物体表面. 今有张紧的薄膜绷在物体表面上，并负有载荷 $f(x)$. 在边界 Γ 上，薄膜是固定的. 用 $U(x)$ 表示薄膜的位移，那末

$$
\begin{cases}
U(x) \geqslant G(x), & x \in \Omega, \\
U(x) = 0, & x \in \Gamma.
\end{cases}
$$

令 $V = H_0^1(\Omega)$, $K = \{v \in H_0^1(\Omega) / v(x)|_{\Omega} \geqslant G(x)\}$,

$$
J(v) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} (|\nabla v|^2 - 2fv)dx,
$$

那末，根据位能原理，小变形薄膜的平衡问题解满足

$$
J(U) = \min_{v \in K} J(v). \tag{15.17}
$$

根据定理 15.1, $U(x)$ 满足

$$
\int_{\Omega} \nabla U \cdot \nabla(w - U)dx \geqslant \int_{\Omega} f(w - U)dx, \qquad \forall w \in K.
$$

上式又形式地等价于不等方程问题. 事实上由 Green 公式得到

$$
\int_{\Omega} (\Delta U + f)(U - w)dx \geqslant 0, \qquad \forall w \in K. \tag{15.18}
$$

由于w是K中的任意函数，所以当 $x \in \Omega$ 时，$-\Delta U \geqslant f$. 又在 (15.18) 中取 $w = G$，则推得 $(\Delta U + f)(U - G) = 0$，最后得到下列边值问题

$$
\begin{cases}
-\Delta U(x) \geqslant f(x), & x \in \Omega, \\
U(x) \geqslant G(x), & x \in \Omega, \\
(\Delta U(x) + f(x))(U(x) - G(x)) = 0, & x \in \Omega, \\
U(x) = 0, & x \in \Gamma.
\end{cases}
$$

若令 $\Omega = \Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}$,则又可把上述问题化为下列待定分界线的双相问题

$$\begin{cases} -\Delta U(x) \geqslant f(x),\ U(x) = G(x), & x \in \Omega^{(1)}, \\ -\Delta U(x) = f(x),\ U(x) > G(x), & x \in \Omega^{(2)}, \\ U(x) = 0, & x \in \Gamma. \end{cases}$$

例 15.6 单向性边界条件问题. 设 $n = 2$, $U(x)$ 是Ω内的温度场, f 是热源,热传导系数为 1. $\Gamma = \Gamma^{(1)} \cup \Gamma^{(2)}$, 在 $\Gamma^{(1)}$ 上的外侧温度是 g_1, 但不高于内侧温度. 又因为材料的特定性质或由于自控装置,热量只能内流,所以 $\dfrac{\partial U}{\partial n} \geqslant 0$. 显然,当 $U > g_1$ 时,只能是 $\dfrac{\partial U}{\partial n} = 0$. 而当 $\dfrac{\partial U}{\partial n} > 0$ 时, 若边界薄膜厚度为无限小, 则 $U = g_1$. 此外,在 $\Gamma^{(2)}$ 上,假定有热传导. 于是, 得到下列不等方程的边值问题

$$\begin{cases} -\Delta U(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ U(x) \geqslant g_1(x),\ \dfrac{\partial U(x)}{\partial n} \geqslant 0,\ (U(x) - g_1(x))\ \dfrac{\partial U(x)}{\partial n} = 0, & \\ & x \in \Gamma^{(1)}, \\ \dfrac{\partial U(x)}{\partial n} = g_2(x), & x \in \Gamma^{(2)}. \end{cases}$$

假设 $f \in L^2(\Omega)$, $g_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $g_2 \in L^2(\Gamma)$, 并令 $V = H^1(\Omega)$, $K = \{v \in H^1(\Omega) / v(x)|_{\Gamma^{(1)}} \geqslant g_1(x)\}$. 又记

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla v|^2 - 2fv)\,dx - \int_{\Gamma^{(2)}} g_2 v\,dS,$$

那末,上述不等方程的边值问题,转化为下列极小化问题

$$J(U) = \min_{v \in K} J(v).$$

例 15.7 自由边界问题,设有矩形截面 $ABFG$ 的水坝(见图 15.1), 坝体内有渗流连接上下游, 它们的水位分别为 $x_2(D)$ 和 $x_2(E)$, 渗流区 Ω 是曲边梯形 $ABCD$, 自由表面 CD 是浸润线. 在 CD 上, $x_2 = y(x_1)$ 是待定的. 又假定 AB 上不透水. 根据 Darcy

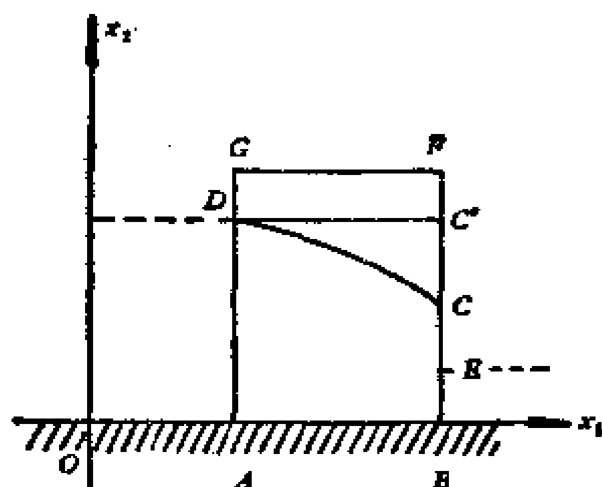


图 15.1

定律,压力头 $U(x)=U(x_1, x_2)$ 满足下列方程式

$$
\begin{cases}
-\Delta U(x)=0, & x\in \Omega, \\
\dfrac{\partial U(x)}{\partial n}=0, & x\in AB, \\
U(x)=x_2(E), & x\in BE, \\
U(x)=x_2, & x\in EC, \\
U(x)=x_2,\ \dfrac{\partial U(x)}{\partial n}=0, & x\in CD, \\
U(x)=x_2(D), & x\in DA.
\end{cases}
\tag{15.19}
$$

取 $\Omega'=ABC'D$, 并在 Ω' 上定义函数 $W(x)$,

$$
W(x)=\begin{cases}
0, & x_1(D)\leqslant x_1\leqslant x_1(E),\ y(x_1)\leqslant x_2\leqslant x_2(D), \\
\displaystyle\int_{x_2}^{y(x_1)}(U-x_2)dx_2, & x_1(D)\leqslant x_1\leqslant x_1(E), \\
 & 0\leqslant x_2\leqslant y(x_1).
\end{cases}
$$

可以证明,在Ω上有 $U(x)>x_2$, 所以 $W(x)>0$. 又在 CD 上, W, $\dfrac{\partial W}{\partial n}$ 是连续的. 从而得到下列不定方程的边值问题

$$
\begin{cases}
-\Delta W(x)+1\geqslant 0,\ W(x)\geqslant 0, & \\
\quad W(x)(-\Delta W(x)+1)=0, & x\in \Omega', \\
W(x)=g(x), & x\in \Gamma',
\end{cases}
\tag{15.20}
$$

其中

$$g(x)=\begin{cases}0, & x\in EC'\cup C'D,\\ \dfrac{1}{2}(x_2(E)-x_2)^2, & x\in BE,\\ \dfrac{1}{2}(x_2(D)-x_2)^2, & x\in DA,\\ \dfrac{1}{2}(x_2(E))^2+q(x_1(E)-x_1(D)-x_1), & x\in AB.\end{cases}$$

其中 q 是入坝流量，

$$q=-\frac{(x_2(E))^2-(x_2(D))^2}{2(x_1(E)-x_1(D))}.$$

记 $V=H^1(\Omega')$, $K=\{v\in H^1(\Omega')/v(x)|_{\Omega'}\geqslant 0,\ v|_{\Gamma'}=g\}$,

$$J(v)=\frac{1}{2}\int_{\Omega'}(|\nabla v|^2+2v)dx,$$

则上述不等方程的边值问题转化为

$$J(W)=\min_{v\in K}J(v).$$

而原问题中待定的浸润线 $y(x_1)$，渗流区域 Ω 和压力头 $U(x)$ 是

$$\begin{cases}y(x_1)=\min\{x_2|W(x)=0\},\\ \Omega=\{x/W(x)>0\},\\ U(x)=x_2-\dfrac{\partial W(x)}{\partial x_2}y(x), & x\in\Omega.\end{cases}$$

变分不等式把原来的自由边界问题转化为固定边界问题，从而可较方便地进行数值处理（见 Baiocchi, Comincioli, Magenes, Pozzi (1973) 等）.

关于变分不等式的工作还可见 Nadai (1931), Lions, Stampacchia (1967), Brezis, Stampacchia (1968, 1973), Lions (1969), Brezis (1972), Brezis, Duvaut (1973), Фикера (1973) 等人的论著. 关于发展型变分不等式，则可见 Lions (1969), Brezis (1972) 和 Duvaut, Lions (1972) 等人的论著.

15.2 有限元的一般概念

最早采用有限元方法的是 Courant (1943), Argyris (1954,

1955) 和 Turner, Clough, Martin, Topp (1956) 等,其名称来自 Clough (1960) 的文献,本节先从具体例子谈起.

设 Ω 是平面 (x_1, x_2) 上的有界区域,它可分割成有限个矩形的和,它们的边与坐标轴平行,而且任意两个矩形或者不相交,或者有公共的边和顶点. 这种分割分法被称为矩形剖分. 又设每个小矩形在 x_m 方向的边长是 h_m, 顶点坐标是(j_1h_1, j_2h_2). $E(j_1, j_2)$ 表示矩形 $\{x \mid j_mh_m \leqslant x_m \leqslant (j_m+1)h, m=1, 2\}$. 作仿射变换

$$\hat{x}_m = \frac{x_m - j_mh_m}{h_m}, \qquad m = 1, 2, \tag{15.21}$$

则把 $E(j_1, j_2)$ 变成单位正方形 $Q_{\hat{x}} = \{\hat{x}/0 \leqslant \hat{x}_m \leqslant 1, m=1, 2\}$. 在 $Q_{\hat{x}}$ 中可用代数多项式来插值函数. 最简单的是双线性插值函数,

$$p(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = c_0 + c_1\hat{x} + c_2\hat{x}_2 + c_3\hat{x}_1\hat{x}_2. \tag{15.22}$$

如果用它在顶点上的值来表示 c_i, 则有

$$p(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (1-\hat{x}_1)(1-\hat{x}_2)p(0, 0) + \hat{x}_1(1-\hat{x}_2)p(1, 0) + (1-\hat{x}_1)\hat{x}_2p(0, 1) + \hat{x}_1\hat{x}_2p(1, 1).$$

通过变换(15.21), $p(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ 变成 $E(j_1, j_2)$ 上的函数. 把这些函数组合起来,就得到在 $\bar{\Omega}$ 上的函数 $v_h(x)$. 我们把这种函数的全体记为 V_h. 对于每个 $v_h \in V_h$, 它都由 v_h 在顶点上的值所确定,这些值被称为广义座标或自由度. 若共有 N 个网格顶点,则 $\mathscr{D}\mathrm{im}(V_h) = N$. 因为在两个相邻小矩形的公共边上, $v_h(x_1, x_2)$ 是单变量函数,而其端点上的值是给定的,因此 $V_h \subset C(\bar{\Omega})$, 并且 $V_h \subset H^1(\Omega)$. 因为仅把顶点上的函数值作为自由度,所以它是一次 Lagrange 型的. 这类 V_h 的基函数可取为

$$\varphi^{(j_1,j_2)}(x_1, x_2) = \varphi\left(\frac{x_1}{h_1} - j_1, \frac{x_2}{h_2} - j_2\right), \tag{15.23}$$

其中

$$\varphi(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \begin{cases} (1-|\hat{x}_1|)(1-|\hat{x}_2|), & \text{当 } |\hat{x}_1| < 1, \\ & \quad |\hat{x}_2| < 1, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

还可以采用高次 Lagrange 型的插值函数来构造 V_h.

在实际问题中，有时需要把函数的某些导数值也作为自由度，它被称为 Hermite 型的. 其中最简单的是 Adini 型（见 Adini, Clough (1961)），即在每个 $E(i_1, i_2)$ 中，

$$p(x_1, x_2) = p_3(x_1, x_2) + \alpha x_1^3 x_2 + \beta x_1 x_2^3,$$

其中 $p_3(x_1, x_2)$ 是完全三次多项式，并且以网格点上的函数值和一阶导数值为自由度. 下面来寻找它的基函数. 根据变换 (15.21)，又把问题转化为寻找在 Q_2 中满足下列条件的函数 $\varphi_l(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$，$l = 0, 1, 2$.

(i) 在点 (0, 0) 上，$\varphi_0(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ 的值为 1，其一阶偏导数的值为零，在其余三个顶点上，$\varphi_0(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ 及其一阶偏导数的值全为零；

$$
\begin{cases}
\varphi_0(\hat{x}_1,\ 1) = (c_4 + c_8 + c_{11})\hat{x}_1 + (c_7 - 3)\hat{x}_1^2 \\
\qquad + (c_{10} + 2)\hat{x}_1^3 = 0, \\
\varphi_0(1,\ \hat{x}_2) = (c_4 + c_7 + c_{10})\hat{x}_2 + (c_8 - 3)\hat{x}_2^2 \\
\qquad + (c_{11} + 2)\hat{x}_2^3 = 0,
\end{cases}
$$

因此 $c_4 = -1$，$c_7 = c_8 = 3$，$c_{10} = c_{11} = -2$，从而得到

$$
\varphi_0(\hat{x}_1,\ \hat{x}_2) = 1 - 3(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2) - \hat{x}_1\hat{x}_2 + 2(\hat{x}_1^3 + \hat{x}_2^3) + 3(\hat{x}_1^2\hat{x}_2 + \hat{x}_1\hat{x}_2^2) - 2(\hat{x}_1^3\hat{x}_2 + \hat{x}_1\hat{x}_2^3).
$$

类似地有

$$
\varphi_1(\hat{x}_1,\ \hat{x}_2) = h_1(\hat{x}_1 - 2\hat{x}_1^2 - \hat{x}_1\hat{x}_2 + \hat{x}_1^3 + 2\hat{x}_1^2\hat{x}_2 - \hat{x}_1^3\hat{x}_2),
$$

$$
\varphi_2(\hat{x}_1,\ \hat{x}_2) = h_2(\hat{x}_2 - 2\hat{x}_2^2 - \hat{x}_1\hat{x}_2 + \hat{x}_2^3 + 2\hat{x}_1\hat{x}_2^2 - \hat{x}_1\hat{x}_2^3).
$$

最后，通过变换(15.21)，就得到对应于网格点 $(j_1h_1,\ j_2h_2)$ 的三个基函数

$$
\varphi_l^{(j_1,j_2)}(x_1,\ x_2) = \begin{cases} \varphi_l\left(\dfrac{x_1}{h_1} - j_1,\ \dfrac{x_2}{h_2} - j_2\right), & \text{当 } x \in \widetilde{E}(j_1,\ j_2), \\ 0, & \text{否则}, \end{cases}
$$

其中 $\widetilde{E}(j_1,\ j_2)$ 表示以 $(j_1h_1,\ j_2h_2)$ 为顶点的任一个小矩形，一共有四个。对于任意的 $v_h(x_1,\ x_2) \in V_h$，则有

$$
\begin{aligned}
v_h(x_1,\ x_2) = \sum_{j_1,j_2} \Big(& v_h(j_1h_1,\ j_2h_2)\varphi_0^{(j_1,j_2)}(x_1,\ x_2) \\
& + \frac{\partial v_h}{\partial x_1}(j_1h_1,\ j_2h_2)\varphi_1^{(j_1,j_2)}(x_1,\ x_2) \\
& + \frac{\partial v_h}{\partial x_2}(j_1h_1,\ j_2h_2)\varphi_2^{(j_1,j_2)}(x_1,\ x_2)\Big).
\end{aligned}
$$

容易验证 $V_h \subset C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$.

在实际计算中还更多地采用三角剖分，因为它更适用于不规则网格，并且能较好地逼近复杂的边界.

假设 $\Delta(x^{(1)},\ x^{(2)},\ x^{(3)})$ 是以 $x^{(1)}$，$x^{(2)}$，$x^{(3)}$ 为顶点的三角形，它们的对边的中点是 $M^{(1)}$，$M^{(2)}$，$M^{(3)}$，对边长度是 d_1，d_2，d_3，三角形的面积是 D. 设 $x \in \Delta(x^{(1)},\ x^{(2)},\ x^{(3)})$. 用 D_1，D_2 和 D_3 分别表示三角形 $\Delta(x, x^{(2)}, x^{(3)})$，$\Delta(x, x^{(3)},\ x^{(1)})$ 和 $\Delta(x, x^{(1)},\ x^{(2)})$ 的面积. 令 $L_i = \dfrac{D_i}{D}$，则 $L_i \geqslant 0$，且 $L_1 + L_2 + L_3 = 1$.

由于点 x 和 (L_1, L_2, L_3) 一、一对应，所以可用后者作为 x 的座标，它被称为面积座标，见图 15.2. 因为

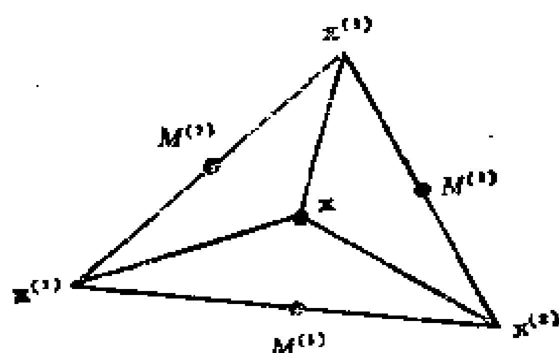


图 15.2

$$2D = \begin{vmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \\ 1 & x_1^{(3)} & x_2^{(3)} \end{vmatrix}, \qquad 2D_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \\ 1 & x_1^{(3)} & x_2^{(3)} \end{vmatrix},$$

$$2D_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_1^{(3)} & x_2^{(3)} \end{vmatrix}, \qquad 2D_3 = \begin{vmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \\ 1 & x_1 & x_2 \end{vmatrix},$$

所以

$$\begin{cases} L_1 = \dfrac{1}{2D}\left((x_1^{(2)}x_2^{(3)} - x_1^{(3)}x_2^{(2)}) + (x_2^{(2)} - x_2^{(3)})x_1 \right. \\ \qquad \left. + (x_1^{(3)} - x_1^{(2)})x_2\right), \\ L_2 = \dfrac{1}{2D}\left((x_1^{(3)}x_2^{(1)} - x_1^{(1)}x_2^{(3)}) + (x_2^{(3)} - x_2^{(1)})x_1 \right. \\ \qquad \left. + (x_1^{(1)} - x_1^{(3)})x_2\right), \\ L_3 = \dfrac{1}{2D}(x_1^{(1)}x_2^{(2)} - x_1^{(2)}x_2^{(1)}) + (x_2^{(1)} - x_2^{(2)})x_1 \\ \qquad + (x_1^{(2)} - x_1^{(1)})x_2), \end{cases}$$

以及

$$x_m = \sum_{l=1}^{3} L_l x_m^{(l)}, \quad m = 1, 2.$$

又由复合函数的求导法则得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_1} = \dfrac{1}{2D}\Big[(x_2^{(2)} - x_2^{(3)})\dfrac{\partial}{\partial L_1} + (x_2^{(3)} - x_2^{(1)})\dfrac{\partial}{\partial L_2} \\ \qquad + (x_2^{(1)} - x_2^{(2)})\dfrac{\partial}{\partial L_3}\Big], \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} = \dfrac{1}{2D}\Big[(x_1^{(3)} - x_1^{(2)})\dfrac{\partial}{\partial L_1} + (x_1^{(1)} - x_1^{(3)})\dfrac{\partial}{\partial L_2} \\ \qquad + (x_1^{(2)} - x_1^{(1)})\dfrac{\partial}{\partial L_3}\Big]. \end{cases}$$

现在用n_l表示$x^{(l)}$的对边的法向导数．由$x^{(1)}$作对边的垂线，垂足记为$\overline{M}^{(1)}$．用σ_1表示$M^{(1)}$与$\overline{M}^{(1)}$的代数距离，当$\overline{M}^{(1)}$与$x^{(3)}$在同一侧时(见图 15.3)，$\sigma_1 \geqslant 0$；否则$\sigma_1 \leqslant 0$．又记$\mu_1 = \dfrac{2\sigma_1}{d_1}$．类似地可定义$\mu_2$和$\mu_3$．于是得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial n_1} = \dfrac{d_1}{4D}\left((1-\mu_1)\dfrac{\partial}{\partial L_2} + (1+\mu_1)\dfrac{\partial}{\partial L_3} - 2\dfrac{\partial}{\partial L_1}\right), \\ \dfrac{\partial}{\partial n_2} = \dfrac{d_2}{4D}\left((1-\mu_2)\dfrac{\partial}{\partial L_3} + (1+\mu_2)\dfrac{\partial}{\partial L_1} - 2\dfrac{\partial}{\partial L_2}\right), \\ \dfrac{\partial}{\partial n_3} = \dfrac{d_3}{4D}\left((1-\mu_3)\dfrac{\partial}{\partial L_1} + (1+\mu_3)\dfrac{\partial}{\partial L_2} - 2\dfrac{\partial}{\partial L_3}\right), \end{cases} \tag{15.24}$$

此外尚有

$$\iint_{\Delta(x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)})} L_1^{p_1}L_2^{p_2}L_3^{p_3}dx_1dx_2 = \frac{2Dp_1!\,p_2!\,p_3!}{(p_1+p_2+p_3+2)!}$$

有了上面的各组公式，就很容易得到各种插值函数空间V_h．Courant (1943) 提出的第一个有限元，就是采用三角形剖分，并以$x^{(l)}$上的函数值作为自由度的，此时对任意$v_h \in V_h$，$x \in \Delta(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$，都有

$$v_h(x_1, x_2) = \sum_{l=1}^{3} L_l v_h(x^{(l)}). \tag{15.25}$$

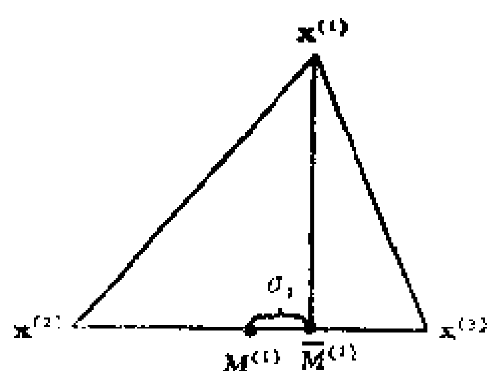


图 15.3

若采用二次 Lagrange 型插值，并以 $x^{(l)}$ 和 $M^{(l)}$ 上的函数值作为自由度，则对任意的 $v_h \in V_h$，$x \in \Delta(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$，都有

$$v_h(x_1, x_2) = \sum_{l=1}^{3} (L_l(2L_l - 1)v_h(x^{(l)}) + 4L_{l+1}L_{l+2}v_h(M^{(l)})),$$

其中 $L_4 = L_1$，$L_5 = L_2$，$L_6 = L_3$。

容易验证，用高次Lagrange型插值得到的$V_h \subset C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$，但 $V_h \not\subset H^2(\Omega)$。

如果采用二次Hermite型插值，并以 $x^{(l)}$ 上的函数值和 $M^{(l)}$ 上的 $\frac{\partial v}{\partial n}$ 的值作为自由度，那末得到另一类 V_h，对任意 $v_h \in V_h$，$x \in \Delta(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$，都有

$$v_h(x_1, x_2) = \sum_{l=1}^{3} \left(\alpha_l v_h(x^{(l)}) + \beta_l \frac{\partial v_h}{\partial n}(M^{(l)})\right),$$

其中

$$\begin{cases} \alpha_l = L_l^2 + \frac{1}{2}(1 + \mu_{l+1})L_l L_{l+1} + \frac{1}{2}(1 - \mu_{l+2})L_l L_{l+2} \\ \qquad + \frac{1}{2}(2 - \mu_{l+1} - \mu_{l+2})L_{l+2}L_{l+3}, \\ \beta_l = -\frac{2D}{d_l} L_l(L_{l+1} + L_{l+2}), \qquad l = 1, 2, 3. \end{cases}$$

按照上述方法构造的空间 V_h 被称为 Moley 型的。由于沿着每个三角形的边界，$v(x_1, x_2)$ 不连续，所以 $V_h \subset L^2(\Omega)$，但 $V_h \not\subset H^1(\Omega)$。

还有许多其它类型的 V_h，例如 Zienkiewicz 型，Argyris 型，Hsich-Clough-Tocher 型，Fraeijs de Veubeke-Sander 型和 Bogner-Fox-Schmit型等。有关的材料还可见Sander(1964)，Clough，Tocher (1965)，冯康(1965)，Fraeijs De Veubeke (1965，1968)，Bogner，Fox，Schimit (1965)，Zienkiewicz (1971)，Nicolaides(1972)，Ciavaldini，Nédélec (1974) 和 Ciarlet (1974，1978) 等人的论著。

下面来给出有限元的一般概念。在 $\mathscr{R}^n$ 中的有限元是一个三

重集合 $(E; \mathscr{L}, P)$，其中 E，$\mathscr{L}$，P 有下列意义和关系，

(i) E 是 $\mathscr{R}^n$ 中的一个子集，其内部 $\mathring{E}$ 非空，并有 Lipschitz 连续的边界.

(ii) $\mathscr{L}$ 是一组定义在 $C^\infty(E)$ 上的线性独立的线性泛函 $\mathscr{L}_l$ $(1 \leqslant l \leqslant N_0)$ 的有限集合，它被称为有限元的自由度.

(iii) P 是从 E 到 $\mathscr{R}$ 的函数 $p(x)$ 所组成的空间，它使 $\mathscr{L}$ 是 P 唯一可解的，也就是说，对于任意的一组 $\alpha_l (1 \leqslant l \leqslant N_0)$，都有唯一的函数 $p(x) \in P$，使得 $\mathscr{L}_l(p) = \alpha_l, (1 \leqslant l \leqslant N_0)$. 等价地说，存在 N_0 个基函数 $\varphi_l(x) \in P$，使得 $\mathscr{L}_i(\varphi_l) = \delta_{i,l}$.

显然，对一切 $p(x) \in P$，都有

$$p(x) = \sum_{l=1}^{N_0} \mathscr{L}_l(p)\varphi_l(x), \quad x \in E.$$

在前面的例子中，$n = 2$，E 是三角形或矩形. 一般来说，E 是 $\mathscr{R}^n$ 中的多边形，而 $\mathscr{L}$ 一般由下列形式的泛函所组成

$$\begin{cases} \mathscr{L}'_l(p) = p(x'^{(l)}), \\ \mathscr{L}''_{ls}(p) = \widetilde{D}p(x''^{(l)}) \cdot \xi''_{ls}, \\ \mathscr{L}'''_{ls\mu}(p) = \widetilde{D}^2 p(x'''^{(l)}) \cdot (\xi'''_{ls}, \xi'''_{l\mu}), \end{cases} \tag{15.26}$$

其中 $x'^{(l)}$，$x''^{(l)}$，$x'''^{(l)} \in E$，非零向量 ξ''_{ls}，ξ'''_{ls}，$\xi'''_{l\mu}$ 是常向量或由有限元的几何所决定，$\widetilde{D}^r w(y)(\eta_1, \cdots, \eta_r)$ 是一个 r 阶导算子的 r 线性齐式，即

$$\widetilde{D}^r w(y)(\eta_1, \cdots, \eta_r) = \prod_{q=1}^{r} \left(\sum_{m=1}^{n} \eta_{qm} \frac{\partial}{\partial x_m} \right) w(y).$$

如果自由度中只包含 $\mathscr{L}'_l$ 型的泛函，则称它是 Lagrange 型有限元，否则称它是 Hermite 型有限元.

假设 $v(x)$ 适当光滑，从 E 到 $\mathscr{R}$ 的插值算子 $\Pi_E v \in P$ 定义为

$$\mathscr{L}_l(\Pi_E v) = \mathscr{L}_l(v), \qquad 1 \leqslant l \leqslant N_0.$$

显然有

$$\Pi_E v(x) = \sum_{l=1}^{N_0} \mathscr{L}_l(v)\varphi_l(x).$$

如果 $E^{(1)}=E^{(2)}$, $\Pi_{E^{(1)}}=\Pi_{E^{(2)}}$, $P^{(1)}=P^{(2)}$, 则称有限元($E^{(1)}$, $\mathscr{L}^{(1)}$, $P^{(1)}$) 和 ($E^{(2)}$, $\mathscr{L}^{(2)}$, $P^{(2)}$) 是相同的.

假设 ($\hat{E}$, $\hat{\mathscr{L}}$, $\hat{P}$) 和 (E, $\mathscr{L}$, P) 都有形如(15.26)的自由度,并且存在一个可逆的仿射变换 $x=F(\hat{x})=B\hat{x}+b$, 使得下式成立,则称它们是仿射等价的,

$$\begin{cases}E=F(\hat{E}),\\ x'^{(l)}=F(\hat{x}'^{(l)}),\ x''^{(l)}=F(\hat{x}''^{(l)}),\ x'''^{(l)}=F(\hat{x}'''^{(l)}),\\ \xi''_{ls}=B\hat{\xi}''_{ls},\ \xi'''_{ls}=B\hat{\xi}'''_{ls},\ \xi'''_{l\mu}=B\hat{\xi}'''_{l\mu},\\ P=\{p(x)/p(x)=\hat{p}F^{-1}(x),\ \hat{p}(\hat{x})\in\hat{P}\}.\end{cases}\tag{15.27}$$

反之,若 ($\hat{E}$, $\hat{\mathscr{L}}$, $\hat{P}$) 是有限元, E, $\mathscr{L}$, P 满足(15.27),则(E, $\mathscr{L}$, P) 一定也是有限元.

定理 15.4 设 ($\hat{E}$, $\hat{\mathscr{L}}$, $\hat{P}$)和 (E, $\mathscr{L}$, P) 是两个仿射等价的有限元, $\hat{\varphi}_l(\hat{x})$ 是前者的基函数,那末 $\varphi_l(x)=\hat{\varphi}_l(F^{-1}(x))$ 也一定是后者的基函数. 又如果 v 和 $\hat{v}$ 充分光滑, 并且 $v=\hat{v}F^{-1}$, (即对一切 $x=F(\hat{x})$, 都有 $v(x)=\hat{v}(\hat{x})$), 那末

$$\widehat{\Pi_E v}=\Pi_{\hat{E}}\hat{v}.$$

证明 由(15.26)得到

$$\Pi_E v(x)=\sum_l v(x'^{(l)})\varphi'_l(x)+\sum_{l,s}\{\widetilde{D}v(x''^{(l)})\cdot\xi''_{ls}\}\varphi''_{ls}(x)$$
$$+\sum_{l,s,\mu}\{\widetilde{D}^2v(x'''^{(l)})\cdot(\xi'''_{ls},\xi'''_{l\mu})\}\varphi'''_{ls\mu}(x),$$

其中 $\varphi'_l(x)$, $\varphi''_{ls}(x)$, $\varphi'''_{ls\mu}(x)$ 是对应自由度 $\mathscr{L}'_l$, $\mathscr{L}''_{ls}$, $\mathscr{L}'''_{ls\mu}$ 的基函数. 又根据复合函数的求导规则,

$$\Pi_E v(x)=\sum_l \hat{v}(\hat{x}'^{(l)})\varphi'_l(x)+\sum_{l,s}\{\widetilde{D}\hat{v}(\hat{x}''^{(l)})\cdot\hat{\xi}''_{ls}\}\varphi''_{ls}(x)$$
$$+\sum_{l,s,\mu}\{\widetilde{D}^2\hat{v}(\hat{x}'''^{(l)})\cdot(\hat{\xi}'''_{ls},\hat{\xi}'''_{l\mu})\}\varphi'''_{ls\mu}(x),$$

故由(15.27)得到

$$\widehat{\Pi_E v(\hat{x})}=\sum_l \hat{v}(\hat{x}'^{(l)})\hat{\varphi}'_l(\hat{x})+\sum_{l,s}\{\widetilde{D}\hat{v}(\hat{x}''^{(l)})\cdot\hat{\xi}''_{ls}\}\hat{\varphi}''_{ls}(\hat{x})$$

$$+\sum_{l,i,\mu}\{\hat{D}^2\phi(\hat{x}'''^{(l)})\cdot(\hat{\xi}'''_{li},\hat{\xi}'''_{l\mu})\}\hat{\varphi}'''_{li\mu}(\hat{x})$$

$$=\Pi_{\hat{E}}\phi(\hat{x}).$$

一族有限元称为仿射族的意义是，如果它所有的有限元都仿射等价于一个单一的有限元．并称这单一的有限元为这族的参考有限元．

可以把上面的结果推广到更一般的情况．有限元$(E,\mathscr{L},P)$与有限元$(\hat{E},\hat{\mathscr{L}},\hat{P})$是等参地等价的，如果存在一个可逆变换$x=F(\hat{x})$，

$$F(\hat{x})=(F_1(\hat{x}),\cdots,F_n(\hat{x})),\qquad F_\mu(\hat{x})\in\hat{P},$$

使得$E=F(\hat{E})$，$P=\{p(x)/p(x)=\hat{p}F^{-1},\ \hat{p}\in\hat{P}\}$，并且自由度也满足相应的关系，例如当$(\tilde{E},\hat{\mathscr{L}},\tilde{P})$是 Lagrange 型时，

$$\mathscr{L}=\{\mathscr{L}_l/\mathscr{L}_l(p)=p(F(\hat{x}^{(l)})),\quad 1\leqslant l\leqslant N_0\}.$$

如果一族有限元中的每个有限元都等参地等价于一个单一的有限元，则称它是等参族．这个单一的有限元被称为参考有限元．

实际上，等参有限元并不是事先由F所规定，而是由N_0个不同的点$x^{(l)}$与自由度来决定．对于 Lagrange 型有限元来说，即由$F(\hat{x}^{(l)})=x^{(l)}(1\leqslant l\leqslant N_0)$唯一地决定了$F(\hat{x})$，见图 15.4.

对于等参有限元，成立与定理 15.4 相对应的结果．

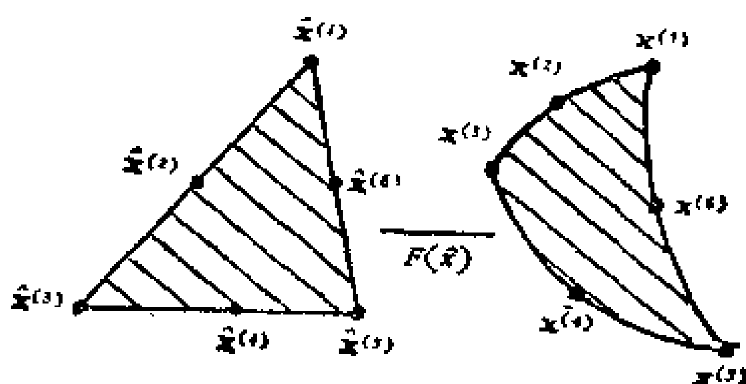


图 15.4

15.3 Соболев 空间的插值理论

为了估计有限元的逼近误差，需要应用 Соболев 空间的插值

理论．用 P_k 表示 Ω 上至多 k 阶多项式的全体，引入商空间

$$T^{k+1,p}(\Omega)=W^{k+1,p}(\Omega)/P_k(\Omega),$$

它的元素 $\dot{v}$ 的范数是

$$\|\dot{v}\|_{T^{k+1,p}(\Omega)}=\inf_{p\in P_k}\|v+p\|_{W^{k+1,p}(\Omega)}.$$

类似地可定义 $|\dot{v}|_{T^{k+1,p}(\Omega)}$．特别，若 v 是 $\dot{v}$ 的等价类中的元素，则有

$$|\dot{v}|_{T^{k+1,p}(\Omega)}=|v|_{W^{k+1,p}(\Omega)}.$$

引理 15.1 存在正常数 $c_1(\Omega)$，使得对一切 $\dot{v}\in T^{k+1,p}(\Omega)$

$$\|\dot{v}\|_{T^{k+1,p}(\Omega)}\leqslant c_1(\Omega)|\dot{v}|_{W^{k+1,p}(\Omega)}.$$

证明 设 $N=\mathscr{D}\mathrm{im}(P_k)$，$F_l(1\leqslant l\leqslant N_1)$ 是 P_k 的共轭空间的一组基．根据 Hahn-Banach 定理，它们可扩张到整个空间 $W^{k+1,p}(\Omega)$，不妨仍记为 F_l，使得对任意的 $p(x)\in P_k$，当且仅当 $p(x)\equiv 0$ 时，才有 $F_l(p)=0$，$1\leqslant l\leqslant N_1$．又因为对任意的 $p(x)\in P_k$，都可找到 $q(x)\in P_k$，使得 $F_l(v+q)=0$，因此又把原问题归结为证明，对一切 $v\in W^{k+1,p}(\Omega)$，

$$\|v\|_{W^{k+1,p}(\Omega)}\leqslant c_1(\Omega)\left(|v|_{W^{k+1,p}(\Omega)}+\sum_{l=1}^{N_1}|F_l(v)|\right).\tag{15.28}$$

如果(15.28)不成立，则存在序列 $\{v_s\}$，$v_s\in W^{k+1,p}(\Omega)$，

$$\|v_s\|_{W^{k+1,p}(\Omega)}=1,$$

并且

$$\lim_{s\to\infty}\left(|v_s|_{W^{k+1,p}(\Omega)}+\sum_{l=1}^{N_1}|F_l(v_s)|\right)=0.\tag{15.29}$$

因为 $\{v_s\}$ 是 $W^{k+1,p}(\Omega)$ 中的有界集，而从 $W^{k+1,p}(\Omega)$ 到 $W^{k,p}(\Omega)$ 的嵌入是紧致的，所以一定有子列，仍记为 $\{v_s\}$ 和 $v\in W^{k,p}(\Omega)$，使得

$$\lim_{s\to\infty}\|v_s-v\|_{W^{k,p}(\Omega)}=0,\tag{15.30}$$

并且由(15.29)得到

$$\lim_{s\to\infty}|v_s|_{W^{k+1,p}(\Omega)}=0.$$

因为 $W^{k+1,p}(\Omega)$ 是完备的，因此由上式和(15.30)知道，$\{v_s\}$ 在 $W^{k+1,p}(\Omega)$ 中是收敛的，并且对一切 $|\alpha|=k+1$，

$$\|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)} = \lim_{s\to\infty}\|D^\alpha v_s\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

所以,当 $|\alpha| = K+1$ 时, $D^\alpha v = 0$. 又由(15.29)得到

$$F_l(v) = \lim_{s\to\infty} F_l(v_s) = 0, \quad 1 \leqslant l \leqslant N,$$

从而 $v(x) \equiv 0$. 但这是与 $\|v_s\|_{W^{k+1,p}(\Omega)} = 1$ 矛盾的.

Bramble, Hilbert (1970) 证明了下列结果:

引理 15.2 假设 $F(v)$ 是 $W^{k+1,p}(\Omega)$ 上的线性连续泛函,并且对一切 $p(x) \in P_k$, $F(p) = 0$. 那末,存在正常数 $c_2(\Omega)$, 使得对一切 $v \in W^{k+1,p}(\Omega)$,

$$|F(v)| \leqslant c_2(\Omega)\|F\|'|v|_{W^{k+1,p}(\Omega)},$$

其中 $\|\cdot\|'$ 表示 $W^{k+1,p}(\Omega)$ 的共轭空间的范数.

证明 对一切 $p(x) \in P_k$,

$$|F(v)| = |F(v+p)| \leqslant \|F\|'\|v+p\|_{W^{k+1,p}(\Omega)},$$

所以

$$|F(v)| \leqslant \|F\|' \inf_{p\in P_k}\|v+p\|_{W^{k+1,p}(\Omega)}.$$

于是,应用引理 15.1 即得所证的结论.

如果空间 $\mathscr{F}_1$ 到 $\mathscr{F}_2$ 是连续嵌入的,则记为 $\mathscr{F}_1 \hookrightarrow \mathscr{F}_2$.

引理 15.3 假设 $W^{k+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{r,q}(\Omega)$, $\mathscr{A}$ 是从 $W^{k+1,p}(\Omega)$ 到 $W^{r,q}(\Omega)$ 的线性连续算子,其范数记为 $\|\cdot\|_{\mathscr{A}}$, 并且对一切 $p(x) \in P_k$, $\mathscr{A}p(x) = p(x)$, 则存在正常数 $c_3(\Omega)$, 使得对一切

$$v \in W^{r,q}(\Omega),$$

都有

$$|v - \mathscr{A}v|_{W^{r,q}(\Omega)} \leqslant c_3(\Omega)\|I - \mathscr{A}\|_{\mathscr{A}}|v|_{W^{k+1,p}(\Omega)}.$$

证明 设 $|\alpha| = r$, 并对 $v \in W^{k+1,p}(\Omega)$ 定义函数 $g(x)$,

$$g = \operatorname{sign} D^\alpha(v - \mathscr{A}v)\cdot|D^\alpha(v - \mathscr{A}v)|^{q-1},$$

则 $g \in L^{q'}(\Omega)$, 其中 $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$. 又作泛函 $F(v)$,

$$F(v) = \int_\Omega g D^\alpha(v - \mathscr{A}v)\,dx,$$

则有

$$|F(v)| \leqslant \|g\|_{L^{q'}(\Omega)}\|D^\alpha(v - \mathscr{A}v)\|_{L^q(\Omega)}$$

$$\leqslant \|g\|_{L^{q'}(\Omega)}\|I-\mathscr{A}\|_{\mathscr{L}}\|v\|_{W^{k+1,p}(\Omega)}.$$

因此 $F(v)$ 是 $W^{k+1,p}(\Omega)$ 上的线性连续泛函，并且

$$\|F\|' \leqslant \|g\|_{L^{q'}(\Omega)}\|I-\mathscr{A}\|_{\mathscr{L}}.$$

又因为对一切 $p(x)\in P_k$，$F(p)=0$，故由引理 15.2 得到

$$|F(v)| \leqslant c_2(\Omega)\|F\|'|v|_{W^{k+1,p}(\Omega)} \leqslant c_2(\Omega)\|g\|_{L^{q'}(\Omega)}\|I-\mathscr{A}\|_{\mathscr{L}}|v|_{W^{k+1,p}(\Omega)}. \tag{15.31}$$

由于 $|F(v)| = \|D^\alpha(v-\mathscr{A}v)\|^q_{L^q(\Omega)}$，

$$\|g\|_{L^{q'}(\Omega)} = \|D^\alpha(v-\mathscr{A}v)\|^{\frac{q}{q'}}_{L^q(\Omega)},$$

所以由 (15.31) 得到

$$\|D^\alpha(v-\mathscr{A}v)\|_{L^q(\Omega)} \leqslant c_2(\Omega)\|I-\mathscr{A}\|_{\mathscr{L}}|v|_{W^{k+1,p}(\Omega)},$$

并由此推得引理的结论.

下面来估计有限元插值函数的误差. 区域 Ω 与 $\hat{\Omega}$ 被称为是仿射等价的，如果存在可逆变换

$$x = F(\hat{x}) = B\hat{x} + b,$$

使得 $\Omega = F(\hat{\Omega})$.

引理 15.4 设 Ω 与 $\hat{\Omega}$ 是 $\mathscr{R}^n$ 中的两个仿射等价开集，则存在正常数 $c_3(r,n)$，使得对一切 $v\in W^{r,q}(\Omega)$ 和 $\hat{v}\in W^{r,q}(\hat{\Omega})$，都有

$$|\hat{v}|_{W^{r,q}(\hat{\Omega})} \leqslant c_3(r,n)\|B\|^r|\mathrm{Det}B|^{-\frac{1}{q}}\cdot|v|_{W^{r,q}(\Omega)},$$

$$|v|_{W^{r,q}(\Omega)} \leqslant c_3(r,n)\|B^{-1}\|^r|\mathrm{Det}\ B|^{\frac{1}{q}}\cdot|\hat{v}|_{W^{r,q}(\hat{\Omega})},$$

这里的 $\|\cdot\|$ 表示 Euclid 范数.

证明 设 $|\alpha|=r$，则有

$$D^\alpha\hat{v}(\hat{x}) = \widetilde{D}^r\hat{v}(\hat{x})\cdot(e_{1\alpha},\cdots,e_{r\alpha}),$$

其中 $e_{i\alpha}$ 是 $\mathscr{R}^n$ 中的某些基向量. 我们有

$$|D^\alpha\hat{v}(\hat{x})| \leqslant \|\widetilde{D}^r\hat{v}(\hat{x})\| = \sup_{\substack{\|\xi_i\|\leqslant 1\\ 1\leqslant i\leqslant r}}|\widetilde{D}^r\hat{v}(\hat{x})\cdot(\xi_1,\cdots,\xi_r)|,$$

所以

$$|\hat{v}|_{W^{r,q}(\hat{\Omega})} \leqslant \left(\int_{\hat{\Omega}}\sum_{|\alpha|=r}|D^\alpha\hat{v}(\hat{x})|^q d\hat{x}\right)^{1/q}$$

$$\leqslant c_4(r,n)\left(\int_{\hat{\Omega}}\|\widetilde{D}\hat{v}(\hat{x})\|^q d\hat{x}\right)^{1/q}. \tag{15.32}$$

又由复合函数的求导规则，对任意的 $\xi_s\in\mathscr{R}^n$, $1\leqslant s\leqslant r$,

$$\widetilde{D}^r\hat{v}(\hat{x})\cdot(\xi_1,\cdots,\xi_r)=\widetilde{D}^r v(x)(B\xi_1,\cdots,B\xi_r),$$

因此

$$\|\widetilde{D}^r\hat{v}(\hat{x})\|\leqslant\|\widetilde{D}^r v(x)\|\|B\|^r.$$

从而

$$\int_{\hat{\Omega}}\|\widetilde{D}^r\hat{v}(\hat{x})\|^q d\hat{x}\leqslant\|B\|^{rq}\int_{\hat{\Omega}}\|\widetilde{D}^r v(F(\hat{x}))\|^q d\hat{x}. \tag{15.33}$$

由积分换元公式得到

$$\int_{\hat{\Omega}}\|\widetilde{D}^r v(F(\hat{x}))\|^q d\hat{x}=|\mathrm{Det}(B^{-1})|\int_{\Omega}\|\widetilde{D}^r v(x)\|^q dx.$$

因为

$$\|\widetilde{D}^r v(x)\|\leqslant c_5(r,n)\max_{|\alpha|=r}|D^\alpha v(x)|,$$

所以

$$\left(\int_{\Omega}\|\widetilde{D}^r v(x)\|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant c_5(r,n)|v|_{W^{r,q}(\Omega)}. \tag{15.34}$$

把 (15.32)—(15.34) 结合起来，即得到第一个结论．类似地可证明第二个结论．

为了应用引理 15.4，我们用一些简单的几何量来估计 $\|B\|$ 和 $\|B^{-1}\|$．用 h_Ω 表示 Ω 的直径，ρ_Ω 表示包含在 Ω 内的所有球的直径的上确界．类似地定义 $h_{\hat{\Omega}}$ 和 $\rho_{\hat{\Omega}}$.

引理 15.5 我们有

$$\|B\|\leqslant\frac{h_\Omega}{\rho_{\hat{\Omega}}},\quad\|B^{-1}\|\leqslant\frac{h_{\hat{\Omega}}}{\rho_\Omega}.$$

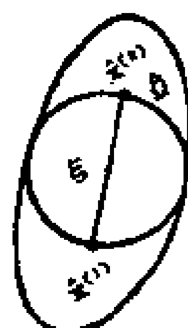
证明 我们有

$$\|B\|\leqslant\frac{1}{\rho_{\hat{\Omega}}}\sup_{\|\xi\|=\rho_{\hat{\Omega}}}\|B\xi\|.$$

对于满足 $\|\xi\|=\rho_{\hat{\Omega}}$ 的任意向量 ξ，必存在 $\hat{x}^{(1)},\hat{x}^{(2)}\in\hat{\Omega}$，使得 $\hat{x}^{(1)}-\hat{x}^{(2)}=\xi$，见图 15.5．又因为 $F(\hat{x}^{(1)})$, $F(\hat{x}^{(2)})\in\Omega$ 和 $B\xi=F(\hat{x}^{(1)})-F(\hat{x}^{(2)})$，所以 $\|B\xi\|\leqslant h_\Omega$，从而得到第一式．类似地可证明第二式．

定理 15.5 设 $(\hat{K},\hat{\mathscr{P}},\hat{\Sigma})$ 是一个有限元，$\hat{\mathscr{P}}_l$ 中至多出现

s 阶的偏导数，r 和 k 是某些整数，并且



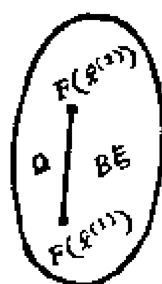


图 15.5

$$W^{k+1,p}(\hat{E})\hookrightarrow C^s(\hat{E}), \qquad (15.35)$$

$$W^{k+1,p}(\hat{E})\hookrightarrow W^{r,q}(\hat{E}), \qquad (15.36)$$

$$P_k\subset\hat{P}\subset W^{r,q}(\hat{E}), \qquad (15.37)$$

则存在正常数 $c_6(\hat{E},\hat{\mathscr{L}},\hat{P})$，使得对所有仿射等价的有限元 $(E,\mathscr{L},P)$ 和一切 $v\in W^{k+1,p}(E)$，都有

$$|v-\Pi_E v|_{W^{r,q}(E)}\leqslant c_6(\hat{E},\hat{\mathscr{L}},\hat{P})\times(\operatorname{meas}(E))^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\frac{h_E^{k+1}}{\rho_E^r}|v|_{W^{k+1,p}(E)},$$

这里 $\Pi_E v(x)$ 是 $v(x)$ 的 P_E 插值.

证明 因为 $P_k\subset\hat{P}$，$\hat{\mathscr{L}}$ 是 $\hat{P}$ 唯一可解的，故对一切 $p(x)\in P_k$，$\Pi_{\hat{E}}p(\hat{x})=p(\hat{x})$. 此外，假定 $\hat{P}$ 取下列形式

$$\Pi_{\hat{E}}\hat{v}(\hat{x})=\sum_l\hat{v}(\hat{x}'^{(l)})\hat{\varphi}_l'(\hat{x})+\sum_{l,s}\{\widetilde{D}\hat{v}(\hat{x}''^{(l)})\cdot\xi_{ls}''\}\hat{\varphi}_{ls}''(\hat{x})$$

$$+\sum_{l,s,\mu}\{\widetilde{D}^2\hat{v}(\hat{x}'''^{(l)})\cdot(\xi_{ls}''',\xi_{l\mu}''')\}\hat{\varphi}_{ls\mu}'''(\hat{x}).$$

由于$W^{k+1,p}(\hat{E})\hookrightarrow C^s(\hat{E})$，$\hat{P}\subset W^{r,q}(\hat{E})$，所以 $\Pi_{\hat{E}}$ 是从$W^{k+1,p}(\hat{E})$ 到 $W^{r,q}(\hat{E})$ 的线性连续算子. 因此，根据引理 15.3，对一切 $\hat{v}\in W^{k+1,p}(\hat{E})$，都有

$$|\hat{v}-\Pi_{\hat{E}}\hat{v}|_{W^{r,q}(\hat{E})}\leqslant c_7(\hat{E},\hat{\mathscr{L}},\hat{P})|\hat{v}|_{W^{k+1,p}(\hat{E})}, \qquad (15.38)$$

由于开集 $\hat{E}$ 和 E 是仿射等价的，$\hat{v}-\Pi_{\hat{E}}\hat{v}=\widehat{v-\Pi_E v}$，所以由引理 15.4 得到

$$|v-\Pi_E v|_{W^{r,q}(E)}\leqslant c_8(r,n)\|B^{-1}\|^r|\operatorname{Det}B|^{\frac{1}{q}}|\hat{v}-\Pi_{\hat{E}}\hat{v}|_{W^{r,q}(\hat{E})}. \qquad (15.39)$$

又有

$$|\hat{v}|_{W^{k+1,p}(\hat{E})}\leqslant c_9(k+1,n)\|B\|^{k+1}|\operatorname{Det}B|^{-\frac{1}{p}}|v|_{W^{k+1,p}(E)}. \qquad (15.40)$$

把 (15.38)—(15.40) 结合起来，再利用引理 15.5 和

$$|\mathrm{Det} B| = \frac{\mathrm{meas}(E)}{\mathrm{meas}(\hat{E})},$$

就证明了本定理.

有限元族 $(E, \mathscr{L}, P)$ 被称为是仿射正则的,如果它满足下列条件:

(i) 它是仿射族;

(ii) 存在一个正常数,使得对一切 E, $\dfrac{h_E}{\rho_E} \leqslant \sigma$;

(iii) $h_E \to 0$.

定理 15.6 设 $(E, \mathscr{L}, P)$ 是仿射正则的, (15.35)—(15.37) 对参考有限元成立,则存在正常数 c_{10}, 使得对族中所有的有限元和一切 $v \in W^{k+1,p}(\Omega)$, 都有

$$|v - \Pi_E v|_{W^{q,r}(E)} \leqslant c_{10} h_E^{k+1-r+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}} |v|_{W^{k+1,p}(E)}.$$

注记 15.2 即使 (15.35) 不成立,插值算子不能定义,我们也有一些逼近定理,可见 Strang (1972a), Hilbert (1973), Pini (1974) 和 Ciarlet(1978)等人的文献.

等参有限元族被称为 k 次等参正则的,如果它满足下列条件:

(i) 每个 E 都是经过可逆 k 次等参变换 $x = F(\hat{x})$, 由一个单一的参考有限元得到的,

(ii) 存在正常数 c_{11} 和 c_{12}, 使得

$$c_{11} h^n \leqslant |J(\hat{x})| \leqslant c_{12} h^n,$$

其中 $J(\hat{x})$ 是 $F(\hat{x})$ 对 $\hat{x}$ 的 Jacobi 行列式.

(iii) 存在正常数 c_{13}, 使得对一切 $|\alpha| \leqslant k+1$,

$$|D^\alpha F(\hat{x})| \leqslant c_{13} h^{|\alpha|}.$$

(iv) $h_E \to 0$.

对于等参正则有限元族,也有类似于定理 15.6 的结果,例如下列定理:

定理 15.7 假设 $(E, \mathscr{L}, P)$是一个等参正则有限元族, $p \geqslant 1$, $k+1 > \dfrac{n}{p}$, $p^{-1} < q^{-1} + (k+1-r)n^{-1}$, $\Pi_E v$ 是 v 的 P_E 插

值． 那末，存在正常数 c_{14}，使得对族中所有的有限元和一切 $v \in W^{k+1,p}(\Omega)$，

$$|v - \Pi_E v|_{W^{r,q}(E)} \leqslant c_{14} h_E^{k+1-r+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}} |v|_{W^{k+1,p}(E)}.$$

15.4 Галеркин 方法

本节考虑问题(15.5)，其中 V，$a(v, w)$，$F(w)$ 满足定理15.2的全部条件，U 是它的解．假定 V_h 是 V 的 N 维子空间． 所谓用 Галеркин 方法求(15.5)的近似解是指求函数 $u_h \in V_h$，使得

$$a(u_h, w_h) = F(w_h), \qquad \forall w_h \in V_h, \tag{15.41}$$

根据定理15.2，u_h 是唯一存在的．若用 $\varphi_l(x)$ 表示 V_h 的基底，并令

$$u_h(x) = \sum_{l=1}^{N} u_{h,l}\varphi_l(x),$$

代入(15.41)后即得到关于 $u_{h,l}$ 的线性代数方程组，其系数矩阵是 $A = (A_{li})$，其中 $A_{li} = a(\varphi_l, \varphi_i)$，右端项是 b，其分量 $b_l = F(\varphi_l)$．如果 $a(v, w)$ 是对称的，则 A 也是对称的．

Михлин (1957, 1966) 早就致力于上述方法． Céa(1964)，冯康(1965)，Varga(1966)都独立地给出了对称情况时的一些误差估计．Zlámal(1968) 则讨论了一般情况．Birkhoff, Schultz, Varga (1968) 得到了下列结果：

定理 15.8 设 U 和 u_h 分别是(15.5)和(15.41)的解，那末

$$\|U - u_h\|_V \leqslant \frac{a_1}{a_0} \inf_{v_h \in V_h} \|U - v_h\|_V.$$

证明 由(15.5)和(15.41)得到

$$a(U - u_h, w_h) = 0, \qquad \forall w_h \in V_h,$$

故对一切 $v_h \in V_h$，

$$\begin{aligned} a_0\|U - u_h\|_V^2 &\leqslant a(U - u_h, U - u_h) = a(U - u_h, U - v_h) \\ &\leqslant a_1\|U - u_h\|_V \|U - v_h\|_V \end{aligned}$$

由此即得所证．

注记 15.3 如果 $a(v, w)$ 是对称的，则 $J(u_h) = \min\limits_{v_h \in V_h} J(v_h)$．因为对一切 $w_h \in V_h$，$a(U - u_h, w_h) = 0$，所以 u_h 是 U 按内积

$a(v_h, v_h)$ 在 V_h 上的投影，因此

$$a(U-u_h, U-u_h) \leqslant \inf_{v_h \in V_h} a(U-v_h, U-v_h),$$

从而得到下面较好的误差估计

$$\|U-u_h\|_V \leqslant \sqrt{\frac{a_1}{a_0}} \inf_{v_h \in V_h} \|U-v_h\|_V.$$

Aubin(1967), Nitsche(1968)提出了一种技巧，即在另一个空间中得到更好的误差估计. 设H是一个 Hilbert 空间，$\overline{V}=H$，从 $\overline{V}$ 到H的嵌入 τ 是连续的，其范数记为 $\|\tau\|$. 把H与H'相一致，那末，H就与V'中的一个子空间相一致. 设 $F\in H$，则得

$$|(F, v)_H| \leqslant \|F\|_H \|v\|_H \leqslant \|\tau\| \|F\|_H \|v\|_V, \quad \forall v \in V.$$

因此，映射 $v\in V \to (F, v)_H$ 定义了一个元素 $\tilde{F}\in V'$. 映射$F\in H \to \tilde{F}\in V'$ 是一个嵌入，因为如果对一切 $v\in V$，都有 $(F, v)_H=0$，则由V在H中的稠密性知道，对一切 $v\in H$，$(F, v)_H=0$，从而 $F=0$. 今后把F与$\tilde{F}$视为一体，即写成

$$(F, v)_H = F(v), \quad \forall v \in V, \forall F \in H. \tag{15.42}$$

定理 15.9 假设H满足前面的条件，则

$$\|U-u_h\|_H \leqslant a_1 \|U-u_h\|_V \left(\sup_{g\in H} \left\{ \frac{1}{\|g\|_H} \inf_{\xi_h \in V_h} \|\xi-\xi_h\|_V \right\}\right),$$

其中对任意 $g\in H$，$\xi\in V$ 是下列共轭变分问题的解

$$a(w, \xi) = (g, w), \quad \forall w \in V. \tag{15.43}$$

证明 我们有

$$\|U-u_h\|_H = \sup_{g\in H} \frac{|(g, U-u_h)_H|}{\|g\|_H}. \tag{15.44}$$

可仿定理 15.2 证明，(15.43) 是唯一可解的. 因为 $U-u_h\in V$，因此 $a(U-u_h, \xi)=(g, U-u_h)_H$. 又对一切 $\xi_h\in V_h$，$a(U-u_h, \xi_h)=0$，所以得到

$$(g, U-u_h)_H = a(U-u_h, \xi-\xi_h), \quad \forall \xi_h \in V_h,$$

$$|(g, U-u_h)_H| \leqslant a_1 \|U-u_h\|_V \inf_{\xi_h \in V_h} \|\xi-\xi_h\|_V.$$

把它代入 (15.44) 即得所证.

在实际计算中，还经常用 $a_h(v, w)$，$F_h(w)$ 来逼近 $a(v, w)$

和 $F_h(w)$，这样实际所得到的解 $\bar{u}_h\in V_h$ 满足

$$a_h(\bar{u}_h, w_h)=F_h(w_h), \qquad \forall w_h\in V_h. \tag{15.45}$$

Strang (1972b) 证明了下列结果:

定理 15.10 假设 $a_h(v, w)$ 是 V_h 椭圆的,并存在正常数 $\bar{a}_0$，使得对一切 h 和 $v_h\in V_h$，都有 $\bar{a}_0\|v_h\|_V^2\leqslant a_h(v_h, v_h)$，那末存在与 h 无关的正常数 c_1，使得

$$\|U-\bar{u}_h\|_V\leqslant c_1\left(\inf_{v_h\in V_h}\left\{\|U-v_h\|_V+\sup_{w_h\in V_h}\frac{|a(v_h,w_h)-a_h(v_h,w_h)|}{\|w_h\|_V}\right\}\right.$$

$$\left.+\sup_{w_h\in V_h}\frac{F(w_h)-F_h(w_h)}{\|w_h\|_V}\right).$$

证明 对一切 $v_h\in V_h$，

$$\begin{aligned}\bar{a}_0\|\bar{u}_h-v_h\|_V^2\leqslant a_h(\bar{u}_h-v_h, \bar{u}_h-v_h)=a(U\\ -v_h, \bar{u}_h-v_h)+\{a(v_h, \bar{u}_h-v_h)\\ -a_h(v_h, \bar{u}_h-v_h)\}+\{F_h(\bar{u}_h-v_h)\\ -F(\bar{u}_h-v_h)\},\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\bar{a}_0\|\bar{u}_h-v_h\|_V\leqslant a_1\|U-v_h\|_V\\ +\frac{|a(v_h,\bar{u}_h-v_h)-a_h(v_h,\bar{u}_h-v_h)|}{\|\bar{u}_h-v_h\|_V}\\ +\frac{|F_h(\bar{u}_h-v_h)-F(\bar{u}_h-v_h)|}{\|\bar{u}_h-v_h\|_V}\leqslant a_1\|U-v_h\|_V\\ +\sup_{w_h\in V_h}\frac{|a(v_h, w_h)-a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_V}\\ +\sup_{w_h\in V_h}\frac{|F_h(w_h)-F(w_h)|}{\|w_h\|_V},\end{aligned}$$

把此式与三角不等式

$$\|U-\bar{u}_h\|_V\leqslant\|U-v_h\|_V+\|\bar{u}_h-v_h\|_V$$

结合起来,并对于 $v_h\in V_h$ 在上式取下确界,就得到所证明的结论。

下面以二阶抽象问题来说明上面结果的应用. 设 $V=H^1(\Omega)$ 或 $H_0^1(\Omega)$. $\bar{\Omega}$ 是多面体,并用三角剖分的仿射正则族 $\{C_h\}$ 来覆盖

它，族中的全部有限元都仿射等价于参考元 $(\hat{E}, \hat{\mathscr{D}}, \hat{P})$，并且假定在 $\hat{\mathscr{D}}$ 中至多出现 s 阶导数．把由此得到的有限元空间记为 V_h．用 $\Pi_h v$ 表示函数 v 在 V_h 中的投影，于是

$$\Pi_h v|_E = \Pi_E v, \qquad \forall E \in C_h. \tag{15.46}$$

注记 15.4　若 $n=2$，则 C_h 是三角形剖分．此时条件 $\frac{h_E}{\rho_E} \leqslant \sigma$ 等价于 Zlàmal (1968) 条件，即存在 $\theta_0 > 0$，使得对一切 h 和 $E \in \{C_h\}$，它的最小内角 $\theta_E \geqslant \theta_0$．实际上，Synge (1957) 早就注意到这个事实．此外，还有 Strang(1972a) 的一致性条件，Jamet (1976) 条件等．

今后用 h 表示 $\max\limits_{E \in \{C_h\}} h_E$．

定理 15.11　假设 $\{C_h\}$ 是 $C^0(\bar{\Omega})$类的三角剖分仿射正则族，$P_k \subset \hat{P} \subset H^1(\hat{E})$，$H^{k+1}(\hat{E}) \hookrightarrow C^s(\hat{E})$，其中 $k \geqslant 1$，那末当 $U \in H^{k+1}(\Omega)$ 时，存在与 h 无关的正常数 c_2，使得

$$\|U - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_2 h^k |U|_{H^{k+1}(\Omega)}.$$

证明　因为 $V_h \subset C^0(\bar{\Omega})$，$P_k \in H^1(E)$，故 $V_h \subset V$．又因为 $H^{k+1}(\hat{E}) \hookrightarrow C^s(\hat{E})$，故存在 $\Pi_h U$．应用 (15.46) 并在定理 15.5 中令 $p = q = 2$，$r = 0, 1$，即得到

$$\|U - \Pi_E U\|_{L^2(E)} \leqslant c_3 h_E^{k+1} |U|_{H^{k+1}(E)},$$

$$|U - \Pi_E U|_{H^1(E)} \leqslant c_4 h_E^k |U|_{H^{k+1}(E)},$$

因此

$$\|U - \Pi_E U\|_{H^1(E)} \leqslant c_5 h_E^k |U|_{H^{k+1}(E)},$$

从而

$$\|U - \Pi_h U\|_{H^1(\Omega)} = \Big(\sum_{E \in C_h} \|U - \Pi_h U\|_{H^1(E)}^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant c_6 h^k |U|_{H^{k+1}(\Omega)}.$$

最后应用了定理 15.8．

关于这方面的结果还可见 Babuška, Aziz (1972), Strang, Fix (1973)等人的文献．此外，在上面定理中要求 $H^{k+1}(\hat{E}) \hookrightarrow C^s(\hat{E})$，

当 $k > \frac{n}{2} + s - 1$ 时，它是满足的，否则有较弱的结果，例如下面的定理.

定理 15.12 假设 $\{C_h\}$ 是 $C^0(\bar{\Omega})$ 类的三角剖分仿射正则族，$P_1 \subset \hat{P} \subset H^1(\hat{E})$，$s = 0$ 或 1，$U \in V$，$V = H^1(\Omega)$ 或 $H_0^1(\Omega)$，则 $\lim_{h\to 0} \|U - u_h\|_{H^1(\Omega)} = 0$.

证明 记 $\mathscr{F} = W^{2,\infty}(\Omega) \cap V$，因为 $W^{2,\infty}(\hat{E}) \hookrightarrow C^s(\hat{E})$，$W^{2,\infty}(\hat{E}) \hookrightarrow H^1(\hat{E})$，故可在定理 15.5 中令 $p = \infty$，$q = 2$，$k = r = 1$，从而对任意的 $v \in \mathscr{F}$，

$$\|v - \Pi_E v\|_{H^1(E)} \leqslant c_7(\mathrm{meas}(E))^{\frac{1}{2}} h |v|_{W^{2,\infty}(E)},$$

故当 $h \to 0$ 时，$\|v - \Pi_E v\|_{H^1(\Omega)} \to 0$，另一方面对一切 h 和 $v \in \mathscr{F}$，

$$\|U - \Pi_h v\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \|U - v\|_{H^1(\Omega)} + \|v - \Pi_h v\|_{H^1(\Omega)}.$$

因为 $\mathscr{F}$ 在 V 中稠密，故当 $h \to 0$ 时，$\inf_{v_h \in V_h} \|U - v_h\|_V \to 0$. 最后应用了定理 15.8.

下面用 Aubin-Nitsche 技巧来得到 $L^2(\Omega)$ 中的最佳误差估计. 如果对任意的 $g \in L^2(\Omega)$，(15.43) 的解 $\xi \in H^2(\Omega) \cap V$，并存在正常数 c_8，使得

$$\|\xi\|_{H^2(\Omega)} \leqslant c_8 \|g\|_{L^2(\Omega)}, \tag{15.47}$$

则称它是正则的.

定理 15.13 假设 $\{C_h\}$ 是 $C^0(\bar{\Omega})$ 类的三角剖分仿射正则族，$n \leqslant 3$，$s = 0$，$k \geqslant 1$，$U \in H^{k+1}(\Omega)$，$P_k \subset \hat{P} \subset H^1(\hat{E})$. 那末，当 (15.43) 为正则时，存在一个与 h 无关的正常数 c_9，使得

$$\|U - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c_9 h^{k+1} |U|_{H^{k+1}(\Omega)}.$$

证明 因为 $n \leqslant 3$，所以 $H^2(\hat{E}) \hookrightarrow C^0(\hat{E})$. 在定理 15.5 中令 $p = q = 2$，$k = r = 1$，则有

$$\|\xi - \Pi_h \xi\|_{H^1(E)} \leqslant c_{10} h |\xi|_{H^2(E)}.$$

因此，由 (15.47) 得到

$$\inf_{\xi_h \in V_h} \|\xi - \xi_h\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_{11} h |\xi|_{H^2(\Omega)} \leqslant c_8 c_{11} h \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

最后由定理 15.9 和 15.11 得到

$$\begin{aligned}\|U-u_h\|_{L^2(\Omega)} &\leqslant a_1c_8c_{11}h\|U-u_h\|_{H^1(\Omega)}\\ &\leqslant a_1c_2c_8c_{11}h^{k+1}|U|_{H^{k+1}(\Omega)}.\end{aligned}$$

还有不少关于在 $L^\infty(\Omega)$和 $L^\infty(\Omega^{(1)})$, $\Omega^{(1)}\Subset\Omega$ 中研究误差估计的工作，例如可见 Bramble, Thomée (1974), Bramble, Schatz (1974), Schatz, Wahlbin (1977) 和 Ciarlet (1978) 等人的论著。

下面更具体一些,即假定 $V=H^1(\Omega)$ 或 $V=H_0^1(\Omega)$,

$$a(v,w)=\int_\Omega\left(\sum_{m,l=1}^n \nu_{ml}\frac{\partial U}{\partial x_l}\frac{\partial U}{\partial x_m}\right)dx,\quad F(w)=\int_\Omega fw\,dx,$$

其中 $\nu_{ml}\in W^{k,\infty}(\Omega)$, $f\in W^{k,q}(\Omega)$, 其中 $q\geqslant 2$, $k-\frac{n}{q}\geqslant 0$, 并存在正数 ν_0, 使得在 Ω 上几乎处处有

$$\sum_{m,l=1}^n \nu_{ml}\xi_m\xi_l\geqslant \nu_0\sum_{m=1}^n \xi_m^2.$$

在具体计算时,用数值积分代替 $a(v,w)$ 和 $F(w)$, 从而化为问题 (15.45).

定理 15.14 假设 $\{C_h\}$ 是 $C^0(\bar{\Omega})$ 类的三角剖分仿射正则族, $\hat{P}=P_k$, $k\geqslant 1$, $H^{k+1}(\hat{E})\hookrightarrow C^l(\hat{E})$, $U\in H^{k+1}(\Omega)$, 在 $\hat{E}$ 中采用数值积分,使得所得的 $a_h(v,w)$ 是对 h 一致 V_h 椭圆的,并且对 $p(x)\in P_{2k-2}$, 积分公式是精确成立的,那末有下列误差估计式

$$\begin{aligned}\|U-\bar{u}_h\|_{H^1(\Omega)}\leqslant c_{12}h^k\Big(&|U|_{H^{k+1}(\Omega)}\\ &+\sum_{m,l=1}^n\|\nu_{ml}\|_{W^{k,\infty}(\Omega)}\|U\|_{H^k(\Omega)}+\|f\|_{W^{k,q}(\Omega)}\Big).\end{aligned}$$

有关的工作还可见 Strang (1972b), Strang, Fix (1973) 等人的文章. 对于等参正则有限元的情况，也有类似的结果，可见 Ciarlet, Raviart (1972), Scott (1973), Ciarlet (1978)的文章. 在前面的讨论中,我们总假定 $V_h\subset V$, 它被称为协调元方法，否则被称为非协调元方法,例如 Wilson 砖, Irons 小块检验法等，可见 Wilson, Taylor (1971), Strang (1972b), Irons, Razzaque (1972),

Lesaint (1976) 和 Ciarlet (1978) 的文章. 近年来, Zhong ci shi (1984a,b) 在这方面得到了许多有意义的结果. 对于有角的区域, 或更一般地说,解 U 有奇性的情况可见 Babuška(1972,1974,1976), Barnhill, Whiteman (1973), Nitsche(1976)的文章. 近来, Babuška, Dorr (1981), Guo Ben-qi, Babuška (1985) 还研究了 h-p 型有限元方法,把它应用于上述问题,既可得到较高的精度, 又节省了工作量.

15.5 Петров-Галеркин 方法

本节考虑问题 (15.9), 并假定定理 15.3 的全部条件满足. 设 $V_{h,i}$ 是 V_i 的有限维子空间,所谓用 Петров-Галеркин 方法求近似解是指求 $u_h \in V_{h,1}$, 使得

$$a(u_h, w_h) = F(w_h), \qquad \forall w_h \in V_{h,2}. \qquad (15.48)$$

定理 15.15 (Babuška, Aziz (1972)) 如果下列条件满足,

(i) $\inf\limits_{v_h \in V_{h,1}} \sup\limits_{w_h \in V_{h,2}} \dfrac{a(v_h, w_h)}{\|v_h\|_{V_1}\|w_h\|_{V_2}} = a_0(h) > 0, \quad \forall h,$

(ii) $\sup\limits_{v_h \in V_{h,1}} |a(v_h, w_h)| > 0, \quad \forall w_h \in V_{h,2}, \quad w_h \neq 0,$

则有

$$\|U - u_h\|_{V_1} \leqslant \left(1 + \frac{a_1}{a_0(h)}\right) \inf_{v_h \in V_{h,1}} \|U - v_h\|_{V_1}.$$

证明 由于 $V_{h,2} \subset V_2$, 故对一切 $w_h \in V_{h,2}$, 都有 $a(U - u_h, w_h) = 0$. 设 v_h 是 $V_{h,1}$ 中的任意元素,则有

$$a(U - v_h, w_h) = a(u_h - v_h, w_h),$$

从而

$$|a(u_h - v_h, w_h)| \leqslant a_1\|U - v_h\|_{V_1}\|w_h\|_{V_2}, \quad \forall w_h \in V_{h,2}.$$

并由此得到

$$\sup_{w_h \in V_{h,2}} \frac{|a(u_h - v_h, w_h)|}{\|w_h\|_{V_2}} \leqslant a_1\|U - v_h\|_{V_1}.$$

由定理条件 (i),

$$\sup_{w_h \in V_{h,2}} \frac{a(u_h - v_h, w_h)}{\|w_h\|_{V_2}} \geqslant \alpha_0(h)\|u_h - v_h\|_{V_1},$$

因此

$$\|U - u_h\|_{V_1} \leqslant \|u_h - v_h\|_{V_1} + \|U - v_h\|_{V_1} \leqslant \left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_0(h)}\right)$$

$$\times \|U - v_h\|_{V_1}.$$

对上式取下确界即得所证的结论.

当 $V_1 = V_2$, $V_{h,1} = V_{h,2}$ 时, Петров-Галеркин 方法即为 Галеркин 方法. 但有时仍取 $V_{h,1} \neq V_{h,2}$, 使得得到较好的数值结果. Christie, Griffithe, Mitchell, Zienkiewicz (1976)和 Anderson, Mitchell (1976) 就是基于这个思想提出 Петров-Галеркин 方法的.

例 15.8 设 $\Omega = \{x | 0 < x_1, x_2 < 1\}$, 并考虑下列问题:

$$\begin{cases} -\Delta U + d\nabla \cdot U = f, & x \in \Omega, \\ U = 0, & x \in \Gamma, \end{cases} \tag{15.49}$$

其中 $f \in L^2(\Omega)$, d 是正常数. 当 d 很大时,它是奇异摄动问题.记

$$a(v, w) = \int_\Omega [\nabla v \cdot \nabla w + d(\nabla \cdot v)w]dx,$$

$$F(w) = \int_\Omega fw dx,$$

则把 (15.49) 的广义解问题转化为寻找 $U \in H_0^1(\Omega)$, 使得

$$a(U, w) = F(w), \qquad \forall w \in H_0^1(\Omega). \tag{15.50}$$

下面来验证它满足定理 15.3 的条件. 根据 Lagrange 乘子法,当 $|v|_{H^1(\Omega)} = |w|_{H^1(\Omega)} = 1$ 时, $a(v, w)$ 的上确界在 $J(v, w, \lambda, \mu)$ 的驻点达到,其中

$$J(v, w, \lambda, \mu) = a(v, w) - \frac{1}{2}\lambda(|v|^2_{H^1(\Omega)} - 1)$$

$$- \frac{1}{2}\mu(|w|^2_{H^1(\Omega)} - 1).$$

它的 Euler 方程是

$$\begin{cases}\lambda\Delta v - \Delta w - d\nabla\cdot w = 0, & x\in\Omega,\\ \mu\Delta w - \Delta v + d\nabla\cdot v = 0, & x\in\Omega,\\ v = w = 0, & x\in\Gamma,\\ |v|_{H^1(\Omega)} = |w|_{H^1(\Omega)} = 1.\end{cases} \tag{15.51}$$

把上面的第一、二式分别对 v, w 求内积，把所得的结果相减后得到 $\lambda|v|^2_{H^1(\Omega)} = \mu|w|^2_{H^1(\Omega)}$,即 $\lambda = \mu$, 从而

$$\begin{cases}\lambda\Delta v - \Delta w - d\nabla\cdot w = 0, & x\in\Omega,\\ \lambda\Delta w - \Delta v + d\nabla\cdot v = 0, & x\in\Omega,\\ v = w = 0, & x\in\Gamma.\end{cases} \tag{15.52}$$

这是一个广义特征值问题．可证明存在正常数 c_1，使得对一切 λ，都有 $\lambda\leqslant c_1$．又把 (15.52) 的第一式对 v 求内积,即得到

$$a(v, w) = \lambda|v|^2_{H^1_0(\Omega)} = \lambda\leqslant c_1,$$

因此满足定理 15.3 的条件 (i).

又有

$$\inf_{v\in H^1_0(\Omega)}\sup_{w\in H^1_0(\Omega)}\frac{a(v, w)}{|v|_{H^1_0(\Omega)}|w|_{H^1_0(\Omega)}}\geqslant\inf_{v\in H^1_0(\Omega)}\frac{a(v, v)}{|v|^2_{H^1_0(\Omega)}}\geqslant 1,$$

因此满足定理 15.3 的条件 (ii).

最后,对一切 $w\in H^1_0(\Omega)$, $w\neq 0$, 都有

$$\sup_{v\in H^1_0(\Omega)}|a(v, w)|\geqslant|a(w, w)|\geqslant|w|^2_{H^1_0(\Omega)}>0,$$

所以满足定理 15.3 的条件 (iii).

综合上面的结果,即知问题 (15.50) 有唯一的解.

下面来选取 $V_{h,1}$. 若采用正方形网格剖分,则 V_h 的基函数可取为

$$\varphi^{(j_1,j_2)}(x_1, x_2) = \varphi\left(\frac{x_1}{h} - j_1\right)\varphi\left(\frac{x_2}{h} - j_2\right),$$

其中

$$\varphi(s) = \begin{cases}(1 - |s|), & 当\ |s|\leqslant 1,\\ 0, & 否则.\end{cases}$$

$V_{h,2}$ 的基函数可取为

$$\phi^{(j_1,j_2)}(x_1, x_2) = \phi\left(\frac{x_1}{h} - j_1\right)\phi\left(\frac{x_2}{h} - j_2\right),$$

其中

$$\phi(s) = \varphi(s) + b\sigma(s),$$

b 是非负常数，$\sigma(s) \in H_0^1(-1, 1)$ 是奇函数，并满足

$$\int_0^1 \sigma(s)ds = -\frac{1}{2},$$

例如可取

$$\sigma(s) = \begin{cases} -3s(1-s), & 0 \leqslant s \leqslant 1, \\ -3s(1+s), & -1 \leqslant s \leqslant 0, \\ 0, & |s| > 1. \end{cases}$$

把 $\varphi^{(j_1,j_2)}(x)$，$\phi^{(j_1,j_2)}(x)$ 代入下列方程，即得到具体的计算格式

$$a(u_h, \phi^{(j_1,j_2)}) = F(\phi^{(j_1,j_2)}), \quad \forall \phi^{(j_1,j_2)},$$

可以证明，此格式满足定理 15.15 的条件，因此计算是收敛的．适当地选择 b 和 $\sigma(s)$，可以得到精确的数值结果．特别当 $d \gg 1$ 时，只要 U 在边界附近振荡不太大，则都得到较好的结果．否则，可应用 L-Spline 函数来构造基函数．有关这方面的讨论可见 Griffithe, Lorenz (1977) 等．

如果 V_1 是光滑程度较差的函数空间，而 V_2 则反之，那末，问题 (15.9) 的解就是较弱意义下的广义解，甚至是弱解． Петров-Галеркин 方法很适用于这类问题．

15.6 广义差分方法

如果 (15.9) 的解 U 相当光滑，则可在 Петров-Галеркин 方法中用光滑程度较差的函数空间 $V_{h,2}$ 来逼近 V_2，它一般不是 V_2 的子空间，所以这是一种非协调有限元方法．适当地选择基函数，可使得格式十分简单而又相当精确，并且满足守恒律，因此它又是构造非规则网格差分格式的积分关系法（见 MacNeal (1953), Фрязинов (1979a, b) 等）的一种推广．李荣华 (1982) 称这种方法为广义差分法．为方便计，设 Ω 是平面 (x_1, x_2) 上的多角形，Γ 是分段光滑曲线，$d(x) \in C^\infty(\Omega)$，$d \geqslant 0$，$f \in L^2(\Omega)$，并考虑下列问

题

$$\begin{cases} -\Delta U + dU = f, & x \in \Omega, \\ U = 0, & x \in \Gamma. \end{cases}$$

记

$$a(v, w) = \int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla w + dvw)dx,$$

$$F(w) = \int_\Omega fwdx,$$

则把原问题化为下列变分问题，即找 $U \in H_0^1(\Omega)$，它满足

$$a(U, w) = F(w), \qquad \forall w \in H_0^1(\Omega) \tag{15.53}$$

对Ω进行三角形剖分，用Q表示剖分的顶点，其全体记为 $\bar{\Omega}_h$，$\Omega_h = \bar{\Omega}_h / \Gamma_h$. 设$Q$是任意一个顶点，它的邻点 Q_l 如图 15.6 所示，$1 \leqslant l \leqslant 6$. 用 M_l 表示线段 $\overline{QQ_l}$的中点，在单元三角形 $\Delta(Q, Q_l, Q_{l+1})$内任取一点 q_l（例如可取为重心或外心），从而由点 M_1, q_1, $\cdots$, M_6, q_6 连成的折线围成一个多边形. 它被称为Q的对偶单元 E'_Q，其面积记为 D_Q，边界记为 Γ_Q. 对偶单元的全体组成Ω的一个对偶剖分，它的顶点是 q，q 的全体记为 Ω'_h，q 所在的单元记为 E_q，它的面积记为 D_q. 上述剖分被称为是正则的，如果存在正常数 c_1 和 c_2，使得

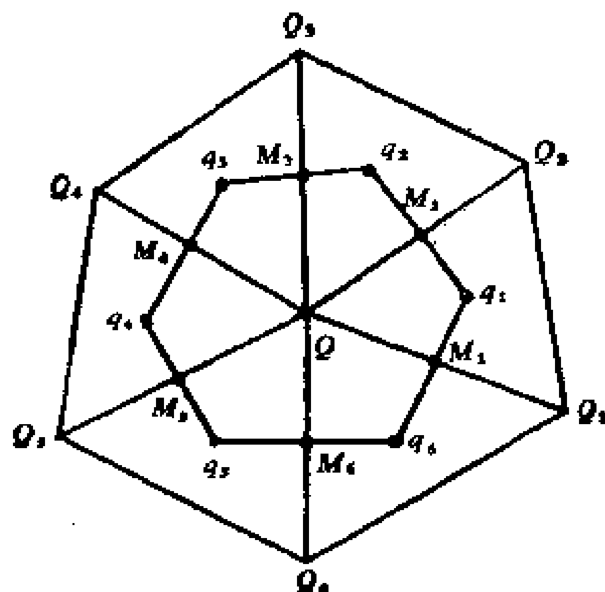


图 15.6

$$c_1h^2 \leqslant D_Q \leqslant c_2h^2, \quad \forall Q \in \Omega_h,$$
$$c_1h^2 \leqslant D_q \leqslant c_2h^2, \quad \forall q \in \Omega'_h.$$

如果w的支集是E'_Q，则由 Green 公式得到

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_1}dx = \int_{E'_Q}\frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_1}dx - \int_{\Gamma_Q}\frac{\partial v}{\partial x_1}wdx_2, \quad (15.54)$$

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial w}{\partial x_2}dx = \int_{E'_Q}\frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial w}{\partial x_2}dx + \int_{\Gamma_Q}\frac{\partial v}{\partial x_2}wdx_1, \quad (15.55)$$

$$\int_\Omega dvwdx = \int_{E'_Q}dvwdx. \quad (15.56)$$

下面来构造$V_{h,l}$。如果$V_{h,1}$是一次 Lagrange 型的，则可取基函数为分片线性函数φ^Q，它满足

$$\varphi^Q(x) = \begin{cases}1, & x = Q,\\ 0, & x \in \bar{\Omega}_h, \quad x \neq Q,\end{cases}$$

而相应的$V_{h,2}$的基底则取为E'_Q的特征函数$\psi^Q(x)$。用$u_h \in V_{h,1}$和ψ^Q分别代替 (15.53) 中的U和w，即得到

$$a(u_h, \psi^Q) = -\int_{\Gamma_Q}\frac{\partial u_h}{\partial x_1}dx_2 + \int_{\Gamma_Q}\frac{\partial u_h}{\partial x_2}dx_1 + \int_{E'_Q}du_h dx$$

$$= \int_{E'_Q}fdx. \quad (15.57)$$

如果将上式中的线积分表示为线段$\widehat{q_lq_{l+1}}$上的线积分的和，并用数值积分来代替，例如

$$\int_{\widehat{q_lq_{l+1}}}\frac{\partial u_h}{\partial x_1}dx_2 \to (\bar{u}_h(Q_{l+1}) - \bar{u}_h(Q)) \cdot \frac{x_2(q_{l+1}) - x_2(q_l)}{x_1(Q_{l+1}) - x_1(Q)},$$

那末，代入 (15.57) 后就得到三角形网格上的守恒型差分格式。

如果把 (15.57) 中的线积分表示为线段$\widehat{M_1q_1M^2}, \cdots, \widehat{M_6q_6M_1}$上的线积分的和，并采用下列数值积分公式

$$\int_{\widehat{M_lq_lM_{l+1}}}\frac{\partial u_h}{\partial x_1}dx_2 \to \frac{\partial \bar{u}_h}{\partial x_1}(q_l)(x_2(M_{l+1}) - x_2(M_l)) \quad (15.58)$$

等，则由 (15.57) 得到

$$\begin{cases}a_h(\bar{u}_h, \psi^Q) = f(Q)D_Q, & \forall Q \in \Omega_h,\\ \bar{u}_h = 0, & x \in \Gamma_h,\end{cases} \quad (15.59)$$

其中

$$a_h(\bar{u}_h, \phi^Q) = -\sum_{l=1}^{N_Q}\left\{\frac{\partial \bar{u}_h}{\partial x_1}(q_l)(x_2(M_{l+1}) - x_2(M_l)) + \frac{\partial \bar{u}_h}{\partial x_2}(q_l)(x_1(M_l) - x_1(M_{l+1}))\right\} + d(Q)\bar{u}_h(Q)D_Q.$$

如果 $V_{h,1}$ 是三次 Hermite 型的，则可把 $V_{h,1}$ 的对应于 Q 的基函数取为 $\varphi_l^Q(x)$，$l = 1, 2, 3$，它们满足

$$\begin{cases} \varphi_0^Q(Q) = 1, \\ \varphi_0^Q(x) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}_h \cup \Omega'_h, \quad x \neq Q, \\ \dfrac{\partial \varphi_0^Q(x)}{\partial x_1} = \dfrac{\partial \varphi_0^Q(x)}{\partial x_2} = 0, \quad x \in \bar{\Omega}_h. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_1^Q(x) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}_h \cup \Omega'_h, \\ \dfrac{\partial \varphi_1^Q(Q)}{\partial x_1} = 1, \\ \dfrac{\partial \varphi_1^Q(x)}{\partial x_1} = 0, \quad x \in \bar{\Omega}_h, \quad x \neq Q, \\ \dfrac{\partial \varphi_1^Q(x)}{\partial x_2} = 0, \quad x \in \bar{\Omega}_h, \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \varphi_2^Q(x) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}_h \cup \Omega'_h, \\ \dfrac{\partial \varphi_2^Q(x)}{\partial x_1} = 0, \quad x \in \bar{\Omega}_h, \\ \dfrac{\partial \varphi_2^Q(Q)}{\partial x_2} = 1, \\ \dfrac{\partial \varphi_2^Q(x)}{\partial x_2} = 0, \quad x \in \bar{\Omega}_h, \quad x \neq Q. \end{cases}$$

$V_{h,1}$ 的对应于 $q \in \Omega'_h$ 的基函数 $\varphi^q(x)$ 则满足下列条件

$$\begin{cases} \varphi^q(q) = 1, \\ \varphi^q(x) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}_h \cup \Omega'_h, \quad x \neq q, \\ \dfrac{\partial \varphi^q(x)}{\partial x_1} = \dfrac{\partial \varphi^q(x)}{\partial x_2} = 0, \quad x \in \bar{\Omega}_h. \end{cases}$$

$V_{h,2}$ 的对应于 Q 的基函数可取为

$$\phi^Q_{\mu_1,\mu_2}(x)=\begin{cases}\dfrac{(x_1-x_1(Q))^{\mu_1}(x_2-x_2(Q))^{\mu_2}}{(\mu_1+\mu_2)!}, & x\in E_{Q'},\\ 0, & x\bar{\in} E_{Q'},\end{cases}$$

其中 $\mu_1,\mu_2=0,1,2,\cdots$. 而对应于 $q\in \Omega'_h$ 的基函数,则满足

$$\phi^q(x)=\begin{cases}1, & x\in E_q,\\ 0, & x\bar{\in} E_q.\end{cases}$$

把上面各式代入 (15.53), 并用数值积分代替其中的线积分,就得到具体的算式. 因为 $\phi^Q(x)$, $\phi^q(x)$ 十分简单,所以计算格式很简便.

下面来估计误差 $\|U-\bar{u}_h\|_{H^1(\Omega)}$. 为方便计,只讨论 (15.57), (15.59) 的情况. 把 $v_h\in V_{h,1}$ 在 $V_{h,2}$ 中的投影记为 $\gamma_h v_h$, 则

$$\gamma_h v_h(x)=\sum_{Q\in\Omega_h} v_h(Q)\varphi^Q_{0,0}(x),$$

因此,对一切 $v\in H^1_0(\Omega)$,

$$a(v,\gamma_h v_h)=\sum_{Q\in\Omega_h} a(v,\phi^Q_{0,0})v_h(Q),$$

$$a_h(v,\gamma_h v_h)=\sum_{Q\in\Omega_h} a_h(v,\phi^Q_{0,0})v_h(Q).$$

设 q 位于三角形单元 $\Delta(Q_1,Q_2,Q_3)$ 内, M_1, M_2 和 M_3 是各边中点,见图 15.7. 又定义

$$I_q(v,\gamma_h v_h)=-v_h(Q_1)\int_{\widehat{M_1qM_3}}\frac{\partial v}{\partial x_1}dx_2-v_h(Q_2)$$

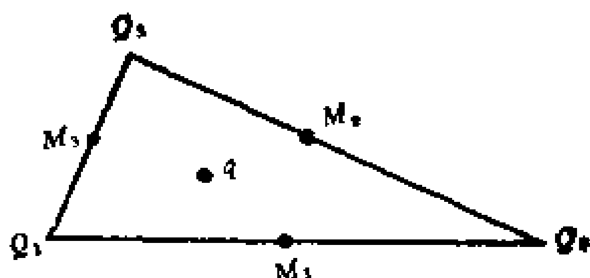


图 15.7

$$\times \int_{\widehat{M_1 q M_1}} \frac{\partial v}{\partial x_1} dx_2 - v_h(Q_3) \int_{\widehat{M_2 q M_2}} \frac{\partial v}{\partial x_1} dx_2$$

$$+ v_h(Q_1) \int_{\widehat{M_3 q M_3}} \frac{\partial v}{\partial x_1} dx_1 + v_h(Q_2)$$

$$\times \int_{\widehat{M_1 q M_1}} \frac{\partial v}{\partial x_2} dx_1 + v_h(Q_3) \int_{\widehat{M_2 q M_2}} \frac{\partial v}{\partial x_2} dx_1,$$

$$\begin{aligned}\tilde{I}_q(v, \gamma_h v_h) = & -\frac{\partial v}{\partial x_1}(q)(v_h(Q_1)(x_2(M_3) - x_2(M_1)) \\ & + v_h(Q_2)(x_2(M_1) - x_2(M_2)) + v_h(Q_3) \\ & \times (x_2(M_2) - x_2(M_3))) + \frac{\partial v}{\partial x_2}(q)(v_h \\ & \times (Q_1)(x_1(M_3) - x_1(M_1)) + v_h(Q_2) \\ & \times (x_1(M_1) - x_1(M_2)) + v_h(Q_3)(x_1(M_2) \\ & - x_1(M_3))),\end{aligned}$$

则

$$a(v, \gamma_h v_h) = \sum_{q \in \Omega_h'} I_q(v, \gamma_h v_h) + \sum_{Q \in \Omega_h} v_h(Q) \int_{E_Q'} dv dx, \quad (15.60)$$

$$a_h(v, \gamma_h v_h) = \sum_{q \in \Omega_h'} \tilde{I}_q(v, \gamma_h v_h) + \sum_{Q \in \Omega_h} v_h(Q) d(Q) v(Q) D_Q.$$

(15.61)

因为在单元 $\Delta(Q_1, Q_2, Q_3)$ 内，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_h}{\partial x_1} = \dfrac{1}{D_q}(v_h(Q_1)(x_2(M_1) - x_2(M_3)) + v_h(Q_2)(x_2(M_2) \\ \qquad - x_2(M_1)) + v_h(Q_3)(x_2(M_3) - x_2(M_2))), \\ \dfrac{\partial v_h}{\partial x_2} = \dfrac{1}{D_q}(v_h(Q_1)(x_1(M_3) - x_1(M_1)) + v_h(Q_2)(x_1(M_1) \\ \qquad - x_1(M_2)) + v_h(Q_3)(x_1(M_2) - x_1(M_3))), \end{cases}$$

所以

$$\tilde{I}_q(v_h, \gamma_h v_h) = D_q\left(\left(\frac{\partial v_h}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_h}{\partial x_2}\right)^2\right). \quad (15.62)$$

若采用下列范数

$$\|v_h\|_h = \Big(\sum_{Q\in\Omega_h} v_h^2(Q)D_Q\Big)^{\frac{1}{2}},$$

$$|v_h|_{1,h} = \Big(\sum_{q\in\Omega'_h} |\nabla v_h|^2 D_q\Big)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|v_h\|_{1,h} = (\|v_h\|_h^2 + |v_h|_{1,h}^2)^{\frac{1}{2}},$$

则它们分别与 $\|v_h\|_{L^2(\Omega)}$, $|v_h|_{H^1(\Omega)}$, 和 $\|v_h\|_{H^1(\Omega)}$ 等价. 因为在 Γ_h 上 $v_h = 0$, 故由 (15.61), (15.62) 可知,存在正常数 b_0, 使得

$$a_h(v_h, \gamma_h v_h) \geqslant \sum_{q\in\Omega'_h} \tilde{I}_q(v_h, \gamma_h v_h) \geqslant b_0\|v_h\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (15.63)$$

因此 $a_h(v_h, \gamma_h v_h)$ 是正定的.

其次有

$$\begin{aligned}
I_q(v_h, \gamma_h v_h) - \tilde{I}_q(v_h, \gamma_h v_h) &= (v_h(Q_2) - v_h(Q_1)) \\
&\times \int_{\widehat{M_3 q}} \Big(\frac{\partial v_h(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial v_h(q)}{\partial x_1}\Big) dx_2 + (v_h(Q_3) - v_h(Q_2)) \\
&\times \int_{\widehat{M_1 q}} \Big(\frac{\partial v_h(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial v_h(q)}{\partial x_1}\Big) dx_2 + (v_h(Q_1) - v_h(Q_3)) \\
&\times \int_{\widehat{M_2 q}} \Big(\frac{\partial v_h(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial v_h(q)}{\partial x_1}\Big) dx_2 + (v_h(Q_1) - v_h(Q_2)) \\
&\times \int_{\widehat{M_3 q}} \Big(\frac{\partial v_h(x)}{\partial x_2} - \frac{\partial v_h(q)}{\partial x_2}\Big) dx_1 + (v_h(Q_2) - v_h(Q_3)) \\
&\times \int_{\widehat{M_1 q}} \Big(\frac{\partial v_h(x)}{\partial x_2} - \frac{\partial v_h(q)}{\partial x_2}\Big) dx_1 + (v_h(Q_3) - v_h(Q_1)) \\
&\times \int_{\widehat{M_2 q}} \Big(\frac{\partial v_h(x)}{\partial x_2} - \frac{\partial v_h(q)}{\partial x_2}\Big) dx_1.
\end{aligned}$$

但当 $v_h \in V_{h0}$ 时,在 $\Delta(Q_1, Q_2, Q_3)$ 内 $\dfrac{\partial v}{\partial x_m}$ 为常数,因此 $I_q(v_h, \gamma_h v_h) = \tilde{I}_q(v_h, \gamma_h v_h)$.

另一方面,由三角剖分的正则性得到

$$\sum_{Q\in\Omega_h}\Big[\int_{K'_Q} |d(x)v_h(x) - d(Q)v_h(Q)|\,|v_h(Q)|\,dx\Big] \leqslant c_3 h\|v_h\|_{1,h}^2.$$

结合以上两式和(15.60),(15.61),就得到

$$|a(v_h, \gamma_h v_h) - a_h(v_h, \gamma_h v_h)| \leqslant c_4 h \|v_h\|_{1,h}^2.$$

所以 $a(v_h, \gamma_h v_h)$ 也是正定的,即存在 $h_0 > 0$ 和 $b_1 > 0$,使得当 $h < h_0$ 时,一致地有

$$a(v_h, \gamma_h v_h) \geqslant b_1 \|v_h\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall v_h \in V_{h,1}. \tag{15.64}$$

现在设 u_h 是未经近似积分时的解,即

$$a(u_h, \phi^Q) = 0, \quad \forall Q \in \Omega_h. \tag{15.65}$$

用 $\Pi_h U$ 表示 U 在 $V_{h,1}$ 中的投影,则有

$$\|U - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \|U - \Pi_h U\|_{H^1(\Omega)} + \|\Pi_h U - u_h\|_{H^1(\Omega)}.$$

由(15.64)得到

$$\begin{aligned}\|\Pi_h U - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leqslant \frac{1}{b_1} a(\Pi_h U - u_h, \gamma_h(\Pi_h U - u_h)) \\ &= \frac{1}{b_1} a(\Pi_h U - U, \gamma_h(\Pi_h U - u_h)),\end{aligned}$$

所以

$$\|\Pi_h U - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \frac{1}{b_1} \sup_{v_h \in V_{h,1}} \frac{|a(U - \Pi_h U, \gamma_h v_h)|}{\|v_h\|_{H^1(\Omega)}}, \tag{15.66}$$

另一方面又有

$$\begin{aligned}a(U - \Pi_h U, \gamma_h v_h) = &\sum_{q \in \Omega'_h} I_q(U - \Pi_h U, \gamma_h v_h) \\ &+ \sum_{Q \in \Omega_h} v_h(Q) \int_{E'_Q} d(U - \Pi_h U) dx,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}I_q(U - \Pi_h U, \gamma_h v_h) = &(v_h(Q_2) - v_h(Q_1)) \int_{\widehat{M_1 q}} \frac{\partial(U - \Pi_h U)}{\partial x_1} dx_2 \\ &+ (v_h(Q_3) - v_h(Q_2)) \int_{\widehat{M_2 q}} \frac{\partial(U - \Pi_h U)}{\partial x_1} dx_2 \\ &+ (v_h(Q_1) - v_h(Q_3)) \int_{\widehat{M_3 q}} \frac{\partial(U - \Pi_h U)}{\partial x_1} dx_2 \\ &+ (v_h(Q_1) - v_h(Q_2)) \int_{\widehat{M_1 q}} \frac{\partial(U - \Pi_h U)}{\partial x_2} dx_1\end{aligned}$$

$$+ (v_h(Q_2) - v_h(Q_3)) \int_{\widehat{M_2 q}} \frac{\partial(U - \Pi_h U)}{\partial x_2} dx_1$$

$$+ (v_h(Q_3) - v_h(Q_1)) \int_{\widehat{M_3 q}} \frac{\partial(U - \Pi_h U)}{\partial x_2} dx_1.$$

因为在 $\Delta(Q_1, Q_2, Q_3)$ 内

$$\left|\frac{\partial U}{\partial x_m} - \frac{\partial \Pi_h U}{\partial x_m}\right| \leqslant c_5 B h,$$

$$|v_h(Q_l) - v_h(Q_{l+1})| \leqslant c_6 h \left(\left|\frac{\partial v_h(\tilde{Q})}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial v_h(\tilde{Q})}{\partial x_2}\right|\right),$$

其中 $\tilde{Q} \in \Delta(Q_1, Q_2, Q_3)$，$B$ 是 U 的二阶导数的最大绝对值，因此由三角剖分的正则性得到

$$|I_q(U - \Pi_h U, \gamma_h v_h)| \leqslant c_7 B h^3 \left(\left|\frac{\partial v_h(\tilde{Q})}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial v_h(\tilde{Q})}{\partial x_2}\right|\right)$$

$$\leqslant c_8 B h D_q \left(\left|\frac{\partial v_h(\tilde{Q})}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial v_h(\tilde{Q})}{\partial x_2}\right|\right).$$

类似地有

$$\left|v_h(Q) \int_{K'_Q} d(U - \Pi_h U) dx\right| \leqslant c_9 B h D_Q |v_h(Q)|.$$

因此

$$|a(U - \Pi_h U, \gamma_h v_h)| \leqslant c_{10} B h \|v_h\|_{H^1(\Omega)}.$$

代人 (15.66) 即得到

$$\|u_h - \Pi_h U\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_{11} B h.$$

又由插值性质得到

$$\|U - \Pi_h U\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_{12} B h,$$

因此

$$\|U - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_{13} B h.$$

进一步还可证明

$$\|U - \bar{u}_h\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_{14} B h.$$

可以把广义差分法推广到更一般的方程和四边形网格（可见李荣华，祝丕琦 (1982) 和祝丕琦，李荣华 (1982)）. 这类格式还包括了 Girault (1974, 1976) 的方法. 此外，广义差分法还显示出，近似解的精度主要依赖于 $V_{h,1}$，而对 $V_{h,2}$ 的光滑程度的依赖

关系不太大。

15.7 最小二乘法

最小二乘法也是一种 Галеркин 方法，其优点是无需选择满足边界条件的基函数。

设 Ω 是 n 维空间中的有界开集，$\Gamma \in C^\infty$，$a_{\alpha\beta}(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$，$L$ 是下列 $2p$ 阶偏微分算子

$$LU = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant p} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x) D^\beta U).$$

又设 $b_{l\alpha}(x) \in C^\infty(\Gamma)$，$B_l$ 表示边界上的 p_l 阶偏微分算子，

$$0 \leqslant p_l \leqslant 2p - 1,$$

$$B_l U = \sum_{|\alpha| \leqslant p_l} b_{l\alpha}(x) D^\alpha U, \quad 0 \leqslant l \leqslant p - 1.$$

f 和 g_l 是已知函数．今考虑下列问题

$$\begin{cases} LU = f, & x \in \Omega, \\ B_l U = g_l, & x \in \Gamma, \quad 0 \leqslant l \leqslant p - 1. \end{cases} \tag{15.67}$$

如果满足下列三个条件，我们就称问题 (15.67) 满足条件 A_1，

(i) L 是一致椭圆的，即存在正常数 a_0, a_1，使得对一切 $x \in \Omega$ 和 $\xi \in \mathscr{R}^n$，都有

$$a_0 |\xi|^{2p} \leqslant \left| \sum_{|\alpha|,|\beta| = p} (-1)^p a_{\alpha\beta}(x) \xi^{\alpha+\beta} \right| \leqslant a_1 |\xi|^{2p}.$$

(ii) $\{B_l\}$ 是正规的，即当 $l \neq l'$ 时，$p_l \neq p_{l'}$，并且对一切 $x \in \Gamma$，

$$\sum_{|\alpha| = p_l} b_{l\alpha}(x) \left(\frac{\partial}{\partial n} \right)^\alpha \neq 0,$$

其中

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial n_1}, \frac{\partial}{\partial n_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial n_n} \right)^*,$$

为方便计，还假定当 $l \neq 0$ 时，$p_0 < p_l$.

(iii) 若 $f \equiv g_l \equiv 0$，则 (15.67) 只有零解．

用 τ 表示下列映射

$$\tau U = (LU,\ B_0U,\ \cdots,\ B_{p-1}U),$$

它映 $C^\infty(\bar{\Omega})$ 到 $C^\infty(\Omega) \times \prod_{l=0}^{p-1} C^\infty(\Gamma)$. 现在按范数的连续性把它完备化. 如果条件 A_1 满足, $q \geqslant 2p$, 那末, τU 是 $H^q(\Omega)$ 与

$$H^{q-2p}(\Omega) \times \prod_{l=0}^{p-1} H^{q-p_l-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

之间的同胚映射,范数 $\|U\|_{H^q(\Omega)}$ 与范数

$$\|LU\|_{H^{q-2p}(\Omega)} + \sum_{l=0}^{p-1} \|B_lU\|_{H^{q-p_l-\frac{1}{2}}(\Omega)}$$

是等价的,其证明可见 Lions, Magenes (1968).

用 $V_h(q, r)$ 表示H^q的有限维子空间,并假定满足条件 A_2, 即存在正常数 c_1, 使得对一切 $v \in H^r(\Omega)$,

$$\inf_{v_h \in V_h(q,r)} \|v - v_h\|_{H^q(\Omega)} \leqslant c_1 h^{r-q} \|v\|_{H^r(\Omega)}.$$

许多空间都满足条件 A_2,可参见 Aubin(1968),Diguglielmo(1969), Hilbert (1969), Schultz (1969),Babuška (1969b)和 Strang(1971) 等人的文章,其中一个特例即为等距网格上的 Spline 函数空间.

Bramble, Schatz (1971) 证明了下列结果:

定理 15.16 若 $V_h(q,r)$ 满足条件 A_2, $2p \leqslant q < r$, 那末对一切

$$F = (f,\ g_0, \cdots,\ g_{p-1}) \in H^\mu(\Omega) \times H^{\mu_0}(\Gamma) \times \cdots \times H^{\mu_{p-1}}(\Gamma),$$

其中

$$0 \leqslant \mu \leqslant r - 2p,\quad 0 \leqslant \mu_l \leqslant r - p_l - \frac{1}{2},$$

都成立

$$\inf_{v_h \in V_h(q,r)} J_1(v_h) \leqslant c_2\left(h^\mu \|f\|_{H^\mu(\Omega)} + \sum_{l=0}^{p-1} h^{-(2p-p_l-\frac{1}{2})+\mu_l} \|g_l\|_{H^{\mu_l}(\Gamma)} \right),$$

其中 c_2 是与 F, h 无关的正常数,

$$J_b(v) = \|f - Lv\|^b_{L^2(\Omega)} + \sum_{l=0}^{p-1} h^{-b(2p-p_l-\frac{1}{2})} \|g_l - B_lv\|^b_{L^2(\Gamma)}.$$

用最小二乘法求 (15.67) 的近似解是指求使 $J_2(v)$ 极小化的

元素 $u_h\in V_h(q,r)$，它的等价变分形式是

$$\int_\Omega (f-Lu_h)Lv_h dx+\sum_{l=0}^{p-1} h^{-2(2p-p_l-\frac{1}{2})}$$

$$\times\int_\Gamma (g_l-B_l u_h)B_l v_h dS=0,\quad \forall v_h\in V_h(q,r).$$

可以应用定理 15.16 估计计算误差.

定理 15.17 假设条件 A_1，A_2 满足，$2p\leqslant q<r$，

$$F\in H^{\lambda-2p}(\Omega)\times\prod_{l=0}^{p-1} H^{\lambda-p_l-\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

那末，

(i) 若 $4p\leqslant r$，则存在正常数 c_3，使得当

$$4p-r\leqslant\rho\leqslant p_0+\frac{1}{2},\quad 2p\leqslant\lambda\leqslant r$$

时，

$$\|U-u_h\|_{H^\rho(\Omega)}\leqslant c_3 h^{\lambda-\rho}\|U\|_{H^\lambda(\Omega)}. \tag{15.68}$$

(ii) 若 $2p<r\leqslant 4p$，$4p-r\leqslant p_0+\dfrac{1}{2}$，则存在正常数 c_4，使得当 $4p-r\leqslant\rho\leqslant p_0+\dfrac{1}{2}$，$2p\leqslant\lambda\leqslant r$ 时，

$$\|U-u_h\|_{H^\rho(\Omega)}\leqslant c_4 h^{\lambda-\rho}\|U\|_{H^\lambda(\Omega)}. \tag{15.69}$$

(iii) 若 $2p<r\leqslant 4p$，$p_0+\dfrac{1}{2}<4p-r$，则存在正常数 c_5，使得当 $2p\leqslant\lambda\leqslant r$ 时，

$$\|U-u_h\|_{H^{p_0+\frac{1}{2}}(\Omega)}\leqslant c_5 h^{r+\lambda-4p}\|U\|_{H^\lambda(\Omega)}. \tag{15.70}$$

注记 15.5 $\|U\|_{H^\lambda(\Omega)}$ 可代以范数

$$\|f\|_{H^{\lambda-2p}(\Omega)}+\sum_{l=0}^{p-1}\|g_l\|_{H^{\lambda-p_l-\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

注记 15.6 当 $4p\leqslant r$ 时，可由 (15.68) 得到最佳估计

$$\|U-u_h\|_{L^2(\Omega)}\leqslant c_3 h^\lambda\|U\|_{H^\lambda(\Omega)}.$$

关于内部估计则有下列结果:

定理 15.18 若定理 15.17 的条件满足，$\Omega^{(1)}\Subset\Omega$，则当

$$4p - r \leqslant \rho \leqslant 2p, \quad \rho \leqslant \lambda, \quad 2p \leqslant \lambda \leqslant r$$

时,

$$\|U - u_h\|_{H^\rho(\Omega^{(1)})} \leqslant c_6 h^{\lambda-\rho}\|U\|_{H^\lambda(\Omega)}.$$

例 15.9 考虑下列方程

$$\begin{cases} \Delta^2 U = f, & x \in \Omega, \\ U = g_1, & x \in \Gamma, \\ \dfrac{\partial U}{\partial n} = g_2, & x \in \Gamma. \end{cases}$$

它的最小二乘法近似解 $u_h \in V_h(q, r)$ 满足

$$\int_\Omega (f - \Delta^2 u_h)\Delta^2 v_h dx + h^{-7}\int_\Gamma (g_1 - u_h)v_h dS$$
$$+ h^{-5}\int_\Gamma \left(g_2 - \frac{\partial u_h}{\partial n}\right)\frac{\partial v_h}{\partial n}\,dS = 0,$$
$$\forall v_h \in V_h(q, r).$$

若取 $q = 4$, $r = 6$, $V_h(q, r)$ 是五次 Spline 函数空间,那末由 (15.70) 得到

$$\|U - u_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} \leqslant c_7 h^4\|U\|_{H^6(\Omega)};$$

特别当 $\Omega^{(1)} \Subset \Omega$, $2 \leqslant \rho \leqslant 4$ 时,

$$\|U - u_h\|_{H^\rho(\Omega^{(1)})} \leqslant c_8 h^{6-\rho}\|U\|_{H^6(\Omega)}.$$

若取 $q = 4$, $r = 8$, 则由 (15.68) 得到

$$\|U - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c_9 h^8\|U\|_{H^8(\Omega)};$$

特别当 $\Omega^{(1)} \Subset \Omega$, $0 \leqslant \rho \leqslant 4$ 时,

$$\|U - u_h\|_{H^\rho(\Omega^{(1)})} \leqslant c_{10} h^{8-\rho}\|U\|_{H^8(\Omega)}.$$

可应用最小二乘法解内接触面问题. 例如设 $\Omega = \Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}$, $\Omega^{(1)} \Subset \Omega$, 内边界为 $\Gamma^{(1)}$, 我们考虑下列问题

$$\begin{cases} -\Delta U^{(l)} = f_l, & x \in \Omega^{(l)}, \quad l = 1, 2, \\ d_1 U^{(1)} - U^{(2)} = g_1, & x \in \Gamma^{(1)}, \\ d_2 \dfrac{\partial U^{(1)}}{\partial n} - \dfrac{\partial U^{(2)}}{\partial n} = g_2, & x \in \Gamma^{(1)}, \\ U^{(2)} = g, & x \in \Gamma, \end{cases} \tag{15.71}$$

其中 d_1, d_2 是正常数,并记 $U = (U^{(1)}, U^{(2)})$.

用 $V_h^{(i)}(q,r)$ 表示 $H^q(\Omega^{(i)})$ 的有限维子空间，并假定满足条件 A_3，即存在正常数 c_{11}，使得对一切 $v\in H^r(\Omega^{(1)})\times H^r(\Omega^{(2)})$，

$$\inf_{v_h\in V_h^{(1)}(q,r)\times V_h^{(2)}(q,r)} |||v-v_h|||^{(q)}\leqslant c_{11}h^{r-q}|||v|||^{(r)},$$

其中

$$\begin{aligned}|||v|||^{(q)}=&\|\Delta v^{(1)}\|_{H^{q-2}(\Omega^{(1)})}+\|\Delta v^{(2)}\|_{H^{q-2}(\Omega^{(2)})}\\&+\|d_1v^{(1)}-v^{(2)}\|_{H^{q-\frac{1}{2}}(\Gamma^{(1)})}\\&+\left\|d_2\frac{\partial v^{(1)}}{\partial n}-\frac{\partial v^{(2)}}{\partial n}\right\|_{H^{q-\frac{3}{2}}(\Gamma^{(1)})}\\&+\|v^{(2)}\|_{H^{q-\frac{1}{2}}(\Gamma)}.\end{aligned}$$

今假定 $2\leqslant q<r$，那末(15.71)的最小二乘法近似解 $u_h\in V_h^{(1)}(q,r)\times V_h^{(2)}(q,r)$满足

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega^{(1)}}(f_1+\Delta u_h^{(1)})\Delta v_h^{(1)}dx+\int_{\Omega^{(2)}}(f_2+\Delta u_h^{(2)})\Delta v_h^{(2)}dx\\&\quad+h^{-3}\int_{\Gamma^{(1)}}(g_1-d_1u_h^{(1)}+u_h^{(2)})(d_1v_h^{(1)}-v_h^{(2)})dS\\&\quad+h^{-1}\int_{\Gamma^{(1)}}\left(g_2-d_2\frac{\partial u_h^{(1)}}{\partial n}+\frac{\partial u_h^{(2)}}{\partial n}\right)\\&\quad\times\left(d_2\frac{\partial v_h^{(1)}}{\partial n}-\frac{\partial v_h^{(2)}}{\partial n}\right)dS+h^{-3}\int_{\Gamma}(g-u_h^{(2)})\\&\quad\times v_h^{(2)}dS=0,\quad\forall v_h\in V_h^{(1)}(q,r)\times V_h^{(2)}(q,r).\end{aligned}$$

定理 15.19 假设条件 A_3 成立，且 $2\leqslant q<r$，$r\geqslant 4$，$2\leqslant\lambda\leqslant r$，$F=(f_1,f_2,g_1,g_2,g)\in H^{\lambda-2}(\Omega^{(1)})\times H^{\lambda-2}(\Omega^{(2)})\times H^{\lambda-\frac{1}{2}}(\Gamma^{(1)})\times H^{\lambda-\frac{3}{2}}(\Gamma^{(1)})\times H^{\lambda-\frac{1}{2}}(\Gamma)$，那末存在正常数 c_{13}，使得

$$\begin{aligned}|||U-u_h|||^{(0)}\leqslant c_{13}h^{\lambda}|||U|||^{(\lambda)}\leqslant& c_{13}h^{\lambda}(\|f_1\|_{H^{\lambda-2}(\Omega^{(1)})}\\&+\|f_2\|_{H^{\lambda-2}(\Omega^{(2)})}+\|g_1\|_{H^{\lambda-\frac{1}{2}}(\Gamma^{(1)})}+\|g_2\|_{H^{\lambda-\frac{3}{2}}(\Gamma^{(1)})}\\&+\|g\|_{H^{\lambda-\frac{1}{2}}(\Gamma)}).\end{aligned}$$

例 15.10 设 $\Omega=\Omega^{(1)}\cup\Omega^{(2)}$，$\Omega^{(1)}\Subset\Omega$，并考虑下列问题

$$\begin{cases}-\Delta U=f, & x\in\Omega,\\U=0, & x\in\Gamma,\end{cases}$$

其中

$$f = \begin{cases} 1, & x \in \Omega^{(1)}, \\ 0, & x \in \Omega^{(2)}. \end{cases}$$

显然 $f \in L^2(\Omega)$，从而 $U \in H^2(\Omega)$．若取 $q \geqslant 2$，$r \geqslant 4$，则由定理 15.17 得到

$$\|U - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c_{14} h^2 \|U\|_{H^2(\Omega)}.$$

若把上述问题视为内接触面问题

$$\begin{cases} -\Delta U^{(1)} = 1, & x \in \Omega^{(1)}, \\ -\Delta U^{(2)} = 0, & x \in \Omega^{(2)}, \\ U^{(1)} - U^{(2)} = 0, & x \in \Gamma^{(1)}, \\ \dfrac{\partial U^{(1)}}{\partial n} - \dfrac{\partial U^{(2)}}{\partial n} = 0, & x \in \Gamma^{(1)}, \\ U^{(2)} = 0, & x \in \Gamma. \end{cases}$$

那末 $U^{(l)} \in C^\infty(\bar{\Omega}^{(l)})$．取 $q \geqslant 2$，$r \geqslant 4$，则由定理 15.19 得到

$$|||U - u_h|||^{(0)} \leqslant c_{15} h^r |||U|||^{(r)},$$

从而得到较好的数值结果．

15.8 不等方程的 Галеркин 方法

本节介绍解 (15.2) 的 Галеркин 方法．设 V_h 是 V 的 N 维子空间，K_h 是 V_h 中的一个闭凸子集．问题 (15.2) 的 Галеркин 方法近似解是指 $u_h \in K_h$，它满足

$$a(u_h, w_h - u_h) \geqslant F(w_h - u_h), \quad \forall w_h \in K_h. \quad (15.72)$$

对一切 v, $w \in V$，引入从 V 到 V' 的映射 $\mathscr{A}$，

$$\mathscr{A} v(w) = a(v, w).$$

为了估计误差，还如同 § 15.4 那样，引入另一个 Hilbert 空间 H，使得 $\bar{V} = H$ 具有一个连续的嵌入映射 τ．我们可以把 H 与 V' 的一个子空间等同起来．Falk (1974) 得到了下列基本结果：

定理 15.20 设 $F \in H$，$\mathscr{A} U \in H$，则存在一个与 V_h，K_h 无关的正常数 c_1，使得

$$\|U - u_h\|_V \leqslant c_1 \Big(\inf_{w_h \in K_h} \{\|U - w_h\|_V^2 + \|U - w_h\|_H\} + \inf_{w \in K} \|u_h - w\|_H \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

证明 下面要证明结论包括 $a(v,w)$ 为非对称时情况。我们有

$$
\begin{aligned}
a_0\|U-u_h\|_V^2 &\leqslant a(U-u_h,\ U-u_h) \\
&= a(U,U)+a(u_h,u_h)-a(U,u_h) \\
&\quad -a(u_h,U).
\end{aligned}
$$

由(15.2),(15.72)得到

$$
\begin{aligned}
&a(U,U)\leqslant a(U,w)+F(U-w), \qquad \forall w\in K, \\
&a(u_h,u_h)\leqslant a(u_h,w_h)+F(u_h-w_h), \quad \forall w_h\in K_h.
\end{aligned}
$$

因为 $K_h\subset V_h\subset V$，所以对一切 $w\in K$ 和 $w_h\in K_h$，都有

$$
\begin{aligned}
a_0\|U-u_h\|_V^2 &\leqslant a(U,w-u_h)+a(u_h,w_h-U) \\
&\quad +F(U-w)+F(u_h-w_h) \\
&= a(U,w-u_h)-F(w-u_h)+a(U,w_h \\
&\quad -U)-F(w_h-U)+a(u_h-U,w_h-U) \\
&= (F-AU,U-w_h)_H+(F-\mathscr{A}U,u_h \\
&\quad -w)_H+a(U-u_h,U-w_h),
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
a_0\|U-u_h\|_V^2 &\leqslant \|F-\mathscr{A}U\|_H(\|U-w_h\|_H+\|u_h-w\|_H) \\
&\quad +a_1\|U-u_h\|_V\|U-w_h\|_V.
\end{aligned}
$$

另一方面又有

$$
\begin{aligned}
\|U-u_h\|_V\|U-w_h\|_V \leqslant \frac{1}{2}\Big(&\frac{a_0}{a_1}\|U-u_h\|_V^2 \\
&+\frac{a_1}{a_0}\|U-w_h\|_V^2\Big).
\end{aligned}
$$

综合上面两式就得到

$$
\begin{aligned}
\frac{a_0}{2}\|U-u_h\|_V^2 &\leqslant \|F-\mathscr{A}U\|_H(\|U-w_h\|_H+\|u_h \\
&\quad -w\|_H)+\frac{a_1^2}{2a_0}\|U-w_h\|_V^2,
\end{aligned}
$$

由此即推得定理的结论。

注记 15.7 若 $V=K$，则 $F=\mathscr{A}U$，从而得到定理 15.8 的结论。

注记 15.8 若不引入 H，则有

$$\frac{\alpha_0}{2}\|U-u_h\|_V^2 \leqslant \|F-\mathscr{A}U\|'(\|U-w_h\|_V+\|u_h-w\|_V)$$
$$+\frac{\alpha_1^2}{2\alpha_0}\|U-w_h\|_V^2.$$

一般说来，$\inf\limits_{w_h\in K_h}\|U-w_h\|_H$ 比 $\inf\limits_{w_h\in K_h}\|U-w_h\|_V$ 的阶数高，所以定理 15.20 给出较佳的误差估计.

例 15.11 考虑例 15.5 中的障碍问题. 假定 $\bar{\Omega}$ 是多角形，用 $\{C_h\}$ 表示 $\bar{\Omega}$ 的一个三角剖分仿射正则族. V_h 是在 $\bar{\Omega}$ 上分片线性的连续函数空间，其自由度是三角剖分顶点上的函数值. 用 Σ_x 表示全体顶点的集合，$K_h=\{v_h\in V_h/v_h(x)\geqslant G(x),\ x\in\Sigma_x\}$. 于是，计算 (15.17) 的格式是

$$\int_\Omega \nabla u_h\cdot\nabla(w_h-u_h)dx\geqslant\int_\Omega f(w_h-u_h)dx,\ \ \forall w_h\in K_h,\tag{15.73}$$

假设 φ_l 是 K_h 的基函数，

$$u_h(x)=\sum_{l=1}^N u_{h,l}\varphi_l(x),$$

把它代入(15.73)，就得到一组关于 $u_{h,l}$ 的线性不等式，而 K_h 则是 $\mathscr{R}^*$ 中的一个凸集. 它是 Kuhm-Tucker 定理的一种特殊形式(见 Abadie (1967))，所以可采用凸规划中的种种解法来计算它. 尚可证明，若 $U\in H^2(\Omega)$，则 $\|U-u_h\|_{H^1(\Omega)}=O(h)$.

关于变分不等式的数值方法可见 Баиокки, Мадженес(1974), Glowinski, Lions, Tremolieres(1974), Mosco, Scarpini(1975), Falk (1975) 和 Nitsche (1977) 等人的论著.

15.9 Schwarz 方法

如果 Γ 具有角点，或者在 Ω 的低维流形上，泛函 $J(v)$ 中的系数(或者等价的椭圆型方程边值问题的系数)具有奇异性，那末都会给计算带来困难. 为了克服这个困难，Schwarz (1890) 最早采用了区域分裂方法求解 Laplace 方程的 Dirichlet 问题，Picard(1890)

称它为 Schwarz 交替方法．后来 Соболев (1936) 证明了这种方法的收敛性，Михлин (1951, 1952) 又把结果推广到一般的二阶椭圆型方程．此外，梅索夫斯基赫(1959)，康立山，王德人(1959)，Miller (1965) 把它应用于差分方法．Lions (1978) 则把它推广到变分不等式．

现在以问题 (15.1) 为例来说明 Schwarz 方法．假定定理 15.1 的全部条件满足，那末，存在唯一的解 $U(x)$．又假设 Ω 如图 15.8 所示，$\Gamma=\Gamma^{(1)}\cup\Gamma^{(2)}$，$\tilde{\Gamma}^{(l)}$ 是两个足够光滑的内边界曲面，并把由 $\Gamma^{(l)}$ 和 $\tilde{\Gamma}^{(l)}$ 所围成的区域记为 $\Omega^{(l)}$．假设

$$J(v)=J_\Omega(v)=J_{\Omega^{(l)}}(v)+J_{\Omega/\Omega^{(l)}}(v),\quad l=1,2,$$

并且下列问题

$$\inf_{v\in K(\Omega^{(l)})} J_{\Omega^{(l)}}(v)$$

是唯一可解的．

所谓 Schwarz 方法是从任意的 $u^{(0)}\in K(\Omega)$ 出发，构造一个 Schwarz 序列 $\{u^{(p)}\}$，它满足

$$\begin{cases}J_{\Omega^{(1)}}(u_1^{(p)})=\inf\limits_{v\in K_1^{(p)}(\Omega)} J_{\Omega^{(1)}}(v),\\ u_1^{(p)}=u^{(p-1)}, \qquad x\in\Omega/\Omega^{(1)},\end{cases}\tag{15.74}$$

$$\begin{cases}J_{\Omega^{(2)}}(u^{(p)})=\inf\limits_{v\in K_2^{(p)}(\Omega)} J_{\Omega^{(2)}}(v),\\ u^{(p)}=u_1^{(p)}, \qquad x\in\Omega/\Omega^{(2)},\end{cases}\tag{15.75}$$

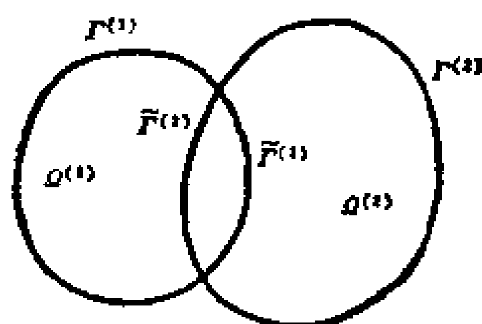


图 15.8

其中

$$K_1^{(p)}(\Omega)=\{v\in K(\Omega)/\text{在 }\tilde{\Gamma}^{(1)}\text{ 上},\ v=u^{(p-1)}\},$$
$$K_2^{(p)}(\Omega)=\{v\in K(\Omega)/\text{在 }\tilde{\Gamma}^{(2)}\text{上},\ v=u_1^{(p)}\}.$$

定理 15.21 如果前面的假定成立，并且 $\tilde{\Gamma}^{(1)}\subset\Omega^{(2)}$，$\tilde{\Gamma}^{(2)}\subset\Omega^{(1)}$，则

$$\lim_{p\to\infty}J_\Omega(u^{(p)})=\inf_{v\in K(\Omega)}J_\Omega(v)=J(U).$$

证明 首先，若 $u^{(p)}\not\equiv u^{(p-1)}$，则 $J_\Omega(u^{(p)})<J_\Omega(u^{(p-1)})$。事实上，

$$\begin{aligned}J_\Omega(u^{(p)})&=J_{\Omega^{(2)}}(u^{(p)})+J_{\Omega/\Omega^{(2)}}(u^{(p)})=\inf_{v\in K_2^{(p)}(\Omega)}J_{\Omega^{(2)}}(v)\\&\quad+J_{\Omega/\Omega^{(2)}}(u_1^{(p)})\leqslant J_{\Omega^{(2)}}(u_1^{(p)})+J_{\Omega/\Omega^{(2)}}(u_1^{(p)})\\&=J_\Omega(u_1^{(p)})=J_{\Omega^{(1)}}(u_1^{(p)})+J_{\Omega/\Omega^{(1)}}(u_1^{(p)})\\&=\inf_{v\in K_1^{(p)}(\Omega)}J_{\Omega^{(1)}}(v)+J_{\Omega/\Omega^{(1)}}(u^{(p-1)})\leqslant J_{\Omega^{(1)}}(u^{(p-1)})\\&\quad+J_{\Omega/\Omega^{(1)}}(u^{(p-1)})=J_\Omega(u^{(p-1)}).\end{aligned}$$

若 $J_{\Omega^{(2)}}(u^{(p)})<J_{\Omega^{(2)}}(u_1^{(p)})$，则显然有 $J_\Omega(u^{(p)})<J_\Omega(u^{(p-1)})$。若 $J_{\Omega^{(2)}}(u^{(p)})=J_{\Omega^{(2)}}(u_1^{(p)})$，则 $u^{(p)}\equiv u_1^{(p-1)}\not\equiv u^{(p-1)}$，从而

$$J_{\Omega^{(1)}}(u_1^{(p)})<J_{\Omega^{(1)}}(u^{(p-1)}),$$

所以也有 $J_\Omega(u^{(p)})<J_\Omega(u^{(p-1)})$。因此序列 $\{J_\Omega(u^{(p)})\}$ 有极限。可以证明它恰为 $J_\Omega(U)$。若不然，则有

$$\lim_{p\to\infty}J_\Omega(u^{(p)})>J_\Omega(U).$$

今选取 $u^{(0)}=U$，并构造 Schwarz 序列 $\{u^{(p)}\}$，则

$$J_\Omega(u^{(p)})<J_\Omega(U),$$

而这显然是矛盾的。

根据上述定理，可以从中选取一个子列，仍记为 $\{u^{(p)}\}$，使得它弱收敛到 U。

可以把 Schwarz 方法推广到多个分区域的情况。例如设 Ω 由 $\{\Omega^{(l)}\}$，$1\leqslant l\leqslant q$ 所复盖，各自的内边界为 $\tilde{\Gamma}^{(l)}$。

记 $u_0^{(p)}=u^{(p-1)}$，$u_q^{(p)}=u^{(p)}$，并定义

$$K_l^{(p)}(\Omega)=\{v\in K(\Omega)/\text{在 }\tilde{\Gamma}^{(l)}\text{ 上}, v=u_{l-1}^{(p)}\},\quad 1\leqslant l\leqslant q.$$

于是，Schwarz 序列可定义为

$$\begin{cases}J_{\Omega^{(l)}}(u_l^{(p)})=\inf\limits_{v\in K_l^{(p)}(\Omega)}J_{\Omega^{(l)}}(v),\\u_l^{(p)}=u_{l-1}^{(p)},\qquad x\in\Omega/\Omega^{(l)}.\end{cases}$$

若满足与定理 15.21 类似的条件，则 $\{J(u_l^{(p)})\}$ 也是一个极小化序列. 关于这方面的工作可见康立山 (1979)，Kang Lishang (1981) 等人的文章.

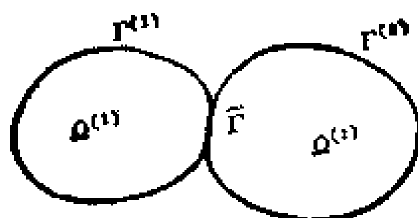


图 15.9

Dinh, Glowinski, Periaux (1980) 从 Lagrange 乘子法出发，构造了另一种算法. 假设区域 Ω 如图 15.9 所示. 记

$$\mathscr{W} = \{(v^{(1)}, v^{(2)}) \in K(\Omega^{(1)}) \times K(\Omega^{(2)}) / \text{在} \tilde{\Gamma} \text{上}, v^{(1)} = v^{(2)}\},$$

其中 $K(\Omega^{(l)})$ 与 $K(\Omega)$ 相对应，且 $K(\Omega^{(l)}) \subset V(\Omega^{(l)})$. 于是，求解 (15.1) 的问题等价于寻找 $\{U^{(1)}, U^{(2)}\} \in \mathscr{W}$，使得

$$J_{\Omega^{(1)}}(U^{(1)}) + J_{\Omega^{(2)}}(U^{(2)}) = \inf_{(v^{(1)}, v^{(2)}) \in \mathscr{W}} \sum_{l=1}^{2} J_{\Omega^{(l)}}(v^{(l)}), \quad (15.76)$$

在具体计算时引入辅助泛函 $\tilde{J}$，

$$\tilde{J}(v^{(1)}, v^{(2)}, \mu) = \sum_{l=1}^{2} J_{\Omega^{(l)}}(v^{(l)}) + \int_{\tilde{\Gamma}} \mu[v^{(2)} - v^{(1)}] ds. \quad (15.77)$$

记

$$\tilde{\mathscr{W}} = \{(v^{(1)}, v^{(2)}) \in K(\Omega^{(1)}) \times K(\Omega^{(2)})\}.$$

$\tilde{\mathscr{F}}$ 是定义在 $\tilde{\Gamma}$ 上的某个函数空间. 如果 $(U^{(1)}, U^{(2)}, \lambda) \in \tilde{\mathscr{W}} \times \tilde{\mathscr{F}}$，并且对一切 $(v^{(1)}, v^{(2)}, \mu) \in \tilde{\mathscr{W}} \times \tilde{\mathscr{F}}$，满足

$$\tilde{J}(U^{(1)}, U^{(2)}, \mu) \leqslant \tilde{J}(U^{(1)}, U^{(2)}, \lambda) \leqslant \tilde{J}(v^{(1)}, v^{(2)}, \lambda),$$

则称 $(U^{(1)}, U^{(2)}, \lambda)$ 是 $\tilde{J}$ 的驻点. 如果适当地选取 $\tilde{\mathscr{F}}$，则可证明在 $\Omega^{(l)}$ 上，U 等于驻点值 $U^{(l)}$.

例 15.12 设 $n = 2$，$f \in L^2(\Omega)$，$g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$，并考虑下列问题

$$\begin{cases} -\Delta U = f, & x \in \Omega, \\ U = g, & x \in \Gamma. \end{cases}$$

记 $V = H^1(\Omega)$, $K = \{v \in H^1(\Omega) /$ 在 Γ 上, $v = g\}$, 则上述问题等价于

$$J(U) = \inf_{v \in K} J(v),$$

其中

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_{\Omega}(|\nabla v|^2 - 2fv)\,dx.$$

若 Ω 如图 15.8 所示,则可构造 Schwarz 序列 $\{u^{(p)}\}$, 它满足

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{(p)} = f, & x \in \Omega^{(1)}, \\ u_1^{(p)} = g, & x \in \Gamma^{(1)}, \\ u_1^{(p)} = u^{(p-1)}, & x \in \tilde{\Gamma}^{(1)}. \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} -\Delta u^{(p)} = f, & x \in \Omega^{(2)}, \\ u^{(p)} = g, & x \in \Gamma^{(2)}, \\ u^{(p)} = u_1^{(p)}, & x \in \tilde{\Gamma}^{(2)}. \end{cases}$$

如果 Ω 如图 15.9 所示,则令

$$\mathscr{W} = \{(v^{(1)}, v^{(2)}) \in H^1(\Omega^{(1)}) \times H^1(\Omega^{(2)}) / \text{在}\ \Gamma^{(l)}\ \text{上}, v^{(l)} = g\},$$

$$\tilde{\mathscr{F}} = L^2(\tilde{\Gamma});$$

$$\tilde{J}(v^{(1)}, v^{(2)}, \mu) = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2}\int_{\Omega^{(l)}}(|\nabla v^{(l)}|^2 - 2fv^{(l)})\,dx + \int_{\tilde{\Gamma}}\mu(v^{(2)} - v^{(1)})\,ds.$$

于是,在 $\Omega^{(l)}$ 内 $U = U^{(l)}$, 其中 $(U^{(1)}, U^{(2)}, \lambda)$ 是 $\tilde{J}$ 的驻点.

Stoutemyer (1973) 应用 Schwarz 方法设计了透镜, Dinh, Glowinski, Periaux (1980) 应用它求解 Navier-Stokes 方程, 康立山 (1982) 则根据这个原理提出了一类新型的异步并行算法,详见康立山,孙东林,陈毓屏 (1985) 等人的文章.

15.10 配置方法

建立椭圆型方程差分格式的另一个重要途径是利用配置法. Карпиловская (1970) 等较早地应用多项式配置线性椭圆型方程,

以后的工作可见 Ito (1972), Cavendish (1972) 和 Prenter (1975) 的文章. 在工程中还常用 Spline 函数来配置. 本节只介绍这种配置方法.

假定区间 $\mathscr{I}=\{s/0\leqslant s\leqslant 1\}$ 被点 s_j 所剖分, $0\leqslant j\leqslant N$. 所谓 p 次 Spline 函数空间S_p是属于 $C^{p-1}(\mathscr{I})$, 并在 $\{s/s_j\leqslant s\leqslant s_{j+1}\}$ 中为 p 次多项式的函数的全体. 对应于不同的N和 p, S_p的维数也不同. 最常用的是 S_3, 它的维数为 $N+3$. 关于 Spline 函数的介绍可见 Ahlberg, Nilson, Walsh (1967), Greville (1969) 和 Schultz(1973) 的论著.

为方便计,下面假定 $Nh=1$, $s_j=s_{j-1}+h$. 所谓三次 B-Spline 函数是指下面形式的函数 $B_j(s)$,

$$h^3B_j(s)=\begin{cases}(s-s_{j-2})^3, & s_{j-2}\leqslant s\leqslant s_{j-1},\\ h^3+3h^2(s-s_{j-1})+3h(s-s_{j-1})^2 & \\ \qquad -3(s-s_{j-1})^3, & s_{j-1}\leqslant s\leqslant s_j,\\ h^3+3h^2(s_{j+1}-s)+3h(s_{j+1}-s)^2 & \\ \qquad -3(s_{j+1}-s)^3, & s_j\leqslant s\leqslant s_{j+1},\\ (s_{j+2}-s)^3, & s_{j+1}\leqslant s\leqslant s_{j+2},\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

$B_j(s)$ 的形状如图 15.10. 若记

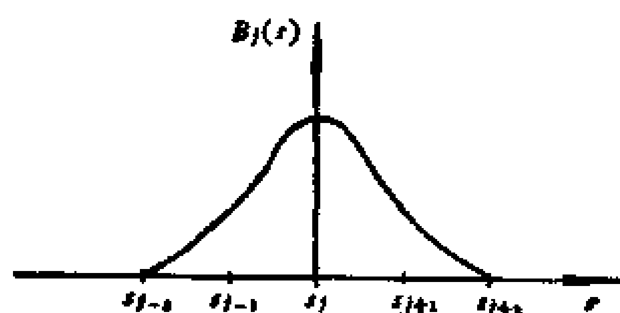


图 15.10

$$B_j'(s)=\frac{dB_j(s)}{ds},\quad B_j''(s)=\frac{d^2B_j(s)}{ds^2},$$

那末在相邻点s_j上的函数值如图 15.11 所示. 可以证明, $\{B_{-1}(s), B_0(s), \cdots, B_{N+1}(s)\}$ 组成了 S_3 的一组基函数.

	s_{j-2}	s_{j-1}	s_j	s_{j+1}	s_{j+2}
$B_j(s)$	0	1	4	1	0
$B_j'(s)$	0	$\frac{3}{h}$	0	$-\frac{3}{h}$	0
$B_j''(s)$	0	$\frac{6}{h^2}$	$-\frac{12}{h^2}$	$\frac{6}{h^2}$	0

图 15.11

在实际应用时,还常常需要考虑

$$S_3^0 = \{v/v \in S_3,\ v(0) = v(1) = 0\}.$$

可以证明,下面的函数序列 $\{\hat{B}_0(s),\ \hat{B}_1(s), \cdots, \hat{B}_N(s)\}$ 是 S_3^0 的一组基函数

$$\begin{cases} \hat{B}_0(s) = B_0(s) - 4B_{-1}(s), \\ \hat{B}_1(s) = B_0(s) - 4B_1(s), \\ \hat{B}_j(s) = B_j(s), \qquad 2 \leqslant j \leqslant N-1, \\ \hat{B}_{N-1}(s) = B_N(s) - 4B_{N-1}(s), \\ \hat{B}_N(s) = B_N(s) - 4B_{N+1}(s). \end{cases} \tag{15.78}$$

于是根据图 15.11, $\hat{B}_0(s)$, $\hat{B}_1(s)$ 在端点附近的值分别由图 15.12 和 15.13 所示。

类似地可以得到 $\hat{B}_{N-1}(s)$ 和 $\hat{B}_N(s)$ 在点 $s = 1-h,\ 1,\ h$ 上的值.

下面举例说明怎样来配置格式. 设 $\Omega = \{x/0 < x_1, x_2 < 1\}$, $f \in C^2(\bar{\Omega})$, 并考虑下列问题

$$\begin{cases} LU(x) = -\Delta U(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ U(x) = 0, & x \in \Gamma. \end{cases} \tag{15.79}$$

设 $Nh = 1$, 剖分点为 $(j_1h,\ j_2h)$, 并令近似解为 $u_h(x)$,

$$u_h(x) = \sum_{j_1, j_2=0}^{N} y_{j_1, j_2} \hat{B}_{j_1}(x_1) \hat{B}_{j_2}(x_2).$$

因为 U 的边值为零,故在四个角点 $(j_1, j_2 = 0, N)$ 上 $LU = 0$, 因此无法配置. 但可令

	$s=0$	$s=h$	$s=2h$
$\hat{B}_0(s)$	0	1	0
$\hat{B}_0'(s)$	$\frac{12}{h}$	$\frac{-3}{h}$	0
$\hat{B}_0''(s)$	$\frac{-36}{h^2}$	$\frac{6}{h^2}$	0

图 15.12

	$s=0$	$s=h$	$s=2h$
$\hat{B}_1(s)$	0	-15	-4
$\hat{B}_1'(s)$	$-\frac{12}{h}$	$-\frac{3}{h}$	$\frac{12}{h}$
$\hat{B}_1''(s)$	$-\frac{36}{h^2}$	$\frac{54}{h^2}$	$-\frac{24}{h^2}$

图 15.13

$$\frac{\partial^4 u_h(x)}{\partial x_1^2\partial x_2^2}=\frac{\partial^4 U(x)}{\partial x_1^2\partial x_2^2}. \tag{15.80}$$

由于在角点上，

$$\frac{\partial^4 U(x)}{\partial x_1^2\partial x_2^2}=-\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2},$$

所以得到下列配置格式

$$\begin{cases} Lu_h(j_1h,\ j_2h)=f(j_1h,\ j_2h), & \text{在非角点上,}\\ \dfrac{\partial^4 u_h}{\partial x_1^2\partial x_2^2}(j_1h,\ j_2h)=-\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(j_1h,\ j_2h), & \text{在角点上.}\end{cases} \tag{15.81}$$

下面来推导计算 y_{j_1,j_2} 的方程组. 先设 $3\leqslant j_1,\ j_2\leqslant N-3$，则

$$\begin{aligned} Lu_h(j_1h,\ j_2h) &= -\sum_{\alpha,\beta=0}^{N} y_{\alpha,\beta}(\hat{B}_\alpha''(j_1h)\hat{B}_\beta(j_2h)\\ &\quad+\hat{B}_\alpha(j_1h)\hat{B}_\beta''(j_2h))\\ &= -\frac{6}{h^2}\sum_{\beta=0}^{N}\hat{B}_\beta(j_2h)(y_{j_1-1,\beta}-2y_{j_1,\beta}\\ &\quad+y_{j_1+1,\beta})-\frac{6}{h^2}\sum_{\alpha=0}^{N}\hat{B}_\alpha(j_1h)\\ &\quad\times(y_{\alpha,j_2-1}-2y_{\alpha,j_2}+y_{\alpha,j_2+1}) \end{aligned}$$

$$= \frac{12}{h^2}(8y_{i_1,i_2} - y_{i_1-1,i_2-1} - y_{i_1-1,i_2} - y_{i_1-1,i_2+1}$$

$$- y_{i_1,i_2-1} - y_{i_1,i_2+1} - y_{i_1+1,i_2-1} - y_{i_1+1,i_2}$$

$$- y_{i_1+1,i_2+1}) = f(i_1h, i_2h).$$

因为 $\hat{B}_0(s) \neq B_0(s)$, $\hat{B}_1(s) \neq B_1(s)$，所以当 $i_1, i_2 = 0, 1, 2$ 时，格式就有所不同，例如设 $i_1 = 0$, $3 \leqslant i_2 \leqslant N-3$，则有

$$Lu_h(0, i_2h) = -\sum_{\alpha,\beta=0}^{N} y_{\alpha,\beta}\hat{B}''_\alpha(0)\hat{B}_\beta(i_2h)$$

$$= \frac{36}{h^2}\sum_{\beta=0}^{N}(y_{0,\beta} + y_{1,\beta})\hat{B}_\beta(i_2h)$$

$$= \frac{36}{h^2}(y_{0,i_2-1} + y_{1,i_2-1} + 4y_{0,i_2} + 4y_{1,i_2}$$

$$+ y_{0,i_2+1} + y_{1,i_2+1}) = f(0, i_2h).$$

在角点上的格式更特殊些，例如有

$$\frac{\partial^4 u_h}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}(0, 0) = \sum_{\alpha,\beta=0}^{N} y_{\alpha,\beta}\hat{B}''_\alpha(0)\hat{B}''_\beta(0)$$

$$= \frac{1296}{h^4}(y_{0,0} + y_{0,1} + y_{1,0} + y_{1,1})$$

$$= -\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0, 0).$$

把以上各式综合起来，并消去 $y_{i_1,i_2}(i_1, i_2 = 0, N)$. 又记

$$y = (y_{1,1}, y_{1,2}, \cdots, y_{N-1,N-1})^*,$$

则得到计算 y 的线性代数方程组：$A_hy = b$，其中 b 由 f 所决定。可以证明 $\|A_h^{-1}\|$ 对 h 一致有界，从而 y 是唯一可解的，即配置格式 (15.81) 存在唯一的解。

下面来估计误差. 用 Π_hU 表示 U 的三次 Spline 插值函数，则

$$\Pi_hU(x) = \sum_{i_1,i_2=0}^{N} \hat{y}_{i_1,i_2}\hat{B}_{i_1}(x_1)\hat{B}_{i_2}(x_2),$$

它满足

$$
\begin{cases}
\Pi_h U(j_1h, j_2h) = U(j_1h, j_2h), & \text{在非角点上,} \\
\dfrac{\partial^4 \Pi_h U}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}(j_1h, j_2h) = \dfrac{\partial^4 U}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}(j_1h, j_2h), & \text{在角点上.}
\end{cases}
\tag{15.82}
$$

若 $U(x) \in C^4(\bar{\Omega})$，则由插值理论得到

$$
\|L(\Pi_h U - U)\|_{L^\infty(\Omega)} = O(h^2),
$$

因此

$$
\begin{cases}
L(\Pi_h U - u_h) = O(h^2), & \text{在非角点上,} \\
\dfrac{\partial^4(\Pi_h U - u_h)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = 0, & \text{在角点上.}
\end{cases}
$$

因为 $\|A_h^{-1}\|$ 对 h 一致有界,所以

$$
|\vartheta_{i_1,i_2} - y_{i_1,i_2}| = O(h^2), \quad 0 \leqslant i_1, \ i_2 \leqslant N.
$$

但当 $|x_1 - j_1h| \geqslant 2h$, $|x_2 - j_2h| \geqslant 2h$ 时，$\hat{B}_{i_1}(x_1)\hat{B}_{i_2}(x_2) = 0$，因此

$$
|\Pi_h U(x_1, x_2) - u_h(x_1, x_2)| \leqslant \max_{0 \leqslant i_1, i_2 \leqslant N} |\vartheta_{i_1,i_2} - y_{i_1,i_2}| \sum_{i_1,i_2=0}^{N} |\hat{B}_{i_1}(x_1)\hat{B}_{i_2}(x_2)| = O(h^2),
$$

从而得到 $\|U - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} = O(h^2)$.

为了提高格式的精度,可以把配置点选为 Gauss 点.例如把逼近函数取为分片双三次 Hermite 多项式，而在每个小矩形 $\{x / j_m h \leqslant x_m \leqslant (j_m + 1)h, \ m = 1, 2\}$ 内,把四个配置点取为 $(x_i^{(l)}, x_j^{(l')})$，$l, l' = 1, 2$，其中

$$
\begin{cases}
x_m^{(1)} = j_m h + h\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right), \\
x_m^{(2)} = j_m h + h\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right), & m = 1, 2.
\end{cases}
$$

关于配置法和最小二乘法之间的联系可见 Ciarlet, Raviart (1973).

15.11 边界积分方法

众所周知，许多物理问题可以归结为边界上的积分方程的问

题，而且在某些实际问题中，人们也只要求知道某些物理量在边界上的值，由此求出区域内部的值．边界积分法的基本思想就是应用基本解或 Green 函数，把一个区域上的积分转化为边界上的积分．这种想法起源于 Abel(1823) 时期．以后，Helmholtz (1859), Kirchhoff (1882), Rayleigh (1887), Fredholm (1903), Proudman (1925), Kellog (1929) 和 Купрадзе, Алекотидзе (1964) 等都作了论述．但当时的主要动机是推出解的表达式．Friedmen, Shaw (1962), Jaswon (1963), Symm (1963) 则把这种想法应用于数值计算，Brebbia (1978) 把它称为边界元方法．

根据积分方程的不同归化方法及所含未知函数的性质，可以把边界元方法分为两大类．第一类是直接法，此时未知函数正是所求的物理量．例如加权余量法，它的基本思想是把近似解与真解在区域上和边界上的误差与某个权函数构成数量积，使得误差按一定方式分配，从而使其尽可能地小．第二类是间接法，例如在位势理论中，应用基本解推出边界上的 Fredholm 方程，而其未知函数则是边界上的虚拟"源"的密度函数．经典的方法是用第二类 Fredholm 积分方程的位势积分来表示解，因为此时可用 Fredholm 定理证明它的解的存在性．但是也可以把问题归结为第一类 Fredholm 积分方程，而且有时更为直接和便于数值处理．Hsiao, Maccamy (1973), Hsiao, Wendland (1977), Nédélec (1977, 1982) 等还证明了某些第一类 Fredholm 积分方程解的存在性和唯一性．

边界元方法的第二个关键问题是求解所得的积分方程的数值解法．最常用的方法是配置法，也就是说，把边界剖分成许多小单元之和，在每个小单元内，根据插值条件确定一定数目的节点，然后在节点上配置，最后计算每个小单元上的积分，并由此得到一个以节点上有关物理量为未知函数的代数方程组．Zienkiewicz, Kelly, Bettess (1977) 等则把有限元方法应用于边界积分方程．此外，Hsiao, Kopp, Wendland (1980) 等提出了Галеркин 配置法，它兼有有限元方法和配置法的优点．

边界元方法的主要优点是只要求计算边界节点上的函数值，

从而大大节省了工作量．还由于逼近误差仅仅来源于边界，因此提高了计算精度．边界元方法还可以应用于弱间断问题，自由边界问题，特别适用于无限区域问题． 边界元方法的缺点是它对变系数或非线性问题的适应性不如有限元方法．又由于积分核往往是奇性的，而且所得的线性代数方程组的系数矩阵是非稀疏的，所以数值处理必须十分小心．

边界元方法已广泛应用于各种实际问题，例如电磁场、流体力学、土力学、断裂力学和板壳等问题，这些可见 Nédélec, Planchard (1973), Kleinman (1974, 1982), Nédélec (1977), Brebbia (1980, 1983), Wendland (1981), 祝家麟 (1984, 1985) 等人的文章．

从某种意义上说，Ying Long-an (1978, 1983) 所提出的无限元方法也是一种边界元方法．

例 15.13 (郑家栋 (1985)) 考虑例 15.7 中的问题(15.19)．令

$$G(x, x') = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - x'|},$$

它是 Laplace 方程的基本解． 若 $x' \in \Gamma$，则由 Green 公式得到

$$A(x')U(x') + \int_\Gamma U \frac{\partial G}{\partial n} ds = \int_\Gamma G \frac{\partial U}{\partial n} ds. \qquad (15.83)$$

其中 $A(x') = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha(x')}{\pi}\right)$，$\alpha(x')$ 表示点 x' 两侧的法向夹角．若 x' 是 Γ 上的光滑点，则 $\alpha(x') = 0$.

现在把 Γ 剖分为 $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{N} \Gamma^{(j)}$，$\Gamma^{(j)}$ 的端点是 $x^{(j-1)}$ 和 $x^{(j)}$，$x^{(0)} = x^{(N)}$．又设 $U(x)$ 和 $V(x) = \frac{\partial U}{\partial n}(x)$的近似解为分段线性函数 $u_h(x)$ 和 $v_h(x)$，它们在 $x^{(i)}$ 上的值为 $u_h(x^{(j)})$ 和 $v_h(x^{(j)})$．把它们代入 (15.83) 后得到

$$A(x^{(i)})u_h(x^{(i)}) + \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma^{(j)}} u_h \frac{\partial G}{\partial n} ds = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma^{(j)}} G v_h ds,$$

这是一个关于 $u_h(x^{(j)})$ 和 $v_h(x^{(j)})$ 的线性代数方程组，并可由此得到 $u_h(x)$．

在具体求解(15.19)时,按下列步骤进行:

(i) 先选取 C 点的试探点 $C^{(0)}$,并构造连接 $C^{(0)}$,D 两点的试探自由面 $\mathscr{L}^{(0)}$: $x_2=y^{(0)}(x_1)$.

(ii) 在 $\mathscr{L}^{(0)}$ 上,令 $v_h(x)=0$,再结合其它边界条件,用边界元方法得到 $u_h^{(0)}$ 在 $\mathscr{L}^{(0)}$ 上的值.

(iii) 假定 ε 是给定的误差限,如果

$$\max_{x\in\mathscr{L}^{(0)}}|u_h^{(0)}(x)-y^{(0)}(x)|>\varepsilon,$$

则构造新的试探曲线 $\mathscr{L}^{(1)}$,并回到步骤(ii).
如此继续下去,直到

$$\max_{x\in\mathscr{L}^{(k)}}|u_h^{(k)}(x)-y^{(k)}(x)|\leqslant\varepsilon.$$

在构造 $C^{(k)}$ 时,可用 $\mathscr{L}^{(k-1)}$ 上最靠近 $C^{(k-1)}$ 的点的纵座标值来内插. 考虑到 $C^{(k-1)}$ 的奇异性(见 Aitchison (1972)),可采用下列插值公式

$$x_2(C^{(k)})=\sum_{\mu=1}^{3}\left(x_2^{(\mu)}-\frac{x_1^{(\mu)}-x_1(C)}{\pi}\ln(x_1(C)-x_1^{(\mu)})\right)\times\prod_{\substack{1\leqslant\nu\leqslant3\\ \nu\neq\mu}}\frac{x_1(C)-x_1^{(\nu)}}{x_1^{(\mu)}-x_1^{(\nu)}},$$

这里 $x^{(\mu)}$ 是 $\mathscr{L}^{(k-1)}$ 上最靠近 $C^{(k-1)}$ 的三个点.

为了避免奇异积分,可以把基本解中的 x' 取在 $\bar{\Omega}$ 以外.

近年来,冯康从 Green 函数出发提出了一种新的归化方法,即正则边界归化法(见 Feng Kang (1982)). 因为由此得到的边界积分方程保持了原问题的一些特性,且可与有限元方法自然地结合起来,所以更适用于数值计算.

假设 Ω 是 n 维空间中的有界区域,Γ 相当光滑,$a_{\alpha\beta}$ 是常数,L 是 $2p$ 阶一致椭圆型微分算子

$$v(x)=\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant p}(-1)^{|\alpha|}a_{\alpha\beta}D^{\alpha+\beta}v(x),$$

与它对应的 $H^p(\Omega)\times H^p(\Omega)$ 上的双线性泛函是

$$a(v,w)=\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant p}\int_\Omega a_{\alpha\beta}D^\alpha v\cdot D^\beta w dx.$$

如果 $v, w\in C^\infty(\bar{\Omega})$，则由 Green 公式得到

$$a(v,w)=\int_\Omega wLvdx+\sum_{l=0}^{p-1}\int_\Gamma B_l w A_l v dS, \qquad (15.84)$$

其中 B_l 是边界上的迹算子，它至多包含 p_l 阶偏导数，

$$p_l\leqslant 2p-1,$$

而 A_l 是 $2p-p_l-1$ 阶边界微分算子. 如果 L 是自共轭算子，则有

$$\int_\Omega(wLv-vLw)dx=\sum_{l=0}^{p-1}\int_\Gamma(B_l vA_l w-B_l wA_l v)dS. \qquad (15.85)$$

现在考虑下列边值问题

$$\begin{cases}LU(x)=0, & x\in\Omega,\\ B_lU(x)=g_l(x), & x\in\Gamma.\end{cases} \qquad (15.86)$$

如果在 (15.85) 中令 $v=U$，w 为基本解，则就是通常的边界归化方法. 在正则边界归化方法中，取 w 为 Green 函数 $G(x, y)$，它满足

$$\begin{cases}LG(x,y)=\delta(x,y), & x\in\Omega,\ y\in\bar{\Omega},\\ B_lG(x,y)=0. & x\in\Gamma,\ y\in\bar{\Omega}.\end{cases}$$

因为 L 是自共轭的，所以 $G(x,y)=G(y,x)$，从而由 (15.85) 得到

$$U(x)=-\sum_{l=0}^{p-1}\int_\Gamma B'_lU(y)A'_lG(x,y)dS',\quad x\in\Omega,$$

其中 B'_l, A'_l 和 S' 表示是对变量 y 而言的. 从而

$$A_\nu U(x)=-\sum_{l=0}^{p-1}\int_\Gamma A_\nu A'_lG(x,y)B'_lU(y)dS',\quad x\in\Omega.$$

把 $A_\nu A'_lG(x,y)$ 看作广义函数意义下的积分核，让 x 趋向于边界，则得到下列正则归化的边界积分方程

$$A_\nu U(x)=-\sum_{l=0}^{p-1}\int_\Gamma\langle A_\nu A'_l\tilde{G}(x,y),B'_lU(y)\rangle,\quad 0\leqslant l\leqslant p-1,$$

其中$\langle , \rangle$表示广义函数对无限可微，有限支集函数的数量积，$A_\nu A_i'\widetilde{G}(x, y)$ 表示当 x 趋向边界时的极限值，它可能不等于在 Γ 上直接计算 $A_\nu A_i' G(x, y)$ 所得到的值。

Feng Kang, Yu De-hao (1983), Yu De-hao (1983, 1985) 应用 Green 函数方法，Fourier 变换，Fourier 级数，分离变量法和复分析等方法，对于一些特殊区域(例如单位圆内、外部，半平面)和典型方程(例如 Laplace 方程，Helmholtz 方程，重调和方程，二维弹性问题)都得到了正则归化的边界积分方程，并应用于数值计算。

例15.4 设 $\Omega = \{x = (\rho, \varphi)/0 \leqslant \rho \leqslant 1, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$, $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$，并考虑下列 Von Neumann 问题

$$\begin{cases} -\Delta U(x) = 0, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial U(x)}{\partial n} = g(x), & x \in \Gamma. \end{cases} \tag{15.87}$$

应用 Green 函数方法得到

$$U(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-\rho^2)U(1,\phi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-\phi)}\,d\phi, \quad 0 \leqslant \rho < 1,$$

$$\frac{\partial U}{\partial n}(1, \varphi) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{U(1,\phi)}{\sin^2\dfrac{\varphi-\phi}{2}}\,d\phi,$$

于是，把问题归结为寻找 $\bar{U}(\varphi) = U(1, \varphi) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$，使得

$$\int_0^{2\pi} g(\varphi)v(\varphi)d\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\bar{U}(\phi)v(\varphi)}{\sin^2\dfrac{\varphi-\phi}{2}}\,d\varphi d\phi,$$

$$\forall v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \tag{15.88}$$

设 $h = \dfrac{2\pi}{N}$, $\varphi_j = jh$, $\varphi_0 = \varphi_N$ 以及

$$A_j(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{h}(\varphi - \varphi_{j-1}), & \varphi_{j-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_j, \\ \dfrac{1}{h}(\varphi_{j+1} - \varphi), & \varphi_j \leqslant \varphi \leqslant \varphi_{j+1}, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

又令近似解为

$$\bar{u}_h(\varphi)=\sum_{j=1}^{N} r_j \Lambda_j(\varphi),$$

把它代入(15.88)，就得到方程组

$$AR=b,$$

其中 $R=(r_1, \cdots, r_N)^*$, $b=(b_1, \cdots, b_N)^*$, $A=(A_{lj})$,

$$b_j=\int_0^{2\pi} g(\varphi)\Lambda_j(\varphi)d\varphi,$$

$$A_{lj}=\frac{16}{\pi h^2}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^3}\sin^4\frac{\mu h}{2}\cos(\mu h|l-j|).$$

如果 $\bar{U}(\varphi)\in H^2(\Gamma)$,

$$\int_0^{2\pi}\bar{u}_h(\varphi)d\varphi=\int_0^{2\pi}\bar{U}(\varphi)d\varphi,$$

则有

$$\|\bar{U}-\bar{u}_h\|_{L^2(\Gamma)}\leqslant c_1h^2\|\bar{U}\|_{H^2(\Gamma)},$$

$$\|\bar{U}-\bar{u}_h\|_{L^\infty(\Gamma)}\leqslant c_2h^{3/2}\|\bar{U}\|_{H^2(\Gamma)}.$$

15.12 边界值逼近方法

节省计算工作量的另一个途径是采用边界值逼近方法．例如考虑下列 $2p$ 阶椭圆型方程的边值问题

$$\begin{cases}LU(x)=0, & x\in\Omega,\\ BU(x)=g(x), & x\in\Gamma,\end{cases}\tag{15.89}$$

其中 L 和 B_l 的意义同 § 15.7, $B=(B_0, \cdots, B_{p-1})^*$,

$$g=(g_0, \cdots, g_{p-1})^*.$$

我们假定满足 § 15.7 中的条件 A_1，并且(15.89)有特解序列 $\{\varphi_l(x)\}$．把形如

$$v(x)=\sum_{l=1}^{N} A_l\varphi_l(x)$$

的函数的全体记为 V_N，(15.89)的近似解即为 $u_N(x)\in V_N$，它满足

$$\|Bu_N-g\|_\Gamma'=\min_{v\in V_N}\|Bv-g\|_\Gamma',$$

其中$\|\cdot\|_\Gamma$是适当选择的范数。

对应于不同的$\{\varphi_l(x)\}$和$\|\cdot\|_\Gamma$，就可以得到不同的近似解，可见 Fox, Henrici, Moler (1967a, b), Davis, Rabinowitz (1969) 和 Barrodale, Young (1970) 的文章。例如若

$$LU = -\Delta U, \quad BU = U,$$

$\|\cdot\|_\Gamma$ 是最大模，那末由极值原理得到

$$\max_{x\in\bar{\Omega}}|U(x) - u_N(x)| \leqslant \min_{v\in V_N}\max_{x\in\Gamma}|v(x) - g(x)|.$$

Mathon, Johnston (1977) 提出了一种新的方法，它的出发点是同时选择特解序列$\{\varphi_l(x)\}$和系数A_l，从而达到较佳的结果。为方便计，我们只考虑下列问题

$$\begin{cases} LU = -\Delta U - b_1\dfrac{\partial U}{\partial x_1} - b_2\dfrac{\partial U}{\partial x_2} + dU = 0, & x\in\Omega, \\ U = g, & x\in\Gamma. \end{cases} \tag{15.90}$$

其中b_1, b_2和d是常数，$d \geqslant 0$.

假设点$y\bar{\in}\bar{\Omega}$，$\xi_l(x, y)$是在y的邻域中关于x的正则函数，并且$\xi_1(y, y) \neq 0$. 令

$$\gamma(x, y) = \xi_1(x, y)\log\frac{1}{|x - y|} + \xi_2(x, y),$$

那末$\gamma(x, y)$在点$x = y$具有对数类型的奇性. Garabedian(1963)证明，如果适当地选择$\xi_l(x)$，可以使$\gamma(x, y)$成为(15.90)的基本解. 例如当$b_1 = b_2 = d = 0$时，可取

$$\gamma(x, y) = -\log|x - y|.$$

当$b_1 = b_2 = 0$, $d > 0$时，可取

$$\gamma(x, y) = |x - y|^{-l}K_l(\sqrt{d}\,|x - y|),$$

其中K_l是l阶修正的 Bessel 函数.

记$A = (A_1, \cdots, A_N)^*$, $Y = (y^{(1)}, y^{(2)}, \cdots, y^{(N)})^*$，把形如$\sum\limits_{l=1}^{N} A_l\gamma(x, y^{(l)})$的多项式称为$N$阶$\gamma$多项式，其全体记为$V_N$.

(15.90)的一种近似解是$u_N\in V_N$，它满足

$$\|u_N - g\|_{L^p(\Gamma)} = \inf_{v\in V_N}\|v - g\|_{L^p(\Omega)}$$

$$= \inf_{A_l, y^{(l)}}\left\|\sum_{l=1}^{N} A_l\gamma(x, y^{(l)}) - g\right\|_{L^p(\Gamma)}.$$

根据γ函数的逼近理论（见 Hobby, Rice (1967), De Boor (1969), Mathon (1972)），可以证明这种最佳逼近是存在的，但一般不唯一。

下面来估计误差．为方便计，设 $b_1 = b_2 = d = 0$, Γ 是单位圆，U的q阶导数是 Hölder 连续的，它的 Hölder 指数为α, $0 < \alpha < 1$. 记 $z = x_1 + ix_2$, 于是可以把 $U(x)$ 视为解析函数$\phi(z)$的实部。令 $w(z) = \exp[\phi(z)]$, 则 $w(z)$ 也是解析函数，它的q阶导数也是 Hölder 连续的，并且有同样的 Hölder 指数α. 适当地选择分支后，还可得到

$$U(x) = \mathrm{Re}[\log w(z)] = \log|w(z)|.$$

用 $p_N(z)$ 表示 $w(z)$ 的最佳N次逼近多项式，则由逼近论（见 Curtis (1936)）得到

$$|w(z) - p_N(z)| \leqslant c_1 N^{-q-\alpha}, \quad \forall z\in \bar{\Omega}_z,$$

其中Ω_z是复平面上与Ω相对应的区域，从而当N充分大时，

$$p_N(z) \neq 0,$$

故存在 $z^{(l)}\in\bar{\Omega}_z$, 使得

$$p_N(z) = a_N\prod_{l=1}^{N}(z - z^{(l)}).$$

又因为存在正常数 c_2, 使得

$$|w(z)| \geqslant c_2 > 0,\ |p_N(z)| \geqslant c_2 > 0,\ \forall z\in\bar{\Omega}_z,$$

因此

$$\left|U(x) - \sum_{l=1}^{N}\log|z - z^{(l)}| - \log|a_N|\right|$$

$$= |\log|w(z)| - \log|p_N(z)|| \leqslant \frac{1}{c_2}\||w(z)|$$

$$- |p_N(z)|| \leqslant \frac{1}{c_2}|w(z) - p_N(z)|$$

$$\leqslant \frac{c_1}{c_2} N^{-q-\alpha}, \tag{15.91}$$

现在对任意的 $z \in \bar{\Omega}_z$ 和适当的正数 β_N，定义函数 $\sigma_N(z)$

$$\sigma_N(z) = \log\left|a_N + \frac{(a_N - 1)z}{\beta_N - z}\right| = \log|z - a_N\beta_N| - \log|z - \beta_N|,$$

则当 β_N 充分大时，

$$|\log|a_N| - \sigma_N(z)| \leqslant N^{-q-\alpha}.$$

现在用 $\sigma_N(z)$ 代替 (15.91) 中的 $|a_N|$，于是可知存在 $N+2$ 阶的 γ 多项式 $p_{N+2}(x, Y, A) \in V_{N+2}$，使得

$$|U(x) - p_{N+2}(x, Y, A)| \leqslant c_3 N^{-q-\alpha}.$$

但在 V_{N+2} 中，u_{N+2} 是对 U 的最佳逼近，因此

$$|U(x) - u_N(x)| \leqslant c_4 N^{-q-\alpha}, \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

边界值逼近方法还可以提高近似解的精度.

§ 16 线性特征值问题

在物理和工程等问题中，经常需要数值计算线性椭圆型方程的特征值问题. Richardson (1917) 最早计算了薄膜的特征值问题，较早期的工作是由 Courant, Friedrichs, Lewy (1928), Collatz (1933, 1938, 1949), Ефименко (1938), Courant (1943), Саульев (1954a, b, 1955, 1957b), Люстерник (1954), Pólya (1954) 和 Forsyth (1954, 1956) 等人发展的.

由于特征值问题有多种变分形式，从而可基于它们构造种种算法. 本节中介绍了 Rayleigh-Ritz 方法，Pólya 方法，Галеркин 方法和加速收敛方法. 还介绍了基于 Rayleigh 比的差分方法.

计算特征值问题的另一个途径是直接建立差分格式，本节介绍了这个方法，并用离散 Green 函数的方法精细地估计了计算误差.

计算特征值问题的第三个途径是应用 Green 函数，把特征值问题化为全连续算子的特征值问题，关于这方面的工作可见 § 2.4

和 Keller (1965) 的文章.

16.1 线性特征值问题及其变分形式

假设 Ω 是 R^n 中的有界开域,其边界适当光滑. L 是二阶自共轭正定椭圆算子,其系数适当光滑. 今考虑下列问题

$$\begin{cases} LU = \lambda U, & x \in \Omega, \\ U = 0, & x \in \Gamma. \end{cases} \tag{16.1}$$

可以证明(见 Courant, Hilbert (1953)), (16.1) 有正的特征值序列 $\{\lambda^{(l)}\}$, 并且没有有限的极限点,故可排列为

$$0 < \lambda^{(1)} \leqslant \lambda^{(2)} \leqslant \cdots \leqslant \lambda^{(l)} \leqslant \lambda^{(l+1)} \leqslant \cdots.$$

今后用 $\{U^{(l)}\}$ 表示与 $\{\lambda^{(l)}\}$ 相对应的 L^2 正交规范特征函数系.

问题 (16.1) 有多种变分形式. 首先必存在定义在 $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ 上的双线性对称连续泛函 $a(v, w)$, 使得当 $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ 时, $(Lv, w)_{L^2(\Omega)} = a(v, w)$, 并且存在正常数 a_0, a_1, 使得

$$a_0 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leqslant a(v, v), \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

$$|a(v,w)| \leqslant a_1 \|v\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall v, w \in H_0^1(\Omega),$$

于是得到下列第一种变分形式:

定理 16.1 若 $U(x) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, 则

$$a(U, w) = \lambda(U, w)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega). \tag{16.2}$$

下面用 $R(v)$ 表示 Rayleigh 比

$$R(v) = \frac{a(v, v)}{\|v\|_{L^2(\Omega)}^2},$$

显然有 $R(U^{(l)}) = \lambda^{(l)}$. 用 E_l 表示由 $U^{(1)}, \cdots, U^{(l)}$ 所张成的子空间, $l \geqslant 1$, 并记 $E_0 = H_0^1(\Omega)$. 若 v 与 E_{l-1} 正交,则记为 $v \perp E_{l-1}$.

定理 16.2 在前面的假定下,

$$\lambda^{(l)} = \min_{v \perp E_{l-1}} R(v). \tag{16.3}$$

证明 设 λ 和 U 是特征值及相应的特征函数, ε 是实数,则

$$R(U+\varepsilon w)=\frac{a(U,U)+2\varepsilon a(U,w)+\varepsilon^2 a(w,w)}{\|U\|^2_{L^2(\Omega)}+2\varepsilon(U,w)_{L^2(\Omega)}+\varepsilon^2\|w\|^2_{L^2(\Omega)}}$$

$$=R(U)+2\varepsilon\left(\frac{a(U,w)\|U\|^2_{L^2(\Omega)}-a(U,U)(U,w)_{L^2(\Omega)}}{\|U\|^2_{L^2(\Omega)}}\right)$$

$$+\cdots.$$

由(16.2),上式右端的 2ε 项系数为零,所以 $\frac{d}{d\varepsilon}R(U+\varepsilon w)|_{\varepsilon=0}=0$,因此$U$是 $R(v)$ 的驻点.

反之,若U是 $R(v)$ 的驻点,则上述 2ε 项的系数为零. 令

$$\lambda=\frac{a(U,U)}{\|U\|^2_{L^2(\Omega)}},$$

则 $a(U,w)=\lambda(U,w)_{L^2(\Omega)}$.

现在进一步证明

$$\lambda^{(1)}=\min_{v\in E_0}R(v)=R(U^{(1)}).$$

显然有 $R(U^{(1)})=\lambda^{(1)}$. 又对任意的 $v\in E_0$,

$$v=\sum_{s=1}^{N}b_sU^{(s)}+v^{(N+1)}.$$

由于 $a(U^{(l)},U^{(s)})=\lambda^{(l)}(U^{(l)},U^{(s)})_{L^2(\Omega)}=\lambda^{(l)}\delta_{l,s}$, 所以对一切 $l\leqslant N$,

$$a(U^{(l)},v^{(N+1)})=a(U^{(l)},v)-a\left(U^{(l)},\sum_{s=1}^{N}b_sU^{(s)}\right)$$

$$=\lambda^{(l)}(U^{(l)},v)_{L^2(\Omega)}-\lambda^{(l)}\left(U^{(l)},\sum_{s=1}^{N}b_sU^{(s)}\right)_{L^2(\Omega)}$$

$$=\lambda^{(l)}b_l-\lambda^{(l)}b_l=0,$$

因此

$$R(v)=\frac{\sum_{l=1}^{N}\lambda^{(l)}b_l^2+a(v^{(N+1)},v^{(N+1)})}{\sum_{l=1}^{\infty}b_l^2}\geqslant\frac{\sum_{l=1}^{N}\lambda^{(l)}b_l^2}{\sum_{l=1}^{\infty}b_l^2}.$$

令 $N\to\infty$, 即得 $\lambda^{(1)}\leqslant R(v)$. 类似地可证明 $\lambda^{(l)}=\min_{v\perp E_{l-1}}R(v)$,

$l \geqslant 2$.

用 S_l 表示 $H_0^1(\Omega)$ 中的任一 l 维子空间，Poincaré, Courant, Fischer 证明了下面第三种变分形式(见 Strang, Fix (1973))。

定理 16.3 在前面的假定下，

$$\lambda^{(l)} = \min_{S_l} \max_{v \in S_l} R(v). \tag{16.4}$$

证明 对任意的 S_l，设法选取 $\bar{v} \in S_l$，使得 $\bar{v} \perp E_{l-1}$，即

$$(\bar{v}, U^{(j)})_{L^2(\Omega)} = 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant l-1,$$

因为这是一个含有 l 个未知数的 $l-1$ 个线性代数方程组，所以这样的 $\bar{v}$ 一定存在，并由定理 16.2 得到

$$\lambda^{(l)} \leqslant R(\bar{v}) \leqslant \max_{v \in S_l} R(v).$$

因为 S_l 是任意的，故得到定理的结论.

例 16.1 设 $n = 2$, $\nu(x) \in C^1(\Omega)$, $0 < \nu_0 \leqslant \nu(x) \leqslant \nu_1$, $d(x)$ 是非负连续函数，并考虑下列特征值问题

$$\begin{cases} LU = -\nabla \cdot (\nu \nabla U) + dU = \lambda U, & x \in \Omega, \\ U = 0, & x \in \Gamma. \end{cases}$$

可以证明，L 是二阶自共轭正定椭圆算子，故有正的特征值序列 $\{\lambda^{(l)}\}$（见 Tamarkin, Feller (1941)）。记

$$a(v, w) = \int_\Omega (\nu(\nabla v \cdot \nabla w) + dvw)dx,$$

则当 $U \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 时，λ 和 U 由变分形式 (16.2)—(16.4) 所决定.

可把上述结果推广到高阶自共轭正定椭圆算子的情况，有关材料还可见 Gould (1957, 1966), Канторович, Крылов (1962) 的文章. 此外从各种数学或物理原理出发，可估计 $\lambda^{(l)}$ 的上、下界，可见 Barta (1937), Duffin (1947), Pólya, Szegö (1951), Redheffer (1957) 和 Protter (1958, 1959) 等人的文章.

16.2 Rayleigh-Ritz 方法和 Pólya 方法

Rayleigh-Ritz 方法的出发点是在 $H_0^1(\Omega)$ 的子空间中寻找 $R(v)$

的驻点 $u_h^{(l)}$ 和相应的 $\mu_h^{(l)}$，且把它们分别作为 $U^{(l)}$ 和 $\lambda^{(l)}$ 的近似解。假设 V_h 是 $H_0^1(\Omega)$ 的N维子空间，它的基函数是 $\{\varphi_i\}$，则对任意的 $v_h\in V_h$，都有 $v_h=\sum_{j=1}^{N}v_{h,j}\varphi_j$。记 $A_{js}=a(\varphi_j,\varphi_s)$，$B_{js}=(\varphi_j,\varphi_s)_{L^2(\Omega)}$，则有

$$a(v_h,v_h)=\sum_{j,s=1}^{N}A_{js}v_{h,j}v_{h,s},\quad \|v_h\|^2_{L^2(\Omega)}=\sum_{j,s=1}^{N}B_{js}v_{h,j}v_{h,s}.$$

$R(v)$ 在 V_h 中的极小值为 $\min\limits_{\substack{v_h\in V_h\\ \|v_h\|_{L^2(\Omega)}=1}} R(v_h)$。引入 Lagrange 乘子 μ_h，并记

$$F(v)=a(v,v)-\mu_h(\|v\|^2_{L^2(\Omega)}-1).$$

令

$$\frac{\partial F(v_h)}{\partial v_{h,s}}=\frac{\partial F(v_h)}{\partial \mu_h}=0,$$

则得到下列线性代数方程组

$$\begin{cases}\sum\limits_{s=1}^{N}A_{js}v_{h,s}=\mu_h\sum\limits_{s=1}^{N}B_{js}v_{h,s}, & 1\leqslant j\leqslant N,\\ \|v\|_{L^2(\Omega)}=1.\end{cases}\tag{16.5}$$

因为 $A=(A_{js})$ 和 $B=(B_{js})$ 是正定对称阵，所以上述问题有N个正的特征值，它们排列为

$$0<\mu_h^{(1)}\leqslant\mu_h^{(2)}\leqslant\cdots\leqslant\mu_h^{(l)}\leqslant\cdots\leqslant\mu_h^{(N)},$$

而相应的特征向量是 $u_h^{(l)}=(u_{h,1}^{(l)},u_{h,2}^{(l)},\cdots,u_{h,N}^{(l)})^*$。

记 $u_h^{(l)}=\sum_{j=1}^{N}u_{h,j}^{(l)}\varphi_j$，则可证明

$$a(u_h^{(l)},u_h^{(l)})=\mu_h^{(l)}\|u_h^{(l)}\|^2_{L^2(\Omega)}=\mu_h^{(l)},$$

这表明 $u_h^{(l)}$ 恰为问题 (16.5) 的驻点，而 $u_h^{(1)}$ 为极小点，因此可以把 $\mu_h^{(1)}$ 和 $u_h^{(1)}$ 分别作为 $\lambda^{(1)}$ 和 $U^{(1)}$ 的近似解。

为了计算 $\lambda^{(2)}$ 和 $U^{(2)}$ 的近似解，可以根据定理16.2，考虑下列极值问题

$$\min_{\substack{v_h\in V_h\\ \|v_h\|_{L^2(\Omega)}=1,\ (v_h,u_h^{(1)})_{L^2(\Omega)}=0}} R(v_h).\tag{16.6}$$

再次应用 Lagrange 乘子法引入下列函数

$$F(v)=a(v,v)-\mu_h[\|v\|^2_{L^2(\Omega)}-1]-2\bar{\mu}_h(u_h^{(1)},v)_{L^2(\Omega)},$$

令

$$\frac{\partial F(v_h)}{\partial v_{h,j}}=0,$$

即得到

$$\sum_{i=1}^{N}(a(\varphi_i,\varphi_j)-\mu_h(\varphi_i,\varphi_j)_{L^2(\Omega)})v_{h,i}=\bar{\mu}_h(u_h^{(1)},\varphi_j)_{L^2(\Omega)}.$$

用 $u_{h,j}^{(1)}$ 乘上式并对 j 求和，就得到

$$\begin{aligned}D&=\sum_{i=1}^{N}[a(\varphi_i,u_h^{(1)})-\mu_h(\varphi_i,u_h^{(1)})_{L^2(\Omega)}]v_{h,i}\\&=\bar{\mu}_h(u_h^{(1)},u_h^{(1)})_{L^2(\Omega)}=\bar{\mu}_h.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}a(\varphi_i,u_h^{(1)})&=a(u_h^{(1)},\varphi_i)=\mu_h^{(1)}(u_h^{(1)},\varphi_i)_{L^2(\Omega)}\\&=\mu_h^{(1)}(\varphi_i,u_h^{(1)})_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}D&=\sum_{i=1}^{N}[\mu_h^{(1)}(\varphi_i,u_h^{(1)})_{L^2(\Omega)}-\mu_h(\varphi_i,u_h^{(1)})_{L^2(\Omega)}]v_{h,i}\\&=(\mu_h^{(1)}-\mu_h)(v_h,u_h^{(1)})_{L^2(\Omega)}=0.\end{aligned}$$

这说明 $\bar{\mu}_h=0$，因此 (16.6) 的极小值及其相应的驻点关于 φ_i 的展开式的系数，仍然分别是 (16.5) 的特征值及其相应的特征向量的分量。由于 $\mu_h^{(1)}\leqslant\mu_h^{(2)}$，所以可以把 $\mu_h^{(2)}$ 和 $u_h^{(2)}$ 分别作为 $\lambda^{(2)}$ 和 $U^{(2)}$ 的近似解。

类似地可以把 $\mu_h^{(l)}$ 和 $u_h^{(l)}$ 作为 $\lambda^{(l)}$ 和 $U^{(l)}$ 的近似解，并有

$$a(u_h^{(l)},w_h)=\mu_h^{(l)}(u_h^{(l)},w_h),\quad\forall w_h\in V_h,$$

$$\mu_h^{(l)}=\min_{S_{h,l}\subset V_h}\max_{v_h\in S_{h,l}}R(v_h),$$

其中 $S_{h,l}$ 是 V_h 的 l 维子空间。

Poincaré (1890) 还证明，对一切 l，$\lambda^{(l)}\leqslant\mu_h^{(l)}$。

下面来证明收敛性。为方便计，只证明当 $h\to0$ 时，$\mu_h^{(1)}\to$

$\lambda^{(1)}$. 我们假定,当 $h'' < h'$ 时, $V_{h'} \subset V_{h''} \subset H_0^1(\Omega)$.

定理 16.4 如果 $\{V_h\}$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 的完全子空间列,则

$$\lim_{h\to 0} \mu_h^{(1)} = \lambda^{(1)}.$$

证明 当 $h \to 0$ 时, $\{\mu_h^{(1)}\}$ 是不增的,而且 $\mu_h^{(1)} \geqslant \lambda^{(1)}$, 所以 $\lim\limits_{h\to 0} \mu_h^{(1)}$是存在的.

因为 $\{V_h\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中是完全的,故对任意 $\varepsilon > 0$, 都可找到h_0, 使得当 $h \leqslant h_0$ 时,存在 $w_h \in V_h$, 它满足

$$\|w_h - U^{(1)}\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \varepsilon.$$

由于

$$a(w_h, w_h) = a(U^{(1)}, U^{(1)}) + 2a(U^{(1)}, w_h - U^{(1)}) \\ + a(w_h - U^{(1)}, w_h - U^{(1)}),$$

所以

$$a(w_h, w_h) \leqslant a(U^{(1)}, U^{(1)}) + c_1\varepsilon.$$

类似地有

$$\|w_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \geqslant \|U^{(1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 - c_2\varepsilon.$$

从而

$$R(w_h) \leqslant \lambda^{(1)} + c_3\varepsilon.$$

又有

$$\mu_h^{(1)} = R(u_h^{(1)}) \leqslant R(w_h), \quad \forall w_h \in V_h,$$

所以

$$\lambda^{(1)} \leqslant \mu_h^{(1)} \leqslant \lambda^{(1)} + c_3\varepsilon,$$

让 $\varepsilon \to 0$, 即得所证的结论.

在实际问题中,一般很难计算 $R(v)$, 故常用 $R_h(v)$ 来逼近它. 用 $\bar{u}_h^{(l)}$ 和 $\bar{\mu}_h^{(l)}$ 表示 $R_h(v)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中的第 l 个驻点和相应的驻点值,则有下列结果:

定理 16.5 假设 $R_h(v)$ 满足下列条件

$$|R_h(v) - R(v)| \leqslant \varepsilon_h R(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{16.7}$$

其中当 $h \to 0$ 时, $\varepsilon_h \to 0$, 则有

$$\lim_{h\to 0} \bar{\mu}_h^{(1)} = \lambda^{(1)}.$$

证明 我们有

$$\bar{\mu}_h^{(1)} = R_h(\bar{u}_h^{(1)}) \leqslant R_h(U^{(1)}) \leqslant \lambda^{(1)} + \varepsilon_h R(U^{(1)}). \qquad (16.8)$$

因为 $R(U^{(1)})$ 是有界的，故当 $h \to 0$ 时，$\varepsilon_h R(U^{(1)}) \to 0$. 又有

$$\begin{aligned} R_h(v) &= R(v) + (R_h(v) - R(v)) \\ &\geqslant (1 - \varepsilon_h)R(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

所以

$$R(\bar{u}_h^{(1)}) \leqslant \frac{R_h(\bar{u}_h^{(1)})}{1 - \varepsilon_h}.$$

因此 $R_h(\bar{u}_h^{(1)})$，从而 $R(\bar{u}_h^{(1)})$ 也是对 h 一致有界的. 此外，还有

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} = R(U^{(1)}) \leqslant R(\bar{u}_h^{(1)}) &= R_h(\bar{u}_h^{(1)}) + (R(\bar{u}_h^{(1)}) \\ &- R_h(\bar{u}_h^{(1)})) = \bar{\mu}_h^{(1)} + \varepsilon_h R(\bar{u}_h^{(1)}). \end{aligned}$$

因为当 $h \to 0$ 时，$\varepsilon_h R(\bar{u}_h^{(1)}) \to 0$，所以结合上式和(16.8)即得所要证的.

定理16.6 设 $\{V_h\}$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 中的完全子空间列，条件 (16.7) 成立，$\bar{\mu}_h^{(l)}$ 是 $R_h(v)$ 在 V_h 中的第 l 个驻点值，则

$$\lim_{h \to 0} \bar{\mu}_h^{(l)} = \lambda^{(l)}.$$

类似地可证明，当 $h \to 0$ 时，$\mu_h^{(l)} \to \lambda^{(l)}$.

例16.2 假设在例 16.1 中 $\nu(x) \equiv 1$，$d(x) \equiv 0$，Ω 如图 16.1 所示. 取 V_h 为由 $\varphi_1(x)$ 张成的子空间，其中，当 $x_1 \geqslant x_2$ 时，

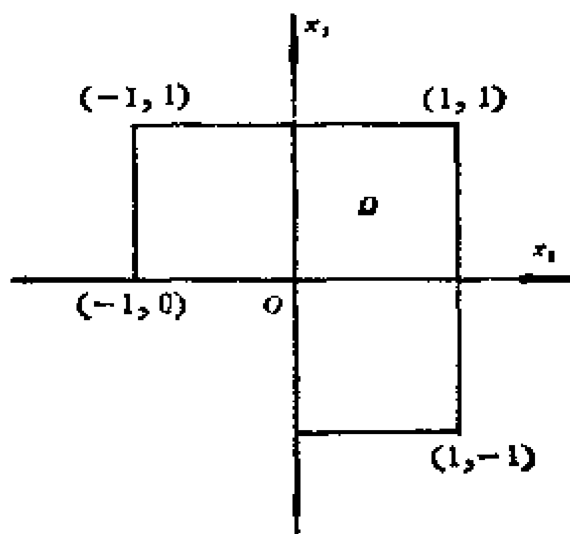


图 16.1

$$\varphi_1(x) = x_1(1 - x_1)(1 + x_2),$$

当 $x_1 < x_2$ 时，则由对称性确定之. 于是，经过初等而冗长的计算，可得(见 Forsythe, Wasow (1960))

$$\lambda^{(1)} \leqslant \mu_h^{(1)} \leqslant R(\varphi_1) = \frac{140}{11} \approx 12.8.$$

为了提高精度，可把 V_h 取为下列形状的函数的集合

$$x_1(1 - x_1)(1 + x_2)(v_{h,1} + v_{h,2}x_1 + v_{h,3}x_2 + \cdots),$$
$$\text{当 } x_1 \geqslant x_2 \text{ 时.}$$

Birkhoff, Fix (1971) 介绍了各种高精度的 Rayleigh-Ritz 方法.

Pólya (1954) 把 V_h 取为分片线性的连续函数空间，这实际上就是一次有限元空间. Garabedian (1965)等则采用 Hermite 型有限元空间，并对直角区域证明 $|\mu_h^{(l)} - \lambda^{(l)}| = O(h^6)$.

例 16.3 假设在例 16.1 中，$\nu(x) \equiv 1$, $d(x) \equiv 0$, Ω 由边长为 h 的正方形所组成，V_h 是一次有限元空间. 于是在单元正方形 $Q_0 = \{x / 0 \leqslant x_1, x_2 \leqslant h\}$ 内，对任意 $v_h \in V_h$ 都有

$$\begin{aligned} v_h(x) = h^{-2}((h - x_1)(h - x_2)v_h(0, 0) \\ + x_1(h - x_2)v_h(h, 0) + x_2(h - x_1)v_h(0, h) \\ + x_1x_2v_h(h, h)). \end{aligned}$$

经计算得到

$$\begin{aligned} \int_{Q_0} v_h^2(x)dx = \frac{h^2}{9}(v_h^2(0, 0) + v_h^2(0, h) + v_h^2(h, 0) \\ + v_h^2(h, h) + v_h(0, 0)v_h(h, 0) \\ + v_h(0, 0)v_h(0, h) + v_h(h, 0)v_h(h, h) \\ + v_h(0, h)v(h, h)) + \frac{h^2}{18}(v_h(0, 0) \\ \times v_h(h, h) + v_h(h, 0)v_h(0, h)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{Q_0}\left(\frac{\partial v_h}{\partial x_1}\right)^2 dx = \frac{1}{3}(v_h^2(0, 0) + v_h^2(h, 0) + v_h^2(0, h) \\ + v_h^2(h, h) + v_h(0, 0)v_h(0, h) \\ + v_h(h, 0)v_h(h, h) - v_h(0, 0)v_h(h, h) \end{aligned}$$

$$- v_h(0,h)v_h(h,0)) - \frac{2}{3}(v_h(0,0)$$
$$\times v_h(h,0) + v_h(0,h)v_h(h,h)).$$

类似地可计算 $\int_{\Omega_0}\left(\frac{\partial v_h}{\partial x_2}\right)^2 dx$，并有

$$\int_{\Omega_0} |\nabla v_h|^2 dx = \frac{2}{3}(v_h^2(0,0) + v_h^2(h,0) + v_h^2(0,h)$$
$$+ v_h^2(h,h) - v_h(0,0)v_h(h,h)$$
$$- v_h(h,0)v_h(0,h)) - \frac{1}{3}(v_h(0,0)$$
$$\times v_h(h,0) + v_h(h,0)v_h(h,h)$$
$$+ v_h(h,h)v_h(0,h) + v_h(0,h)v_h(0,0)).$$

把 Ω 内所有单元正方形的顶点记为 Ω_h，则得到

$$\int_\Omega v_h^2(x)dx = \frac{h^2}{36}\sum_{x\in\Omega_h} v_h(x)[16v_h(x) + 4v_h(x-he_1)$$
$$+ 4v_h(x+he_1) + 4v_h(x-he_2)$$
$$+ 4v_h(x+he_2) + v_h(x-he_1-he_2)$$
$$+ v_h(x-he_1+he_2) + v_h(x+he_1$$
$$-he_2) - v_h(x+he_1+he_2)],$$

$$\int_\Omega |\nabla v_h|^2 dx = \frac{1}{3}\sum_{x\in\Omega_h} v_h(x)[8v_h(x) - v_h(x-he_1)$$
$$- v_h(x+he_1) - v_h(x-he_2) - v_h(x$$
$$+ he_2) - v_h(x-he_1-he_2) - v_h(x$$
$$- he_1+he_2) - v_h(x+he_1-he_2)$$
$$- v_h(x+he_1+he_2)].$$

把以上两式代入

$$R(v_h) = \frac{|v_h|^2_{H^1(\Omega)}}{\|v_h\|^2_{L^2(\Omega)}},$$

并让 $R(v_h)$ 在 $v_h = u_h$ 时达到定驻值，于是得到

$$\frac{1}{3h^2}(8u_h(x) - u_h(x-he_1) - u_h(x+he_1) - u_h(x$$

$$
\begin{aligned}
&-he_2)-u_h(x+he_2)-u_h(x-he_1-he_2)\\
&-u_h(x-he_1+he_2)-u_h(x+he_1-he_2)\\
&-u_h(x+he_1+he_2))\\
=&\frac{\mu_h}{36}(16u_h(x)+4u_h(x-he_1)+4u_h(x+he_1)\\
&+4u_h(x-he_2)+4u_h(x+he_2)+u_h(x-he_1\\
&-he_2)+u_h(x-he_1+he_2)+u_h(x+he_1\\
&-he_2)+u_h(x+he_1+he_2)).
\end{aligned}
$$

由此即可得到近似的特征值 $\mu_h^{(l)}$ 和相应的近似特征函数 $u_h^{(l)}(x)$.

16.3 Галеркин 方法

通常直接从变分形式(16.2)出发来计算特征值，即求 $u_h(x)\in V_h$，使得

$$a(u_h, w_h)=\mu_h(u_h, w_h)_{L^2(\Omega)},\quad \forall w_h\in V_h,$$

其中V_h是各种有限元空间，可见 Cowper, Kosko, Lindberg, Olson (1967), Lindberg, Olson (1970) 和 Strang, Fix (1973) 的文章.

下面来估计计算误差. 正如 Birkhoff, De Boor, Swartz, Wendroff (1966) 指出的那样，对于自共轭问题，最好是利用定理16.3，设 V_h 是N维的k次有限元空间，Π 表示按 $a(v, w)$ 定义的投影算子，即对一切 $v\in H_0^1(\Omega)$,

$$a(v-\Pi v, w_h)=0,\quad \forall w_h\in V_h, \tag{16.9}$$

换句话说，若

$$a(v, w)=(f, w)_{L^2(\Omega)},\quad \forall w\in H_0^1(\Omega),$$

则 Πv 恰为 v 的k次有限元近似解，从而当 $v\in H^{k+1}(\Omega)$ 时 (见 Strang, Fix (1973)),

$$\|v-\Pi v\|_{H^\beta(\Omega)}\leqslant c_1(h^{k+1-\beta}+h^{2k})\|v\|_{H^{k+1}(\Omega)}. \tag{16.10}$$

引理 16.1 设 Φ_l 是 E_l 中的单位向量的集合，

$$\sigma_h^{(l)}=\max_{v\in\Phi_l}|2(v, v-\Pi v)_{L^2(\Omega)}-\|v-\Pi v\|_{L^2(\Omega)}^2|, \tag{16.11}$$

则当 $\sigma_h^{(l)}<1$ 时，

$$\mu_h^{(l)}\leqslant\frac{\lambda^{(l)}}{1-\sigma_h^{(l)}}.$$

证明 空间 ΠE_l 是 l 维的．若不然，则有 $\varphi\in E_l$，$\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}=1$，并且 $\Pi\varphi=0$，从而

$$\begin{aligned}\sigma_h^{(l)}&=|2(\varphi,\varphi-\Pi\varphi)_{L^2(\Omega)}-\|\varphi-\Pi\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2|\\&=\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2=1,\end{aligned}$$

而这是与 $\sigma_h^{(l)}<1$ 相矛盾的．因此，由定理 16.3 得到

$$\mu_h^{(l)}\leqslant\max_{v\in\Pi E_l}R(v)=\max_{v\in\Phi_l}\frac{a(\Pi v,\Pi v)}{\|\Pi v\|_{L^2(\Omega)}^2}.$$

因为 Π 是按 $a(v,w)$ 的投影算子，故 $a(\Pi v,\Pi v)\leqslant a(v,v)$．另一方面，对任意的 $v\in\Phi_l$，都有

$$\begin{aligned}\|\Pi v\|_{L^2(\Omega)}^2=\|v\|_{L^2(\Omega)}^2-2(v,v-\Pi v)_{L^2(\Omega)}+\|v\\-\Pi v\|_{L^2(\Omega)}^2\geqslant1-\sigma_h^{(l)},\end{aligned}$$

所以

$$\mu_h^{(l)}\leqslant\max_{v\in\Phi_l}\frac{a(v,v)}{1-\sigma_h^{(l)}}=\frac{\lambda^{(l)}}{1-\sigma_h^{(l)}}.$$

引理 16.2 设 $v\in\Phi_l$，$v=\sum_{j=1}^{l}\alpha_jU^{(j)}$，则

$$(v,v-\Pi v)_{L^2(\Omega)}=\sum_{j=1}^{l}\frac{\alpha_j}{\lambda^{(j)}}a(U^{(j)}-\Pi U^{(j)},\ v-\Pi v).$$

证明 因为 $U^{(j)}$ 是特征函数，所以

$$(U^{(j)},v-\Pi v)_{L^2(\Omega)}=\frac{1}{\lambda^{(j)}}a(U^{(j)},v-\Pi v).$$

又由 (16.9) 得到

$$a(\Pi U^{(j)},v-\Pi v)=0.$$

把以上两式相减后得到

$$(U^{(j)},v-\Pi v)_{L^2(\Omega)}=\frac{1}{\lambda^{(j)}}a(U^{(j)}-\Pi U^{(j)},v-\Pi v),$$

用 α_j 乘上式，并对 j 求和，即得所证．

定理 16.6 假设 V_h 是 k 次有限元空间，h 充分小，则存在常数 δ，使得

$$\mu_h^{(l)}\leqslant\lambda^{(l)}+2\delta h^{2k}[\lambda^{(l)}]^{k+1}.$$

证明 设 v 如引理 16.2 所示，则有

$$2|(v, v-\Pi v)_{L^2(\Omega)}| = 2\left|\sum_{j=1}^{l} \frac{\alpha_j}{\lambda^{(j)}} a(U^{(j)} - \Pi U^{(j)}, v-\Pi v)\right|$$

$$\leqslant 2a_1 \left\|(I-\Pi)\sum_{j=1}^{l}\frac{\alpha_j}{\lambda^{(j)}} U^{(j)}\right\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\times \|(I-\Pi)v\|_{H^1(\Omega)}.$$

由逼近性质即得

$$2|(v, v-\Pi v)_{L^2(\Omega)}| \leqslant c_2 h^{2k}\left\|\sum_{j=1}^{l}\frac{\alpha_j}{\lambda^{(j)}}U^{(j)}\right\|_{H^{k+1}(\Omega)}$$

$$\times\left\|\sum_{j=1}^{l}\alpha_j U^{(j)}\right\|_{H^{k+1}(\Omega)}.$$

因为 L 是二阶自共轭正定椭圆算子，所以

$$\|U^{(j)}\|_{H^{k+1}(\Omega)} \leqslant c_3\|L^{\frac{k+1}{2}}U^{(j)}\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c_3(\lambda^{(j)})^{\frac{k+1}{2}}\|U^{(j)}\|_{L^2(\Omega)},$$

从而

$$2|(v, v-\Pi v)_{L^2(\Omega)}| \leqslant c_4 h^{2k}[\lambda^{(l)}]^k. \tag{16.12}$$

另一方面，由 (16.10) 得到

$$\|v-\Pi v\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c_5 h^{2k+2}\|v\|^2_{H^{k+1}(\Omega)}.$$

把上式和 (16.12) 代入 (16.11) 中，即得到关于 $\sigma_h^{(l)}$ 的估计式，再应用引理 16.1，就有

$$\mu_h^{(l)} \leqslant \lambda^{(l)}(1+2\sigma_h^{(l)}) \leqslant \lambda^{(l)} + 2\delta h^{2k}(\lambda^{(l)})^{k+1}.$$

下面估计 $\|U^{(l)} - u_h^{(l)}\|_{L^2(\Omega)}$。假定 $\{U^{(l)}\}$ 和 $\{u_h^{(l)}\}$ 都已规范化。

引理 16.3 我们有

$$a(U^{(l)}-u_h^{(l)}, U^{(l)}-u_h^{(l)}) = \lambda^{(l)}\|U^{(l)}-u_h^{(l)}\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu_h^{(l)} - \lambda^{(l)}.$$

证明 可直接验证

$$a(U^{(l)}-u_h^{(l)}, U^{(l)}-u_h^{(l)}) = a(U^{(l)}, U^{(l)}) - 2a(U^{(l)}, u_h^{(l)}) + a(u_h^{(l)}, u_h^{(l)})$$

$$= \lambda^{(l)} - 2\lambda^{(l)}(U^{(l)}, u_h^{(l)})_{L^2(\Omega)} + \mu_h^{(l)}$$

$$= \lambda^{(l)}[2 - 2(U^{(l)}, u_h^{(l)})_{L^2(\Omega)}] + \mu_h^{(l)} - \lambda^{(l)}$$

$$= \lambda^{(l)}\|U^{(l)} - u_h^{(l)}\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu_h^{(l)} - \lambda^{(l)}.$$

引理 16.4

$$(\mu_h^{(j)} - \lambda^{(l)})(\Pi U^{(l)}, u_h^{(j)})_{L^2(\Omega)} = \lambda^{(l)}(U^{(l)} - \Pi U^{(l)}, u_h^{(j)})_{L^2(\Omega)}.$$

证明 只要证明 $\mu_h^{(j)}(\Pi U^{(l)}, u_h^{(j)})_{L^2(\Omega)} = \lambda^{(l)}(U^{(l)}, u_h^{(j)})_{L^2(\Omega)}$. 因为 $U^{(l)}$ 和 $u_h^{(j)}$ 分别是原问题和近似问题的特征值，所以又归结为证明 $a(\Pi U^{(l)}, u_h^{(j)}) = a(U^{(l)}, u_h^{(j)})$，而这是显然的.

定理 16.7 设 V_h 是 k 次有限元空间，$\lambda^{(l)}$ 是单重特征值，则

$$\|U^{(l)} - u_h^{(l)}\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c_l h^{k+1}(\lambda^{(l)})^{\frac{k+1}{2}}, \tag{16.13}$$

$$a(U^{(l)} - u_h^{(l)}, U^{(l)} - u_h^{(l)}) \leqslant c_l h^{2k}|\lambda^{(l)}|^{k+1}, \tag{16.14}$$

其中 c_l 是与 l 有关的正常数，但在不同的地方可以取不同的值.

若 $\lambda^{(l)}$ 是 $p+1$ 重特征值，$\lambda^{(l)} = \cdots = \lambda^{(l+p)}$，则可选择规范化的 $\bar{U}^{(j)}$，$l \leqslant j \leqslant l+p$，使得 (16.13) 和 (16.14) 仍然成立.

证明 由于 $u_h^{(1)} \cdots u_h^{(N)}$ 组成 V_h 的一组正交基，因此

$$\Pi U^{(l)} = \sum_{j=1}^{N} (\Pi U^{(l)}, u_h^{(j)})_{L^2(\Omega)} u_h^{(j)}.$$

若 $\lambda^{(l)}$ 是单重特征值，则当 h 充分小时，对一切 $j \neq l$，

$$\left|\frac{\lambda^{(l)}}{\mu_h^{(j)} - \lambda^{(l)}}\right| \leqslant c_l, \tag{16.15}$$

记 $\beta_h = (\Pi U^{(l)}, u_h^{(l)})_{L^2(\Omega)}$，则有

$$\|\Pi U^{(l)} - \beta_h u_h^{(l)}\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{j \neq l} (\Pi U^{(l)}, u_h^{(j)})^2_{L^2(\Omega)}.$$

又有

$$\mu_h^{(j)}(\Pi U^{(l)}, u_h^{(j)})_{L^2(\Omega)} - \lambda^{(l)}(U^{(l)}, u_h^{(j)})_{L^2(\Omega)} = a(\Pi U^{(l)}, u_h^{(j)}) - a(U^{(l)}, u_h^{(j)}) = 0,$$

所以

$$(\mu_h^{(j)} - \lambda^{(l)})(\Pi U^{(l)}, u_h^{(j)})_{L^2(\Omega)} = \lambda^{(l)}(U^{(l)} - \Pi U^{(l)}, u_h^{(j)})_{L^2(\Omega)},$$

因此

$$\|\Pi U^{(l)} - \beta_h u_h^{(l)}\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{j \neq l} \left(\frac{\lambda^{(l)}}{\mu_h^{(j)} - \lambda^{(l)}}\right)^2 (U^{(l)} - \Pi U^{(l)}, u_h^{(j)})^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\leqslant c_l \sum_{j \neq l} (U^{(l)} - \Pi U^{(l)}, u_h^{(j)})^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\leqslant c_l^2 \|U^{(l)} - \Pi U^{(l)}\|^2_{L^2(\Omega)},$$

和

$$\|U^{(l)} - \beta_h u_h^{(l)}\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|U^{(l)} - \Pi U^{(l)}\|_{L^2(\Omega)} + \|\Pi U^{(l)} - \beta_h u_h^{(l)}\|_{L^2(\Omega)} \leqslant (1 + c_l)\|U^{(l)} - \Pi U^{(l)}\|_{L^2(\Omega)}.$$

进一步由 (16.10) 得到

$$\|U^{(l)} - \beta_h u_h^{(l)}\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c_l h^{k+1} (\lambda^{(l)})^{\frac{k+1}{2}}. \qquad (16.16)$$

另一方面有

$$\|U^{(l)}\|_{L^2(\Omega)} - \|U^{(l)} - \beta_h u_h^{(l)}\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|\beta_h u_h^{(l)}\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\leqslant \|U^{(l)}\|_{L^2(\Omega)} + \|U^{(l)} - \beta_h u_h^{(l)}\|_{L^2(\Omega)},$$

假定已适当地选择 $U^{(l)}$ 和 $u_h^{(l)}$ 的符号，使得 $\beta_h > 0$，于是由上式得到

$$|\beta_h - 1| \leqslant \|U^{(l)} - \beta_h u_h^{(l)}\|_{L^2(\Omega)},$$

从而

$$\|U^{(l)} - u_h^{(l)}\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|U^{(l)} - \beta_h u_h^{(l)}\|_{L^2(\Omega)} + \|(\beta_h - 1)u_h^{(l)}\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\leqslant 2\|U^{(l)} - \beta_h u_h^{(l)}\|_{L^2(\Omega)}.$$

把 (16.16) 代入上式即得 (16.13)，并由引理16.3推得 (16.14)。

若 $\lambda^{(l)}$ 是 $p+1$ 重特征值，则 (16.15) 仍然成立，但其中

$$j \neq l, \cdots, l+p,$$

而 β_h 为 $(p+1)\times(p+1)$ 阶矩阵，其元素 $\beta_{h,rs} = (\Pi U^{(l+r)}, u_h^{(l+s)})_{L^2(\Omega)}$，$0 \leqslant r, s \leqslant p$，并可证得

$$\left\| \sum_{s=0}^{p} \beta_{h,rs} u_h^{(l+s)} - U^{(l+r)} \right\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c_l h^{k+1} |\lambda^{(l)}|^{\frac{k+1}{2}}.$$

因此可选择 $\overline{U}^{(l+s)}$，使得

$$\|\overline{U}^{(l+s)} - u_h^{(l+s)}\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c_l h^{k+1} (\lambda^{(l)})^{\frac{k+1}{2}}.$$

注记 16.1 Вайникко (1964, 1967) 也曾得到过类似的估计，Bramble, Osborn (1972) 还进行了相应的数值工作，这些结果

都可推广到高阶正定自共轭椭圆型方程的特征值问题．对于边界有角点的情况可见 Kellogg (1970, 1971), Straug Fix (1973) 的文章．对于系数光滑性很差的情况，则可见 Nemat-nasser (1972, 1974) 和 Babuška, Osborn (1978) 的文章。

16.4 加速收敛方法

应用高次有限元空间直接计算特征值，会给计算工作带来困难．林群，谢干权 (1981) 提出了一种应用低次有限元计算的加速收敛方法．假设 L 是二阶正定自共轭椭圆算子，它的某个特征值及其相应的规范特征函数分别是 λ 和 U，在边界上 $U=0$，并且已用某种方法得到近似解 μ_h 和 u_h．作辅助函数 φ，

$$\begin{cases} L\varphi = \mu_h u_h, & x\in\Omega, \\ \varphi = 0, & x\in\Gamma, \end{cases}$$

并令

$$\bar{u}_h = \frac{\varphi}{\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}}, \qquad \bar{\mu}_h = R(\bar{u}_h),$$

定理 16.8 若 $|\lambda-\mu_h| = O(h^2)$，$\|U-u_h\|_{L^2(\Omega)} = O(h^2)$，则

$$\bar{\mu}_h \leqslant \lambda + O(h^4), \qquad \|U-\bar{u}_h\|_{H^1(\Omega)} = O(h^2).$$

证明 因为

$$L(U-\varphi) = \lambda(U-u_h) + (\lambda-\mu_h)u_h,$$

所以

$$\|U-\varphi\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_1(|\lambda|\,\|U-u_h\|_{L^2(\Omega)} + |\lambda - \mu_h|\,\|u_h\|_{L^2(\Omega)}) \leqslant c_1 h^2.$$

又有

$$|1-\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}| = |\|U\|_{L^2(\Omega)} - \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}| \leqslant \|U-\varphi\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_2 h^2,$$

因此

$$\|U-\bar{u}_h\|_{H^1(\Omega)} = \frac{1}{\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}} \|\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}U - \varphi\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\leqslant \frac{1}{\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}} (\|\varphi - U\|_{H^1(\Omega)}$$

$$+ \|(1 - \|\varphi\|_{L^2(\Omega)})U\|_{H^1(\Omega)}) \leqslant c_3 h^2.$$

由于U和$\bar{u}_h$都已规范化，因此 $|(U, \bar{u}_h)_{L^2(\Omega)}| \leqslant 1$，从而

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}_h - \lambda &= \mu_h - 2\lambda + \lambda \leqslant (L\bar{u}_h, \bar{u}_h)_{L^2(\Omega)} \\
&\quad - 2\lambda(U, \bar{u}_h)_{L^2(\Omega)} + (LU, U)_{L^2(\Omega)} \\
&= (L\bar{u}_h, \bar{u}_h)_{L^2(\Omega)} - 2(LU, \bar{u}_h)_{L^2(\Omega)} + (LU, U)_{L^2(\Omega)} \\
&= (L(\bar{u}_h - U), \bar{u}_h - U)_{L^2(\Omega)} \leqslant a_1\|U - \bar{u}_h\|^2_{H^1(\Omega)} \\
&\leqslant a_1 c_3^2 h^4,
\end{aligned}$$

所以

$$\bar{\mu}_h \leqslant \lambda + O(h^4).$$

如果λ的最小特征值是 $\lambda^{(1)}$，则有

$$\lambda^{(1)} \leqslant \bar{\mu}_h^{(1)} \leqslant \lambda^{(1)} + O(h^4).$$

注记 16.2　在具体计算时，还要用二次有限元计算φ的近似解 φ_h，并由此得到相应的$\bar{\mu}_h$和$\bar{u}_h$，可以证明

$$\bar{\mu}_h \leqslant \lambda + O(h^4), \qquad \|U - \bar{u}_h\|_{H^1(\Omega)} = O(h^2).$$

Lin Qun, Liu Jia-uan (1983) 还提出了另一种多次加速收敛的方法。为方便计，考虑下列问题

$$\begin{cases} -\Delta U = \lambda U, & x \in \Omega, \\ U = 0, & x \in \Gamma. \end{cases} \tag{16.17}$$

设μ_h和u_h是λ和U的近似解，并且U和u_h都已规范化。作辅助函数φ，它满足

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = u_h, & x \in \Omega, \\ \varphi = 0, & x \in \Gamma, \end{cases} \tag{16.18}$$

并把$\bar{\mu}_h = \dfrac{1}{(u_h, \varphi)_{L^2(\Omega)}}$作为$\lambda$的新的近似值。又作辅助函数$\phi$和$\xi$，使得

$$(\nabla\phi, \nabla w_h)_{L^2(\Omega)} - \bar{\mu}_h(\phi, w_h)_{L^2(\Omega)} = \bar{\mu}_h(\bar{\mu}_h\varphi$$

$$- u_h, w_h)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall w_h \in V_h, \tag{16.19}$$

$$\xi = \bar{\mu}_h\varphi + \phi, \tag{16.20}$$

最后把 $\bar{u}_h = \frac{\xi}{\|\xi\|_{L^2(\Omega)}}$ 作为 U 的新的近似解.

定理 16.9 如果 λ 是 (16.17) 的单重特征值,那末

$$0 \leqslant \bar{\mu}_h - \lambda \leqslant \bar{\mu}_h \|U - u_h\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{16.21}$$

$$\|U - \bar{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c_4(h^2\|U - u_h\|_{L^2(\Omega)} + \|U - u_h\|^2_{L^2(\Omega)}). \tag{16.22}$$

证明 用 K 表示微分算子 $-\triangle$ 的逆, 也就是说 $\bar{v} = Kv$ 满足

$$(\nabla\bar{v}, \nabla w)_{L^2(\Omega)} = (v, w)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall w \in H^1_0(\Omega).$$

又用 Π 表示如下的投影算子

$$(\nabla(\Pi v - v), \nabla w_h)_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \forall w_h \in V_h.$$

则

$$\|\Pi v - v\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_5 h\|v\|_{H^2(\Omega)}.$$

采用上述记号以后,(16.17)—(16.19)可改写成

$$U = \lambda KU, \quad \|U\|_{L^2(\Omega)} = 1, \tag{16.23}$$

$$\varphi = Ku_h, \quad \|u_h\|_{L^2(\Omega)} = 1, \tag{16.24}$$

$$(I - \bar{\mu}_h \Pi K)\phi = \bar{\mu}_h \Pi K(\bar{\mu}_h\varphi - u_h). \tag{16.25}$$

把 (16.24), (16.25) 代入 (16.20) 后得到

$$(I - \bar{\mu}_h \Pi K)\xi = \bar{\mu}_h(K - \Pi K)u_h. \tag{16.26}$$

首先证明

$$\|K - \Pi K\| \leqslant c_6 h^2. \tag{16.27}$$

事实上,若 $w = Kv$, 则 $\|w\|_{H^2(\Omega)} \leqslant c_7\|v\|_{L^2(\Omega)}$, 从而

$$\begin{aligned}\|\nabla((I - \Pi)Kv)\|_{L^2(\Omega)} &= \|\nabla(w - \Pi w)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant c_8 h\|w\|_{H^2(\Omega)} \leqslant c_7 c_8 h\|v\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

又由 Nitsche 技巧,对一切 $v, w \in L^2(\Omega)$, 都有

$$\begin{aligned}|((I - \Pi)Kv, w)_{L^2(\Omega)}| &= |(\nabla((I - \Pi)Kv), \nabla Kw)_{L^2(\Omega)}| \\ &= |(\nabla((I - \Pi)Kv), \nabla((I - \Pi) \\ &\quad \times Kw))_{L^2(\Omega)}| \leqslant c_9 h^2\|v\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

由此即可推出 (16.27).

其次来证明 (16.21) 成立. 根据 $U = \lambda KU$ 和 $\bar{\mu}_h$ 的定义得到

$$\bar{\mu}_h - \lambda = \bar{\mu}_h\lambda((KU, U)_{L^2(\Omega)} - (Ku_h, u_h)_{L^2(\Omega)}).$$

因为

$$(KU, U)_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{\lambda}, \quad (Ku_h, u_h)_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{\mu_h}$$

和 $\lambda \leqslant \mu_h$，所以 $\lambda \leqslant \bar{\mu}_h$，而且还不难直接验证

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_h - \lambda &= \bar{\mu}_h\lambda(2(KU, U)_{L^2(\Omega)} - 2(KU, u_h)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad - (K(U - u_h), (U - u_h))_{L^2(\Omega)}) \\ &= \bar{\mu}_h\lambda\left[\frac{2}{\lambda}(1 - (U, u_h)_{L^2(\Omega)}) - (K(U \right. \\ &\quad \left. - u_h), (U - u_h))_{L^2(\Omega)}\right] \\ &= \bar{\mu}_h\|U - u_h\|^2_{L^2(\Omega)} - \bar{\mu}_h\lambda(K(U \\ &\quad - u_h), (U - u_h))_{L^2(\Omega)} \leqslant \bar{\mu}_h\|U - u_h\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

下面来证明 (16.22)．为此先考虑下列辅助问题

$$\begin{cases}\bar{U} = \lambda\Pi K\bar{U}, & x \in \Omega, \\ \bar{U} = 0, & x \in \Gamma.\end{cases} \tag{16.28}$$

我们把 (16.25) 对 $\bar{U}$ 求内积后得到

$$\begin{aligned}(\phi, \bar{U})_{L^2(\Omega)} - \bar{\mu}_h(\Pi K\phi, \bar{U})_{L^2(\Omega)} &= \bar{\mu}_h(\bar{\mu}_h\Pi K\varphi \\ &\quad - \Pi Ku_h, \bar{U})_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

由 (16.28) 和上式得到

$$(\bar{\lambda} - \bar{\mu}_h)(\phi, \bar{U})_{L^2(\Omega)} = \bar{\mu}_h(\bar{\mu}_h\varphi - u_h, \bar{U})_{L^2(\Omega)}.$$

因为 $(\bar{\mu}_h\varphi - u_h, u_h)_{L^2(\Omega)} = 0$，所以

$$(\bar{\lambda} - \bar{\mu}_h)(\phi, \bar{U})_{L^2(\Omega)} = \bar{\mu}_h(\bar{\mu}_h\varphi - u_h, \bar{U} - u_h)_{L^2(\Omega)},$$

或

$$\begin{aligned}(\phi, \bar{U})_{L^2(\Omega)} &= \frac{\bar{\mu}_h}{\bar{\lambda} - \bar{\mu}_h}(\bar{\mu}_h\varphi - u_h, \bar{U} - u_h)_{L^2(\Omega)} \\ &= O\left(\frac{\bar{\mu}_h}{\bar{\lambda} - \bar{\mu}_h}\|\bar{\mu}_h\varphi - u_h\|_{L^2(\Omega)}\|\bar{U} - u_h\|_{L^2(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

因为$-\Delta(\bar{\mu}_h\varphi - \bar{U}) = \bar{\mu}_h u_h - \lambda U$，所以

$$\begin{aligned}\|\bar{\mu}_h\varphi - u_h\|_{L^2(\Omega)} &\leqslant \|U - u_h\|_{L^2(\Omega)} + \|\bar{\mu}_h\varphi - U\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant \|U - u_h\|_{L^2(\Omega)} + c_{10}\|\bar{\mu}_h u_h - \lambda U\|_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

$$\leqslant \|U-u_h\|_{L^2(\Omega)}+c_{11}(|\bar{\mu}_h-\lambda|\|U\|_{L^2(\Omega)}$$
$$+\bar{\mu}_h\|U-u_h\|_{L^2(\Omega)})$$
$$=O(\|U-u_h\|_{L^2(\Omega)}), \tag{16.29}$$

因此

$$(\psi,\bar{U})_{L^2(\Omega)}=O\left(\frac{\bar{\mu}_h}{\bar{\lambda}-\bar{\mu}_h}\|U-u_h\|_{L^2(\Omega)}\|\bar{U}-u_h\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

今假定 $|\lambda-\bar{\mu}_h|\geqslant c_{12}\|\bar{U}-u_h\|_{L^2(\Omega)}$，其中 $c_{12}>0$，则得到

$$(\psi,\bar{U})_{L^2(\Omega)}=O(\|U-u_h\|_{L^2(\Omega)}),\quad \psi=O(\|U-u_h\|_{L^2(\Omega)}).$$

把上式和 (16.29) 代入 (16.20) 后有

$$\xi-U=\bar{\mu}_h\varphi-U+\psi=(\bar{\mu}_h\varphi-u_h)+(u_h-U)+\psi$$
$$=O(\|U-u_h\|_{L^2(\Omega)}). \tag{16.30}$$

由 (16.23) 和 (16.26) 得到

$$(I-\bar{\mu}_h\Pi K)(\xi-U)=\frac{\bar{\mu}_h-\lambda}{\lambda}U+\bar{\mu}_h(\Pi K-K)$$
$$\times(U-u_h).$$

因此结合上式和 (16.21)，(16.30) 得到

$$(I-\lambda K)(\xi-U)=(I-\bar{\mu}_h\Pi K)(\xi-U)$$
$$+(\bar{\mu}_h\Pi K-\lambda K)(\xi-U)$$
$$=(I-\bar{\mu}_h\Pi K)(\xi-U)+(\bar{\mu}_h\Pi K$$
$$-\bar{\mu}_hK)(\xi-U)+(\bar{\mu}_h$$
$$-\lambda)K(\xi-U)$$
$$=O(\|K-\Pi K\|\|U-u_h\|_{L^2(\Omega)}+\|U$$
$$-u_h\|^2_{L^2(\Omega)})=O(h^2\|U-u_h\|_{L^2(\Omega)}$$
$$+\|U-u_h\|^2_{L^2(\Omega)}). \tag{16.31}$$

又由 (16.23) 得到

$$(I-\lambda K)(\xi-(\xi,U)_{L^2(\Omega)}U)=(I$$
$$-\lambda K)(\xi-U), \tag{16.32}$$

把上式对 U 求内积后有

$$(\xi-(\xi,U)_{L^2(\Omega)}U,U)_{L^2(\Omega)}=(\lambda K(\xi-(\xi,U)_{L^2(\Omega)}U),U)_{L^2(\Omega)}$$
$$+((I-\lambda K)(\xi-U),U)_{L^2(\Omega)}.$$

因为上式左端为零，所以

$$(\lambda K(\xi-(\xi,U)_{L^2(\Omega)}U),U)_{L^2(\Omega)}=-((I-\lambda K)\times(\xi-U),U)_{L^2(\Omega)},$$

故由 (16.31) 得到

$$(\lambda K(\xi-(\xi,U)_{L^2(\Omega)}U),U)_{L^2(\Omega)}=O(h^2\|U-u_h\|_{L^2(\Omega)}+\|U-u_h\|^2_{L^2(\Omega)}),$$

因此

$$\lambda K(\xi-(\xi,U)_{L^2(\Omega)}U)=O(h^2\|U-u_h\|_{L^2(\Omega)}+\|U-u_h\|^2_{L^2(\Omega)}).$$

再结合上式与 (16.31)，就由 (16.32) 得到

$$\xi=(\xi,U)_{L^2(\Omega)}U+O(h^2\|U-u_h\|_{L^2(\Omega)}+\|U-u_h\|^2_{L^2(\Omega)}),$$

从而

$$\|\xi\|^2_{L^2(\Omega)}=|(\xi,U)_{L^2(\Omega)}|^2+O(h^2\|U-u_h\|_{L^2(\Omega)}+\|U-u_h\|^2_{L^2(\Omega)}),$$

并由此推得

$$\bar{u}_h=\frac{\xi}{\|\xi\|_{L^2(\Omega)}}=U+O(h^2\|U-u_h\|_{L^2(\Omega)}+\|U-u_h\|^2_{L^2(\Omega)}).$$

注记 16.3　如果 V_h 是一次有限元空间，则

$$|\lambda-\mu_h|=O(h^2),\quad \|U-u_h\|_{L^2(\Omega)}=O(h^2),$$

从而

$$|\lambda-\bar{\mu}_h|=O(h^4),\ \|U-\bar{u}_h\|_{L^2(\Omega)}=O(h^4).$$

如此逐次递推下去，就可得到更精确的结果。

在具体应用这个方法时，还要用相应的高次有限元空间来计算 φ 的近似解 φ_h. 然而，由此得到的 ξ_h 未必满足上述误差估计式.

16.5　Weinberger 的差分方法

在前面几节中用协调有限元方法计算特征值，所得到的都是上界估计. Weinberger (1956) 则应用古典差分方法得到了下界

估计．设 $n=2$，Ω 和 Γ 如前，并考虑下列问题

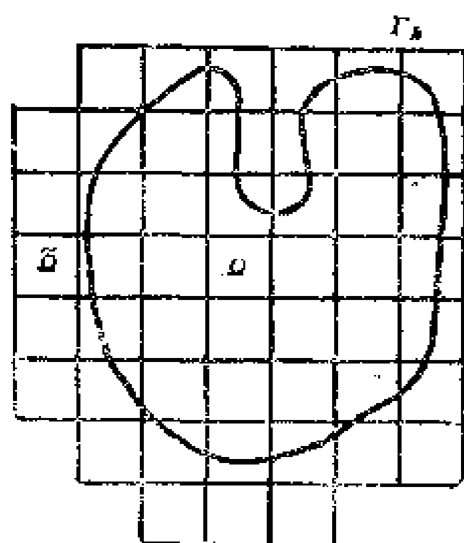


图 16.2

$$\begin{cases}-\Delta U=\lambda U, & x\in\Omega,\\ U=0, & x\in\Gamma,\end{cases} \tag{16.33}$$

作一个比 Ω 稍大的区域 $\tilde{\Omega}$，它由边长为 h 的正方形所组成，并且包含所有这样的点 x，即存在 γ_m，$0\leqslant\gamma_m\leqslant h$，使得

$$x+\gamma_1e_1+\gamma_2e_2\in\Omega.$$

（见图 16.2）．令 Ω_h 是 $\bar{\tilde{\Omega}}$ 上所有网格点的全体，其边界是 Γ_h，记

$$D_h(v)=h^2\sum_{x\in\Omega_h}[(v_{x_1}(x))^2+(v_{x_2}(x))^2],$$

并作下列 Rayleigh 比的差分模拟

$$R_h(v)=\frac{D_h(v)}{\|v\|^2}.$$

记 $v=\{v(x)/x\in\Omega_h\}$，则 $D_h(v)$ 是 $v(x)$ 的二次型，故可写成

$$\frac{D_h(v)}{h^2}=v^*Av,\quad R_h(v)=\frac{v^*Av}{v^*v},$$

其中 A 是半正定对称矩阵，因此 $R_h(v)$ 的驻点值 μ_h 恰为 A 的特征值．又可证明 $Av(x)=-\Delta_hv(x)$，所以 μ_h 是下列问题的特征值

$$\begin{cases}-\Delta_hu_h(x)=\mu_hu_h(x), & x\in\Omega_h,\\ u_h(x)=0, & x\in\Gamma_h.\end{cases} \tag{16.34}$$

定理 16.10 设 $\lambda^{(1)}$ 和 $\mu_h^{(1)}$ 分别是问题 (16.33) 和 (16.34) 的最小特征值，则 $\mu_h^{(1)}<\lambda^{(1)}$．

证明 用零值把特征函数 $U^{(1)}(x)$ 开拓到 Ω 之外．又记

$$U_\gamma(x)=U^{(1)}(x+\gamma_1e_1+\gamma_2e_2),\quad 0\leqslant\gamma_1,\ \gamma_2\leqslant h.$$

对于固定的 γ_m，把 $U_\gamma(x)$ 代入 $R_h(v)$，于是

$$\mu_h^{(1)}h^2\sum_{x\in\Omega_h}U_\gamma^2(x)\leqslant h^2\sum_{x\in\Omega_h}(U_{\gamma,x_1}^2(x)+U_{\gamma,x_2}^2(x)).\quad(16.35)$$

把上式在正方形 $\{\gamma/0\leqslant\gamma_1,\gamma_2\leqslant h\}$ 内积分，则 (16.35) 的左端积分值是

$$\mu_h^{(1)}h^2\sum_{x\in\Omega_h}\int_0^h\int_0^h U_\gamma^2(x)d\gamma_1d\gamma_2=\mu_h^{(1)}h^2\int_\Omega[U^{(1)}(x)]^2dx,$$

(16.35) 式右端第一项的积分有下列估计式

$$\begin{aligned}h^2\sum_{x\in\Omega_h}\int_0^h\int_0^h[U_{\gamma,x_1}(x)]^2d\gamma_1d\gamma_2&=h^2\int_\Omega[U_{x_1}^{(1)}(x)]^2dx\\&=h^2\int_\Omega\int_0^h\left(\frac{\partial U^{(1)}}{\partial x_1}(x+\sigma e_1)\,d\sigma\right)^2dx\\&\leqslant\int_\Omega\left\{h\int_0^h\left[\frac{\partial U^{(1)}}{\partial x_1}(x+\sigma e_1)\right]^2d\sigma\right\}dx\\&=h\int_0^h d\sigma\int_\Omega\left(\frac{\partial U^{(1)}}{\partial x_1}(x)\right)^2dx=h^2\int_\Omega\left(\frac{\partial U^{(1)}}{\partial x_1}\right)^2dx.\end{aligned}$$

类似地可得到(16.35)式右端第二项的积分的估计式，从而有

$$\mu_h^{(1)}h^2\int_\Omega[U^{(1)}(x)]^2dx\leqslant h^2\int_\Omega|\nabla U^{(1)}|^2dx,$$

所以

$$\mu_h^{(1)}\leqslant\frac{|U^{(1)}|_{H^1(\Omega)}^2}{\|U^{(1)}\|_{L^2(\Omega)}^2}=\lambda^{(1)}.$$

Weinberger (1958) 把上述方法推广到一般椭圆型算子和较高阶特征值的估计. Hersch (1955, 1963), Hersch, Pfluger, Schopf (1956) 的工作与 Weinberger 的工作有关，此外还可见 Synge (1951, 1957) 的文章.

16.6 计算高阶和多重特征值的差分方法

本节讨论高阶和多重特征值的计算，所考虑的问题仍是(16.33)，其中 Γ 由有限个逐段解析曲线所组成，在角点上，内角小于 π. 此时，特征函数 $U^{(l)}(x)$ 有良好的性质，列举如下：

引理 16.5 $U^{(l)}(x)$ 在 Ω 中是 x_m 的解析函数.

引理 16.6 除角点外，$U^{(l)}(x)$ 在 Γ 上是处处解析的.

引理 16.7 设角点 $x^{(0)}\in\Gamma$，其内角为 $\frac{\pi}{\alpha}$，$\alpha>1$，则

$$\frac{\partial^p U^{(l)}(x)}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}}=|x-x^{(0)}|^{\alpha-p}\omega_{p_1,p_2}^{(l)}(x),$$

其中 $p=p_1+p_2$，$\omega_{p_1,p_2}^{(l)}(x)$ 在点 $x^{(0)}$ 是连续的.

引理 16.5 的证明可见 Bernstein (1950) 的文章。 引理 16.6 的证明可见 Morrey, Nirenberg (1957) 的文章。引理 16.7 可用 Lehaman (1959) 的方法证明之。 根据前面三个引理还可得到:

引理 16.8 函数

$$\frac{\partial^2 U^{(l)}}{\partial x_m^2}\frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial x_m^2},\quad \frac{\partial U^{(l)}}{\partial x_m}\frac{\partial^3 U^{(k)}}{\partial x_m^3},\quad U^{(l)}\frac{\partial^4 U^{(k)}}{\partial x_m^4}$$

在 $\bar{\Omega}$ 上 Lebesgue 可积,函数 $\frac{\partial U^{(l)}}{\partial x_m}\frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial x_m^2}$ 在 Γ 上 Lebesgue 可积,其中 $m=1,2$。

用 τ 表示 x_1 轴与 Γ 的切线的正方向之间的交角,则 $\tau=\tau(s)$ 是弧长 s 的逐段连续可微函数. 由引理 16.7，$\frac{\partial U^{(l)}}{\partial n}$ 在 Γ 上是连续的. 记

$$F(U^{(l)},U^{(k)})=\frac{1}{12}\sum_{m=1}^{2}\int_\Omega\frac{\partial^2 U^{(l)}}{\partial x_m^2}\cdot\frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial x_m^2}dx+\frac{1}{12}\int_\Gamma\frac{\partial U^{(l)}}{\partial n}\frac{\partial U^{(k)}}{\partial n}\sin^2 2\tau d\tau.$$

由于在角点上 $\frac{\partial U^{(l)}}{\partial n}=0$，因此

$$F(U^{(l)},U^{(k)})=\frac{1}{12}\sum_{m=1}^{2}\int_\Omega\frac{\partial^2 U^{(l)}}{\partial x_m^2}\frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial x_m^2}dx+\frac{1}{12}\int_\Gamma\frac{\partial U^{(l)}}{\partial n}\frac{\partial U^{(k)}}{\partial n}\sin^2[2\tau(s)]\tau'(s)ds. \tag{16.36}$$

假定 $U^{(l)}(x)$ 已规范化,对应于重特征值 $\lambda^{(l)}=\lambda^{(l+1)}=\cdots$，选取相应的 $U^{(l)}(x)$，使得它们在 $L^2(\Omega)$ 内积的意义下是正交

的. 用D表示无穷矩阵，其元素为 $d_{lk}=F(U^{(l)},U^{(k)})$，又定义实数序列 $\{\gamma_l\}$，若 $\lambda^{(l)}$ 是$-\Delta$的单重特征值，则 $\gamma_l=d_{ll}$，若

$$\lambda^{(l)}=\lambda^{(l+1)}=\cdots=\lambda^{(p+l-1)}$$

是p重特征值，则规定 $\gamma_l\geqslant\gamma_{l+1}\geqslant\cdots\geqslant\gamma_{l+p-1}$ 是D的相应的p阶主子式 (d_{js})，$l\leqslant j,s=l+p-1$ 的p个实特征值.

现在按 § 4.6 中例 4.10 的方法构造 Ω_h 和 Γ_h，并用 Δ_h 表示 Shortley-Weller (1938) 差分算子. 由于$-\Delta_h$所对应的矩阵A不是对称的，因此不能把$-\Delta_h$的特征值简单地等价于一个二次型的驻点值. 为此引入算子$-\bar{\Delta}_h$，使得它所对应的矩阵是 $\frac{1}{2}(A+A^*)$. $-\bar{\Delta}_h$的特征值 $\mu_h^{(l)}$ 则是下列近似 Rayleigh 比的驻点值

$$R_h(v)=-\frac{h^2\sum\limits_{x\in\Omega_h}v(x)\bar{\Delta}_hv(x)}{\|v\|^2}.$$

下面来估计 $|\mu_h^{(l)}-\lambda^{(l)}|$，为此先证明几个引理.

引理 16.9 若 $v(x)\in C^2(\bar{\Omega})$，并在$\Gamma$上

$$v=\frac{\partial v}{\partial x_1}=\frac{\partial v}{\partial x_2}=0,$$

则

$$h^2\sum_{x\in\Omega_h}v(x)=\int_\Omega vdx+o(h^2).$$

证明 当x与Γ的距离不到h时，$|v(x)|\leqslant c_1h^2$，故在考虑上面的和式时，可以不必计入Γ_h附近的不规则网格点，因为这些项的总和不会超过 c_2Lh^3，其中L是Γ的长度.

用Q_h表示边长为h的正方形，其顶点为x，$x+he_1$，$x+he_2$和 $x+he_1+he_2$. 用 $x^{(0)}$ 表示它的中心，并用$\frac{1}{4}\sum\limits_{Q_h}v(x)$ 表示 $v(x)$ 在四个顶点上的平均值，于是

$$\frac{h^2}{4}\sum_{Q_h}v(x)=h^2v(x^{(0)})+\frac{h^4}{8}\Delta v(x^{(0)})+o(h^4),$$

$$\int_{Q_h}v(x)dx=h^2v(x^{(0)})+\frac{h^4}{24}\Delta v(x^{(0)})+o(h^4),$$

因此

$$\frac{h^2}{4}\sum_{Q_h} v(x) = \int_{Q_h} v(x)dx + \frac{h^4}{12}\Delta v(x^{(0)}) + o(h^4).$$

把上式对 $\bar{\Omega}_h$ 中的一切 Q_h 求和，则由 Green 公式和边界条件得到

$$h^2\sum_{x\in\Omega_h} v(x) = \int_\Omega v(x)dx + \frac{h^4}{12}\sum_{x^{(0)}\in\Omega_h}\Delta v(x^{(0)}) + o(h^2)$$

$$= \int_\Omega v(x)dx + \frac{h^2}{12}\int_\Omega \Delta v(x)dx + o(h^2)$$

$$= \int_\Omega v(x)dx + o(h^2).$$

引理 16.10

$$h^2\sum_{x\in\Omega_h} U^{(l)}(x)U^{(k)}(x) = \delta_{lk} + o(h^2).$$

证明 令 $v(x) = U^{(l)}(x)U^{(k)}(x)$，则在 Γ 上 $v(x) = 0$，而且当 x 趋向边界时，

$$\nabla v = U^{(l)}\nabla U^{(k)} + U^{(k)}\nabla U^{(l)} \to 0.$$

从而由引理 16.9 和 $\{U^{(l)}\}$ 的规范正交性，得到所证的结论.

引理 16.11 设 $|\theta_m| < 1$，$m = 1, 2$，

$$\Theta v(x) = \sum_{m=1}^{2}\frac{\partial^4 v}{\partial x_m^4}(x + \theta_m h e_m),$$

则当 $h \to 0$ 时，

$$\frac{h^2}{24}\Sigma'(U^{(l)}\Theta U^{(k)} + U^{(k)}\Theta U^{(l)}) = F(U^{(l)}, U^{(k)}) + o(1), \tag{16.37}$$

其中和式 Σ' 是对一切与角点距离大于 h 的规则内点求和的.

证明 根据引理 16.8，Lebesgue 收敛定理和 Forsythe (1954) 的方法，可以证明 (16.37) 的左端为

$$\frac{1}{24}\sum_{m=1}^{2}\int_\Omega\left(U^{(l)}\frac{\partial^4 U^{(k)}}{\partial x_m^4} + U^{(k)}\frac{\partial^4 U^{(l)}}{\partial x_m^4}\right)dx + o(1).$$

因为

$$U^{(l)}\frac{\partial^4 U^{(k)}}{\partial x_m^4} = \frac{\partial}{\partial x_m}\left(U^{(l)}\frac{\partial^3 U^{(k)}}{\partial x_m^3}\right) - \frac{\partial U^{(l)}}{\partial x_m}\frac{\partial^3 U^{(k)}}{\partial x_m^3},$$

故根据 Green 公式把上式化为

$$-\frac{1}{24}\sum_{m=1}^{2}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial U^{(l)}}{\partial x_m}\frac{\partial^3 U^{(k)}}{\partial x_m^3}+\frac{\partial U^{(k)}}{\partial x_m}\frac{\partial^3 U^{(l)}}{\partial x_m^3}\right)dx+o(1).$$

再次应用 Green 公式，则上式化为

$$\frac{1}{12}\sum_{m=1}^{2}\int_{\Omega}\frac{\partial^2 U^{(l)}}{\partial x_m^2}\frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial x_m^2}dx+\frac{1}{24}B+o(1),$$

其中

$$B=\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial U^{(l)}}{\partial x_2}\frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial U^{(k)}}{\partial x_2}\frac{\partial^2 U^{(l)}}{\partial x_2^2}\right)dx_1$$

$$-\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial U^{(l)}}{\partial x_1}\frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial U^{(k)}}{\partial x_1}\frac{\partial^2 U^{(l)}}{\partial x_1^2}\right)dx_2,$$

因此又把问题归结为证明

$$B=2\int_{\Gamma}\frac{\partial U^{(l)}}{\partial n}\frac{\partial U^{(k)}}{\partial n}\sin^2 2\tau d\tau. \tag{16.38}$$

因为除了角点外，$U^{(l)}$ 在 $\bar{\Omega}$ 上是解析的，并满足 (16.33)，所以

$$B=\int_{\Gamma}\frac{\partial^2 U^{(l)}}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial U^{(k)}}{\partial x_2}dx_1+\frac{\partial U^{(k)}}{\partial x_1}dx_2\right)$$

$$+\int_{\Gamma}\frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial U^{(l)}}{\partial x_2}dx_1+\frac{\partial U^{(l)}}{\partial x_1}dx_2\right). \tag{16.39}$$

用 $U^{(l)\prime}$ 表示 $\frac{dU^{(l)}}{ds}$. 由于

$$\frac{\partial U^{(l)}}{\partial x_1}=-\frac{\partial U^{(l)}}{\partial n}\sin\tau,\qquad \frac{\partial U^{(l)}}{\partial x_2}=\frac{\partial U^{(l)}}{\partial n}\cos\tau, \tag{16.40}$$

因此

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U^{(l)\prime}}{\partial x_1}=-\dfrac{\partial U^{(l)\prime}}{\partial n}\sin\tau-\dfrac{\partial U^{(l)}}{\partial n}\tau'\cos\tau\\[2ex] \qquad=\dfrac{\partial^2 U^{(l)}}{\partial x_1\partial x_2}\sin\tau+\dfrac{\partial^2 U^{(l)}}{\partial x_1^2}\cos\tau,\\[2ex] \dfrac{\partial U^{(l)\prime}}{\partial x_2}=\dfrac{\partial U^{(l)\prime}}{\partial n}\cos\tau-\dfrac{\partial U^{(l)}}{\partial n}\tau'\sin\tau\\[2ex] \qquad=\dfrac{\partial^2 U^{(l)}}{\partial x_1\partial x_2}\cos\tau+\dfrac{\partial^2 U^{(l)}}{\partial x_2^2}\sin\tau.\end{cases}$$

把 $\frac{\partial^2 U^{(l)}}{\partial x_1^2}$ 改写为 $-\frac{\partial^2 U^{(l)}}{\partial x_2^2}$，则由上式得到

$$\frac{\partial^2 U^{(l)}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial U^{(l)\prime}}{\partial n}\sin 2\tau + \frac{\partial U^{(l)}}{\partial n}\tau'\cos 2\tau, \quad x \in \Gamma.$$

因为 $dx_1 = \cos\tau ds$，$dx_2 = \sin\tau ds$，故由 (16.40) 得到

$$\int_\Gamma \frac{\partial^2 U^{(l)}}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial U^{(k)}}{\partial x_2}dx_1 + \frac{\partial U^{(k)}}{\partial x_1}dx_2\right) = \int_\Gamma\left(\frac{\partial U^{(l)\prime}}{\partial n}\sin 2\tau + \frac{\partial U^{(l)}}{\partial n}\tau'\cos 2\tau\right)\left(\frac{\partial U^{(k)}}{\partial n}\cos 2\tau\right)ds.$$

类似地有

$$\int_\Gamma \frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial U^{(l)}}{\partial x_2}dx_1 + \frac{\partial U^{(l)}}{\partial x_1}dx_2\right) = \int_\Gamma\left(\frac{\partial U^{(k)\prime}}{\partial n}\sin 2\tau + \frac{\partial U^{(k)}}{\partial n}\tau'\cos 2\tau\right)\left(\frac{\partial U^{(l)}}{\partial n}\cos 2\tau\right)ds.$$

把以上两式相加后得到

$$B = 2\int_\Gamma \frac{\partial U^{(l)}}{\partial n}\frac{\partial U^{(k)}}{\partial n}\cos^2 2\tau\cdot\tau' ds + \int_\Gamma\left(\frac{\partial U^{(l)}}{\partial n}\frac{\partial U^{(k)}}{\partial n}\right)'\sin 2\tau\cdot\cos 2\tau ds. \qquad (16.41)$$

应用分部积分可将上式的最后一项化为

$$-2\int_\Gamma \frac{\partial U^{(l)}}{\partial n}\cdot\frac{\partial U^{(k)}}{\partial n}\tau'\cdot\cos 4\tau ds.$$

考虑到 $\cos^2 2\tau - \cos 4\tau = \sin^2 2\tau$，$\tau' ds = d\tau(s)$，即由 (16.41) 推出 (16.38)。

引理 16.12 设 A，B 是两个 N 阶对称阵，$G = A - B$，它们的特征值分别由小到大地排列为 $\{\alpha^{(l)}\}$，$\{\beta^{(l)}\}$ 和 $\{g^{(l)}\}$，那末

$$\alpha^{(l)} - \beta^{(N)} \leqslant g^{(l)} \leqslant \alpha^{(l)} - \beta^{(1)}, \quad 1 \leqslant l \leqslant N.$$

证明 $B - \beta^{(1)}I$ 是半正定对称阵，所以 $\beta^{(l)} - \beta^{(1)} \geqslant 0$. $A - (B - \beta^{(1)}I)$ 的特征值为 $g^{(l)} + \beta^{(1)}$，它不超过 $\alpha^{(l)}$，因此

$$g^{(l)} \leqslant \alpha^{(l)} - \beta^{(1)}.$$

类似地可证明 $\alpha^{(l)} - \beta^{(N)} \leqslant g^{(l)}$.

引理 16.13 (Rellich (1953)) 设 ε 是实参数，$A(\varepsilon)$ 是 N 阶对称阵，当 $|\varepsilon|$ 适当小时，$A(\varepsilon)$ 的元素是解析函数. 那末，它的特征值 $\alpha^{(l)}(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon=0$ 是解析的. 此外，可选出特征向量集合 $\{\eta^{(l)}(\varepsilon)\}$，使得 $\eta^{(l)}(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon=0$ 是规范解析的.

根据引理 16.13，两个不恒等的特征值 $\alpha^{(k)}(\varepsilon)$ 和 $\alpha^{(l)}(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon=0$ 附近至多只有孤立点的重合. 于是，除了在孤立点外，不是恒等的 $\alpha^{(l)}(\varepsilon)$ 的规范特征向量系 $\{\eta^{(l)}(\varepsilon)\}$，除了符号外，可以唯一地确定. 在孤立的重合点 ε 上，则可根据连续性来选择 $\eta^{(l)}(\varepsilon)$.

引理 16.14 假设 $\alpha^{(l)}(0)$ 是 $A(0)$ 的 $p\geqslant 1$ 重特征值，相应的不变子空间是 $\mathfrak{N}$，向量 $q_1,\cdots,q_N$ 组成 $\mathfrak{N}$ 的任意一组规范正交基，又定义 p 阶矩阵 $G=(g_{il})$，其元素 $g_{il}=q_i^*A'(0)q_l$. 把 G 的特征值记为 $\beta^{(l)}$，$1\leqslant l\leqslant p$，于是，在适当的编号下，p 个特征值 $\alpha^{(l)}(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon=0$ 的导数为

$$\alpha^{(l)\prime}(0)=\beta^{(l)},\ 1\leqslant l\leqslant p.$$

证明 适当地选择 $\alpha^{(l)}(\varepsilon)$ 和 $\eta^{(l)}(\varepsilon)$，使得它们是规范解析的. 由于 $A(\varepsilon)\eta^{(l)}(\varepsilon)=\alpha^{(l)}(\varepsilon)\eta^{(l)}(\varepsilon)$，因此

$$\begin{aligned}A(0)\eta^{(l)\prime}(0)+A'(0)\eta^{(l)}(0)&=\alpha^{(l)\prime}(0)\eta^{(l)}(0)\\&\quad+\alpha^{(l)}(0)\eta^{(l)\prime}(0),\end{aligned}$$

用 $\eta^{(l)*}(0)$ 左乘上式后即有

$$\alpha^{(l)\prime}(0)=\eta^{(l)*}(0)A'(0)\eta^{(l)}(0). \tag{16.42}$$

量 $\beta^{(l)}$ 和 $\alpha^{(l)\prime}(0)$ 与座标的选择无关. 如果 $\alpha^{(l)}(\varepsilon)$ 是 p 重的，则必须选择(16.42)中的 p 个向量 $\eta^{(l)}(0)$，使得当 $\varepsilon\to 0$ 时，它们是 $\eta^{(l)}(\varepsilon)$ 的极限. 今假定座标已固定，并使得 $A(0)$ 为对角阵 $A^{(0)}$，并且 p 重特征值 $\alpha^{(l)}(0)$对应于 $A^{(0)}$ 的左上角的矩阵 $\alpha^{(l)}(0)I_p$，于是 $\mathfrak{N}$ 由前 p 个单位向量所张成.

根据 Taylor 定理，

$$A(\varepsilon)=A^{(0)}+\varepsilon A'(0)+O(\varepsilon^2),$$

$A(\varepsilon)$ 有 p 个单位特征向量 $\eta^{(l)}(\varepsilon)$. 根据引理 16.13，当 $\varepsilon\to 0$ 时，它们趋向于 $\mathfrak{N}$ 的一组基，所以当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\eta^{(l)}(\varepsilon)$ 的后面 $N-p$ 个分量，都趋向于零. 但 $\eta^{(l)}(\varepsilon)$ 的所有分量都是 ε 的解析函数，

因此这 $N-p$ 个分量必定是 $O(\varepsilon)$。

现在把 $A(\varepsilon)$ 分块为

$$A(\varepsilon)=\begin{pmatrix}\alpha^{(l)}(0)I_p+\varepsilon A'_{11}+\cdots & \varepsilon A'_{12}+\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \varepsilon A'_{21}+\cdots & A^{(0)}_{N-p}+\varepsilon A'_{22}+\cdots\end{pmatrix}\begin{matrix}(p)\\ \\ (N-p),\end{matrix}$$

相应地有

$$\eta^{(l)}(\varepsilon)=\begin{pmatrix}\eta_0^{(l)}+\varepsilon\eta_1^{(l)}+\cdots \\ \varepsilon\eta_2^{(l)}+\cdots\end{pmatrix}\begin{matrix}(p)\\ (N-p),\end{matrix}$$

$$\alpha^{(l)}(\varepsilon)=\alpha^{(l)}(0)+\varepsilon\alpha^{(l)\prime}(0)+\cdots.$$

根据以上三式即得到

$$A(\varepsilon)\eta^{(l)}(\varepsilon)=\begin{pmatrix}\alpha^{(l)}(0)\eta_0^{(l)}+\varepsilon(A'_{11}\eta_0^{(l)}+\alpha^{(l)}(0)\eta_1^{(l)})+\cdots \\ \varepsilon(A'_{21}\eta_0^{(l)}+A^{(0)}_{N-p}\eta_2^{(l)})+\cdots\end{pmatrix},$$

$$\alpha^{(l)}(\varepsilon)\eta^{(l)}(\varepsilon)=\begin{pmatrix}\alpha^{(l)}(0)\eta_0^{(l)}+\varepsilon(\alpha^{(l)\prime}(0)\eta_0^{(l)}+\alpha^{(l)}(0)\eta_1^{(l)})+\cdots \\ \varepsilon\alpha^{(l)}(0)\eta_2^{(l)}+\cdots\end{pmatrix}.$$

比较上面两式中关于 ε 的同次幂项的系数，就得到

$$A'_{11}\eta_0^{(l)}=\alpha^{(l)\prime}(0)\eta_0^{(l)}. \tag{16.43}$$

于是，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\eta^{(l)}(\varepsilon)$ 的前 p 个分量组成的向量 $\eta_0^{(l)}$，必定是 A'_{11} 的一个特征向量，其中 A'_{11} 是在所考虑的座标系统下的矩阵 G。因为 $\eta^{(l)}(0)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\eta^{(l)}(\varepsilon)$ 的后面 $N-p$ 个分量为零，所以

$$\eta_0^{(l)*}\eta_0^{(l)}=1,$$

从而得到

$$\eta^{(a)*}A'(0)\eta^{(l)}(0)=\eta_0^{(l)*}A'_{11}\eta_0^{(l)}=\eta_0^{(l)*}G\eta_0^{(l)}$$
$$=\eta_0^{(l)*}\beta^{(l)}\eta_0^{(l)}=\beta^{(l)},$$

把它代入(16.42)，即得引理的结论。

定理 16.11 假设 Ω, Γ, Ω_h 和 Γ_h 满足本节的条件，$\lambda^{(l)}$, $\mu_h^{(l)}$ 和 γ_l 的定义如前，那末

$$\mu_h^{(l)}\leqslant\lambda^{(l)}-\gamma_l h^2+o(h^2).$$

证明 首先，不难证明

$$R_h(v) = \frac{-h^2 \sum\limits_{x \in \Omega_h} v(x) \bar{\Delta}_h v(x)}{\|v\|^2} = \frac{-h^2 \sum\limits_{x \in \Omega_h} v(x) \Delta_h v(x)}{\|v\|^2}, \tag{16.44}$$

而 $\mu_h^{(l)}$ 是 $R_h(v)$ 的驻点值.

根据 Collatz (1938) 的思想，把试验函数取为由 $U^{(l)}(x)$ 所张成的子空间 $\mathfrak{N}$ 中的元素，即

$$v(x) = \sum_{l=1}^{N} v_l U^{(l)}(x),$$

其中 v_l 是实数. 用$\bar{\mu}_h$表示 $R_h(v)$ 在$\mathfrak{N}$中的驻点值，则可证明

$$\mu_h^{(l)} \leqslant \bar{\mu}_h^{(l)}.$$

现在把 $R_h(v)$ 中的和式改为 $\sum\limits_{x}'$，即只对 Ω_h 中的规则网格点求和，从而 $R_h(v)$ 变为相应的 $\bar{R}_h(v)$，它们的差只是 $o(h^2)$. 由于在规则点上

$$\bar{\Delta}_h U^{(l)}(x) = \Delta U^{(l)}(x) + \frac{h^2}{12} \Theta U^{(l)}(x),$$

所以

$$\bar{R}_h(v) = \frac{-\sum\limits_{l,j=1}^{N} v_l v_j \left(\sum\limits_{x}' U^{(l)}(x) \bar{\Delta}_h U^{(j)}(x) \right)}{\sum\limits_{l,j=1}^{N} v_l v_j \left(\sum\limits_{x}' U^{(l)}(x) U^{(j)}(x) \right)}$$

$$= \frac{-\sum\limits_{l,j=1}^{N} v_l v_j \left(\sum\limits_{x}' U^{(l)} \left(\Delta U^{(j)}(x) + \frac{h^2}{12} \Theta U^{(j)}(x) \right) \right)}{\sum\limits_{l,j=1}^{N} v_l v_j \left(\sum\limits_{x}' U^{(l)}(x) U^{(j)}(x) \right)}.$$

由于$-\Delta U^{(l)}(x) = \lambda^{(l)} U^{(l)}(x)$，因此

$$\bar{R}_h(v) = \frac{\sum\limits_{l,j=1}^{N} M_{lj} v_l v_j}{\sum\limits_{l,j=1}^{N} B_{lj} v_l v_j},$$

其中

$$M_{lj}=M_{jl}=\left(\frac{\lambda^{(l)}+\lambda^{(j)}}{2}\right)\sum_{x}{}' h^2U^{(l)}(x)U^{(j)}(x)$$

$$-\frac{h^2}{24}\sum_{x}{}' h^2(U^{(l)}(x)\Theta U^{(j)}(x)+U^{(j)}(x)\Theta U^{(l)}(x)),$$

$$B_{lj}=B_{jl}=h^2\sum_{x}{}' U^{(l)}(x)U^{(j)}(x).$$

由引理 16.10 和引理 16.11 有

$$B_{lj}=\delta_{lj}+o(h^2),$$

$$M_{lj}=\lambda^{(l)}\delta_{lj}-h^2F(U^{(l)},U^{(j)})+o(h^2)$$

$$=\lambda^{(l)}\delta_{lj}-h^2d_{lj}+o(h^2).$$

现在改变 $\{v_l\}$，使得 $\bar{R}_h(v)$ 达到驻点值 $\beta_h^{(l)}$，则有

$$\mathrm{Det}(M-\beta_h^{(l)}B)=0,$$

其中 $M=(M_{lj})$，$B=(B_{lj})$，所以 $\beta_h^{(l)}$ 也是 $B^{-\frac{1}{2}}MB^{\frac{1}{2}}$ 的特征值．由引理 16.12，B 的特征值，从而 $B^{-\frac{1}{2}}$ 的特征值都是 $1+o(h^2)$，所以

$$B^{-\frac{1}{2}}MB^{-\frac{1}{2}}=(\delta_{lj}\lambda^{(l)}-h^2d_{lj}+o(h^2)).$$

又由引理 16.12，$\beta_h^{(l)}$等于矩阵 $P(h^2)$ 的特征值加上 $o(h^2)$ 项，其中

$$P(z)=(\delta_{lj}\lambda^{(l)}-zd_{lj}),$$

而当 $h=0$ 时，$P(h^2)$ 的特征值为 $\lambda^{(l)}$.

由引理 16.13，$P(z)$ 的特征值 $\gamma^{(l)}(z)$ 是 z 的规范解析函数．对于 p 重特征值 $\lambda^{(l)}=\lambda^{(l+1)}=\cdots=\lambda^{(l+p-1)}$，则由引理 16.14，

$$\gamma^{(l)}(z)=\lambda^{(l)}-\gamma_l(z)+O(z^2),$$

其中$-\gamma_l$ 是矩阵

$$\left(\left.\frac{dP_{lj}(z)}{dz}\right|_{z=0}\right)=(-d_{lj})$$

的主子式的合适的特征值，这个矩阵有包含在重特征值中的矩阵 $(\delta_{lj}\lambda^{(l)})$ 的行与列，特别当 $\lambda^{(l)}$ 是单重特征值时，

$$\gamma^{(l)}(z)=\lambda^{(l)}-d_{ll}z+O(z^2).$$

综合上面的分析就得到

$$\mu_h^{(l)} \leqslant \bar{\mu}_h^{(l)} \leqslant \beta_h^{(l)} + o(h^2) \leqslant \gamma^{(l)}(h^2) + o(h^2)$$
$$\leqslant \lambda^{(l)} - \gamma_l h^2 + o(h^2),$$

这就完成了定理的证明.

注记 16.4 如果 Ω 是凸区域,则处处有 $d\tau(s) \geqslant 0$. 又对于不完全为零的任意实数序列 $\{v_l\}$, 作函数 $v(x)$,

$$v(x) = \sum_{l=q}^{r} v_l U^{(l)}(x),$$

则有

$$\sum_{l,j=q}^{r} d_{lj} v_l v_j = F(v,v) = \frac{1}{12}\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right)^2\right] dx$$
$$+ \frac{1}{12}\int_\Gamma \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)^2 \sin^2 2\tau d\tau > 0,$$

因此 D 的每个主子式都是正定的,从而 $\gamma_l > 0$, 故对每一个 l, 都存在一个 $h_0(l)$, 使得当 $h \leqslant h_0(l)$ 时,

$$\mu_h^{(l)} \leqslant \lambda^{(l)}.$$

有关这方面的工作可见 Forsythe (1954, 1956) 和 Forsythe, Wasow (1960) 的文章.

16.7 高精度差分方法,超收敛性

前面几节的各种算法都是基于特征值问题的变分形式, 但也可以直接用差分格式来计算,可见 Bramble (1966b), Kuttler (1967, 1970), Bramble, Hubbard (1968) 等人的文章.

假设 Ω 是 n 维空间中的有界开域, Γ 是适当光滑的边界,

$$\nu_{m,k}(x) \in C^\infty(\bar{\Omega}),\ \nu_0(x) \in C^\infty(\bar{\Omega}),\ \nu_0(x) \geqslant 0,$$

L 是下列二阶自共轭一致椭圆算子,

$$LU(x) = -\sum_{m,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\nu_{m,k}(x)\frac{\partial}{\partial x_k} U(x)\right) + \nu_0(x)U(x),$$

并考虑下列特征值问题

$$\begin{cases} LU(x) = \lambda U(x), & x \in \Omega, \\ U(x) = 0, & x \in \Gamma, \end{cases}$$

它具有从小到大依次排列的正的特征值序列 $\{\lambda^{(l)}\}$. 用 $\{U^{(l)}\}$ 表示与 $\{\lambda^{(l)}\}$ 相对应的规范正交特征函数系.

设 x_m 方向的网格步长是 h, Γ_h 是网格线与 Γ 的交点的全体. Ω 内的网格点集合记为 Ω_h. $d(x)$ 表示 x 到 Γ_h 的距离, η 是正常数, $\Omega'_h = \{x \in \Omega_h / d(x) \geqslant \eta h\}$, $\Omega^*_h = \Omega_h / \Omega'_h$. 还用 N, N' 和 N^* 分别表示 Ω_h, Ω'_h 和 Ω^*_h 的网格点总数.

Kuttler (1970) 考虑了一般的差分格式

$$\begin{cases} L_h u_h(x) = \sum\limits_{y \in \bar{\Omega}_h} A(x, y) u_h(y) = \mu_h u_h(x), & x \in \Omega_h, \\ u_h(x) = 0, & x \in \Gamma_h, \end{cases} \quad (16.45)$$

假定在 Ω'_h 上, $|L_h U - LU|$ 至少是 $O(h)$ 阶的,并且满足下列条件:

(i) $A(x, y)$ 是实数,并且当 $|x - y| > \eta h$ 时,

$$A(x, y) \equiv 0.$$

(ii) 存在正常数 c_1, 使得对一切 $x \in \Omega_h$, 都有

$$h^2 \sum_{\substack{y \in \Omega_h \\ y \neq x}} |A(x, y)| \leqslant c_1, \quad h^{-2} |A(x, x)|^{-1} \leqslant c_1,$$

$$\sum_{\substack{y \in \bar{\Omega}_h \\ y \neq x}} \left| \frac{A(x, y)}{A(x, x)} \right| \leqslant c_1.$$

(iii) 矩阵 $\mathscr{A} = (A(x, y))_{x, y \in \Omega_h}$ 是连通的,也就是说,对任意 $x, y \in \Omega_h$, 都有点 $x^{(1)} = x, x^{(2)}, \cdots, x^{(M-1)}, x^{(M)} = y$, 使得

$$A(x^{(l)}, x^{(l+1)}) \neq 0, \quad 1 \leqslant l \leqslant M - 1.$$

(iv) $\mathscr{A}$ 是对角线占优势的,即对一切 $x \in \Omega_h$, 都有

$$\sum_{\substack{y \in \Omega_h \\ y \neq x}} |A(x, y)| \leqslant A(x, x),$$

并存在非空集合 $\Omega^{**}_h \subset \Omega^*_h$ 和正数 $\theta < 1$, 使得当 $x \in \Omega^{**}_h$ 时,

$$\sum_{\substack{y \in \Omega_h \\ y \neq x}} |A(x, y)| \leqslant \theta A(x, x).$$

(v) 对任一点 $x \in \Omega^*_h$, 都有点 $x^{(1)} = x, x^{(2)}, \cdots, x^{(M)} = y$, 使得 $y \in \Omega^{**}_h$, 并且

$$0 < \varepsilon \leqslant \frac{|A(x^{(l)}, x^{(l+1)})|}{A(x^{(l)}, x^{(l)})}, \quad 1 \leqslant l \leqslant M-1,$$

其中M与h无关.

(vi) 在Ω'_h上, L_h是正型的,即若 $x \in \Omega'_h$, $x \neq y$, 则

$$A(x, y) \leqslant 0.$$

(vii) 在Ω'_h上, L_h是对称的,即若 $x, y \in \Omega'_h$, 则

$$A(x, y) = A(y, x).$$

此外还假定,当$n > 3$时, $\mathscr{A}$是对称的,此时 (16.45) 有N个从小到大的实特征值$\mu_h^{(l)}$; 当$n \leqslant 3$时, $\mathscr{A}$不一定是对称的,但总假定

$$\mathrm{Re}\mu_h^{(l)} \leqslant \mathrm{Re}\mu_h^{(l+1)}, \qquad 1 \leqslant l \leqslant N-1.$$

用$u_h^{(l)}$表示与$\mu_h^{(l)}$相对应的规范特征函数.

许多有效的差分算子都满足条件 (i)—(vii), 可见Bramble (1963), Bramble, Hubbard (1962, 1964a,b, 1968), Bramble, Hubbard, Thomée (1969) 等人的文章.

为了估计计算误差,需要了解 L_h 的离散 Green 函数的一些性质. 为此先考虑下列辅助的离散 Green 函数 $G_h''(x, y)$,

$$\begin{cases} L_h G_h''(x, y) = h^{-n}\delta(x, y), & x \in \Omega'_h, \ y \in \bar{\Omega}_h, \\ G_h''(x, y) = \delta(x, y), & x \in \Omega_h^* \cup \Gamma_h, \ y \in \bar{\Omega}_h. \end{cases} \tag{16.46}$$

根据条件 (iii), (iv), (vi), L_h在Ω'_h上是单调的,因此 $G_h''(x, y)$ 存在且非负,而且对任意函数φ和 $x \in \Omega_h$,

$$\varphi(x) = h^n \sum_{y \in \Omega'_h} G_h''(x, y)(L_h\varphi(y)) + \sum_{y \in \Omega_h^* \cup \Gamma_h} G_h''(x, y)\varphi(y). \tag{16.47}$$

引理 16.15 存在正常数c_2, c_3和c_4, 使得对一切 x, $y \in \Omega'_h$,

$$\sum_{y \in \Omega_h^* \cup \Gamma_h} G_h''(x, y) \leqslant 1, \tag{16.48}$$

$$0 \leqslant G_h''(x, y) \leqslant \begin{cases} c_2|\log c_3(|x-y|+h)|, & n = 2, \\ c_2(|x-y|+h)^{2-n}, & n \geqslant 3, \end{cases} \tag{16.49}$$

$$h^n \sum_{y\in \Omega'_h} |G''_h(x, y)|^\sigma \leqslant \begin{cases} c_\sigma, & 1 \leqslant \sigma < \dfrac{n}{n-2}, \\ c_3 |\log h|, & \sigma = \dfrac{n}{n-2}, \end{cases} \quad (16.50)$$

$$h^n \sum_{y\in \Omega'_h} G''_h(x, y) d^\sigma(y) \leqslant \begin{cases} c_\sigma, & \sigma > -2, \\ c_4 |\log h|, & \sigma = -2. \end{cases} \quad (16.51)$$

证明 在 (16.47) 中，令 $\varphi(x) \equiv 1$，则 $L_h\varphi(x) \geqslant 0$，并由此推出(16.48)。应用离散基本解的性质可得到(16.49)，从(16.49)出发，经过计算即得 (16.50)，(16.51) 可由 Bramble, Hubbard, Thomée (1969) 中的引理 3.6 得到。

今后把 $\max\limits_{x\in \Omega_h}|\varphi(x)|$ 简记为 $\max\limits_{\Omega_h}|\varphi|$，等等。

引理 16.16 存在正常数 c_5，使得对一切 $\varphi(x)$，

$$\max_{\Omega_h}|\varphi| \leqslant c_5 \max_{\Omega'_h}|L_h\varphi| + \max_{\Omega^*_h\cup\Gamma_h}|\varphi|, \quad (16.52)$$

$$\max_{\Omega_h}|\varphi| \leqslant c_5(\max_{\Omega'_h}|L_h\varphi| + h^2\max_{\Omega^*_h}|L_h\varphi| + \max_{\Gamma_h}|\varphi|). \quad (16.53)$$

证明 应用 (16.47)，(16.48) 和 (16.50) $(\sigma = 1)$，直接得到 (16.52)。又对任意的 $x\in \Omega^*_h$，

$$\varphi(x) = \frac{L_h\varphi(x) - \sum\limits_{y\in\bar\Omega_h} A(x, y)\varphi(y)}{A(x, x)},$$

从而由条件 (ii)，(iv)，(v) 得到

$$\max_{\Omega^*_h}|\varphi| \leqslant c_1 h^2 \max_{\Omega^*_h}|L_h\varphi| + (1 - \varepsilon^{M-1}(1-\theta))\max_{\bar\Omega_h}|\varphi|.$$

把上式与 (16.52) 结合起来，就得到 (16.53)。

再考虑另一个辅助的离散 Green 函数 $G'_h(x, y)$，

$$\begin{cases} L_h G'_h(x, y) = h^{-n}\delta(x, y), & x \in \Omega'_h,\ y\in \bar\Omega_h, \\ G'_h(x, y) = 0, & x\in \Omega^*_h \cup \Gamma_h,\ y \in \bar\Omega_h. \end{cases}$$

记 $\mathfrak{M} = (A(x, y))_{x,y\in\Omega'_h}$，$\mathfrak{N} = (A(x, y))_{x\in\Omega'_h,\ y\in\Omega^*_h}$，$I$ 为 $N^*\times N^*$ 阶单位阵，于是矩阵 $\{h^nG'_h(x, y)\}_{x,y\in\Omega'_h}$ 和 $(h^nG''_h(x,$

$y))_{x,y\in\Omega_h}$ 分别是 $\mathfrak{M}$ 和 $\begin{pmatrix}\mathfrak{M} & \mathfrak{N}\\ 0 & I_*\end{pmatrix}$ 的逆阵，但后者的逆是

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{M}^{-1} & -\mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{N}\\ 0 & I_*\end{pmatrix},$$

所以当 $x,\ y\in\Omega'_h$ 时，$G'_h(x,\ y)=G''_h(x,\ y)$，从而 (16.49)—(16.50) 对 $G'_h(x,y)$ 也成立。

由于 $\mathfrak{M}$ 是对称阵，因此 $G'_h(x,\ y)=G'_h(y,\ x)$。此外尚有

$$\max_{\Omega_h'^*} h^n \sum_{y\in\Omega'_h} G'_h(x,\ y)\leqslant c_6 h, \tag{16.54}$$

其中

$\Omega_h'^*=\{x\in\Omega'_h/A(x,\ y)\neq 0$ 或 $A(y,\ x)\neq 0$，y 是 Ω_h^* 上某些点$\}$. 事实上，设

$$\varphi(x)=h^n\sum_{y\in\Omega'_h} G'_h(x,\ y),$$

则在 Ω'_h上，$L_h\varphi=1$，而在 $\Omega_h^*\cup\Gamma_h$ 上 $\varphi=0$. 今考虑辅助函数 $\phi(x)$，

$$\begin{cases}L\phi(x)=1, & x\in\Omega,\\ \phi(x)=0, & x\in\Gamma.\end{cases}$$

因为 Γ 和 L 的系数充分光滑，因此

$$\begin{cases}L_h\phi(x)=1+O(h), & x\in\Omega'_h,\\ \phi(x)=O(h), & x\in\Omega_h^*\cup\Gamma_h,\end{cases}$$

从而在 Ω_h 上，$|\phi-\varphi|=O(h)$. 又由性质 (i)，在 $\Omega_h'^*$ 上

$$\phi=O(h),$$

由此即可得到 (16.54).

L_h 的离散 Green 函数是 $G_h(x,\ y)$，且

$$\begin{cases}L_hG_h(x,\ y)=h^{-n}\delta(x,\ y), & x\in\Omega_h,\ \ y\in\bar{\Omega}_h,\\ G_h(x,\ y)=0, & x\in\Gamma_h,\ \ y\in\bar{\Omega}_h.\end{cases}$$

引理 16.17 存在正常数 c_7，使得对一切 $w(x)$，都有

$$\max_{\Omega_h} h^n\sum_{y\in\Omega_h}|(G_h(x,\ y)-G'_h(x,\ y))w(y)|$$

$$\leqslant c_7\left(h^2\max_{\Omega_h^*}|w| + \max_{\Omega_h'^*} h^n \sum_{y\in\Omega_h'} G_h'(x,y)|w(y)|\right).$$

证明 假设当 $x = x'$ 时，上式左端达到最大值，并令

$$\bar{w}(y) = w(y)\cdot \mathrm{sign}[G_h(x',y) - G_h'(x',y)],$$

$$\varphi(x) = h^n \sum_{y\in\Omega_h} (G_h(x,y) - G_h'(x,y))\bar{w}(y).$$

因为在 Ω_h' 上 $L_h\varphi = 0$，而在 Γ_h 上 $\varphi(x) = 0$，因此由条件 (ii) 和 (16.53) 得到

$$\max_{\Omega_h}|\varphi| \leqslant c_8 h^2 \max_{\Omega_h^*}|L_h\varphi|$$

$$\leqslant c_9\left[h^2\max_{\Omega_h^*}|w| + \max_{\Omega_h'^*}\left|h^n\sum_{y\in\Omega_h'} G_h'(x,y)\bar{w}(y)\right|\right].$$

引理 16.18 存在正常数 c_{10} 和 c_σ，使得对一切 $x\in\Omega_h$ 都有

$$h^n\sum_{y\in\Omega_h}|G_h(x,y)|^\sigma \leqslant \begin{cases} c_\sigma, & 1\leqslant\sigma<\dfrac{n}{n-2},\\ c_{10}|\log h|, & \sigma=\dfrac{n}{n-2},\end{cases} \tag{16.55}$$

$$h^n\sum_{y\in\Omega_h'}|G_h(x,y)|d^\sigma(y) \leqslant \begin{cases} c_\sigma, & \sigma>-2,\\ c_{10}|\log h|, & \sigma=-2,\end{cases} \tag{16.56}$$

$$\max_{x,y\in\Omega_h}|G_h(x,y)| \leqslant \begin{cases} c_{10}|\log h|, & n=2,\\ c_{10}h^{2-n}, & n>2,\end{cases} \tag{16.57}$$

$$\max_{x\in\Omega_h^*\cup\Omega_h'^*} h^n\sum_{y\in\Omega_h}|G_h(x,y)| \leqslant c_{10}h, \tag{16.58}$$

$$h^n\sum_{y\in\Omega_h^*}|G_h(x,y)| \leqslant c_{10}h^2. \tag{16.59}$$

证明 我们有

$$|G_h(x,y')| \leqslant G_h'(x,y') + |G_h(x,y') - G_h'(x,y')|.$$

用类似于 (16.49) 的式子估计上式右端的第一项，又在引理 16.17 中令 $w(y) = h^{-n}\delta(y,y')$，由此即得到第二项的估计. 把这两个

估计结合起来，就得到了 (16.57)。

又有

$$\left(h^{\sigma}\sum_{y\in\Omega_h}|G_h(x,y)|^{\sigma}\right)^{1/\sigma}\leqslant\left(h^{\sigma}\sum_{y\in\Omega_h}|G'_h(x,y)|^{\sigma}\right)^{1/\sigma}$$
$$+\left(h^{\sigma}\sum_{y\in\Omega_h}|G_h(x,y)-G'_h(x,y)|^{\sigma}\right)^{1/\sigma}.$$

上式右端第一项的估计类似于 (16.50)。又设 x' 是 Ω_h 中的任意一点，并在引理 16.17 中令

$$w(y)=|G_h(x',y)-G'_h(x',y)|^{\sigma-1},$$

于是可结合 (16.57) 推得 (16.55)。

应用一个与 (16.51) 相类似的估计式及引理 16.17，其中

$$w(y)=\chi(y)d^{\sigma}(y),\quad \chi(y)=\begin{cases}1, & y\in\Omega'_h,\\ 0, & y\notin\Omega'_h,\end{cases}$$

则可推出 (16.56)。

最后在引理 (16.17) 中分别令 $w(y)=1$ 和

$$w(y)=1-\chi(y),$$

就可由 (16.54) 等得到 (16.58) 和 (16.59)。

我们还要用到 Wielandt 的一个结果(见 Householder (1964))。

引理 16.19 假设 A 和 B 是 $N\times N$ 阶矩阵，A 是对称的，则 B 的特征值位于 N 个圆 $\{z\,|\,|\alpha^{(l)}-z|\leqslant\|A-B\|_2\}$ 之内，其中 $\alpha^{(l)}$ 是 A 的特征值，矩阵范数 $\|A-B\|_2$ 是对应于向量的 l^2 范数而取的。如果有 k 个圆与其它的圆相分离，那末在这 k 个圆中一定含有 B 的 k 个特征值。

证明 假定与 B 的特征值 β 相对应的特征向量是 η，$\|\eta\|_{l^2}=1$。因为 A 是对称的，所以存在正交的特征向量系 $\{\xi^{(l)}\}$。记

$$\eta=\sum_{l=1}^{N}\eta_l\xi^{(l)},$$

则有

$$\|A-B\|_2\geqslant\|(A-B)\eta\|_{l^2}=\|A\eta-B\eta\|_{l^2}$$
$$=\left\|\sum_{l=1}^{N}(\eta_l\alpha^{(l)}-\beta\eta_l)\xi^{(l)}\right\|_2$$

$$=\left(\sum_{l=1}^{N}|\eta_l|^2|\alpha^{(l)}-\beta|^2\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\min_{1\leqslant l\leqslant N}|\alpha^{(l)}-\beta|,$$

这就证明了引理的第一个结论.

又考虑矩阵 $A+\tau(B-A)$，它的特征值连续地依赖于 τ，而且当 $\tau\to 0$ 时，它的特征值趋于 $\alpha^{(l)}$，从而可推得引理的第二个结论.

在证明格式(16.45)的收敛性之前，先考虑下列辅助问题

$$\begin{cases}L_h v_h(x)=\gamma_h v_h(x), & x\in\Omega_h',\\ v_h(x)=0, & x\in\Omega_h^*\cup\Gamma_h.\end{cases}\tag{16.60}$$

由条件(vii)，它有 N' 个正的特征值，依大小次序排列为

$$\gamma_h^{(1)}\leqslant\gamma_h^{(2)}\leqslant\cdots\leqslant\gamma_h^{(N'-1)}.$$

又记

$$(w,v)_{\Omega_h'}=h^n\sum_{x\in\Omega_h'}w(x)v(x),\quad \|w\|^2_{\Omega_h'}=(w,w)_{\Omega_h'},$$

并假设(16.60)的特征函数系 $\{v_h^{(l)}\}$ 是按内积 $(w,v)_{\Omega_h'}$ 而规范正交的，从而对一切 φ，都有

$$\|\varphi\|^2_{\Omega_h'}=\sum_{l=1}^{N'}|(\varphi,v_h^{(l)})_{\Omega_h'}|^2.\tag{16.61}$$

我们假定已经证明(例如用前节的方法)，当 $h\to 0$ 时，

$$|\gamma_h^{(l)}-\lambda^{(l)}|\to 0.\tag{16.62}$$

特别，由于 $\lambda^{(l)}$ 没有有限的极限点，所以除与重特征值 $\lambda^{(l)}$ 相对应的 $\gamma_h^{(l)}$ 以外，其余的 $\gamma_h^{(l)}$ 都会一一分离开来.

定理 16.12 当 $h\to 0$ 时，$|\mu_h^{(l)}-\lambda^{(l)}|\to 0$.

证明 根据(16.62)，只要证明当 $h\to 0$ 时，

$$|\gamma_h^{(l)}-\mu_h^{(l)}|\to 0.$$

又因为 $(\mu_h^{(l)})^{-1}$ 是矩阵 $\mathscr{G}=(h^nG_h(x,y))_{x,y\in\Omega_h}$ 的特征值，而 $(\gamma_h^{(l)})^{-1}$ 是对称阵 $\mathscr{G}'=(h^nG_h'(x,y))_{x,y\in\Omega_h}$ 的特征值，其中有 N^* 个特征值为零，所以，根据引理 16.19，只要证明当 $h\to 0$ 时，

$$\|\mathscr{G}-\mathscr{G}'\|_2\to 0.$$

先假设 $\mathscr{A}$ 是对称的，则 $\mathscr{G}$ 也是对称的，并且

$$\|\mathscr{G}-\mathscr{G}'\|_2=\rho(\mathscr{G}-\mathscr{G}'),$$

其中 $\rho(A)$ 表示矩阵 A 的谱半径．由 Gerschgorin 定理，引理 16.17 和 (16.54) 得到

$$\|\mathscr{G}-\mathscr{G}'\|_2\leqslant\max_{\Omega_h}\ h^n\sum_{y\in\Omega_h}|G_h(x,y)-G'_h(x,y)|$$

$$\leqslant c_{11}\left(h^2+\max_{\Omega'^*_h}\ h^n\sum_{y\in\Omega'_h}G'_h(x,y)\right)\leqslant c_{12}h.$$

若 $n\leqslant3$，$\mathscr{A}$ 不是对称的，则有

$$\|\mathscr{G}-\mathscr{G}'\|_2^2=\rho((\mathscr{G}-\mathscr{G}')(\mathscr{G}-\mathscr{G}')^*)$$

$$=h^{2n}\max_{\Omega_h}\sum_{y\in\Omega_h}\left|\sum_{y'\in\Omega_h}[G_h(x,y')-G'_h(x,y')][G_h(y,y')-G'_h(y,y')]\right|.$$

假定当 $x=x'$ 时，上式右端达到最大值，记

$$\sigma(y)=\operatorname{sign}\sum_{y'\in\Omega_h}[G_h(x',y')-G'_h(x',y')][G_h(y,y')-G'_h(y,y')],$$

并在引理 16.17 中令

$$w(y')=h^n\sum_{y\in\Omega_h}(G_h(y,y')-G'_h(y,y'))\sigma(y),$$

则有

$$\|\mathscr{G}-\mathscr{G}'\|_2^2\leqslant c_{13}\left\{h^{n+2}\max_{\Omega^*_h}\left|\sum_{y\in\Omega_h}\sigma(y)(G_h(y,x)-G'_h(y,x))\right|+h^{2n}\max_{\Omega'^*_h}\left|\sum_{y'\in\Omega'_h}G'_h(x,y')\times\sum_{y\in\Omega_h}[G_h(y,y')-G'_h(y,y')]\right|\right.$$

$$\leqslant E_1+E_2,$$

其中

$$E_1=c_{14}h^2\max_{x,y\in\Omega_h}|G_h(y,x)-G'_h(y,x)|,$$

$$E_2=c_{15}h^n\max_{x\in\Omega'^*_h}\ \max_{y\in\Omega_h}\left(\sum_{y'\in\Omega'_h}G'_h(x,y')|G_h(y,y')\right.$$

$$-G'_h(y,y')|\Big).$$

由 (16.57) 和一个类似于 (16.49) 的估计式得到

$$E_1 \leqslant \begin{cases} c_{16}h^2|\log h|, & n=2, \\ c_{16}h, & n=3. \end{cases}$$

又在引理 16.17 中令 $w(y') = G'_h(x, y')$，则有

$$E_2 \leqslant c_{17} \max_{x,y\in\Omega_h'^*} h^n \sum_{y'\in\Omega'_h} G'_h(x,y')G'_h(y,y').$$

若 $n=2$，由 (16.54) 得到

$$E_2 \leqslant c_{18}h|\log h|.$$

若 $n=3$，则依次由 Hölder 不等式，(16.54)和类似于 (16.49)，(16.50) 的两个估计式得到

$$E_2 \leqslant c_{17}\max_{x,y\in\Omega_h'^*}\Big\{h^n \sum_{y'\in\Omega'_h} G'_h(x,y')\Big\}^{2/3} \cdot \Big\{h^n \sum_{y'\in\Omega'_h} G'_h(x,y')$$

$$\times (G'_h(y,y'))^3\Big\}^{1/3} \leqslant c_{19}h^{2/3}\max_{x,y\in\Omega_h'^*}\Big\{h^n \sum_{y'\in\Omega'_h} G'_h(x,y')$$

$$\times (G'_h(y,y'))^3\Big\}^{1/3} \leqslant c_{20}h^{1/3}\max_{y\in\Omega_h'^*}\Big\{h^n \sum_{y'\in\Omega'_h} (G'_h(y,y'))^3\Big\}^{1/3}$$

$$\leqslant c_{21}h^{1/3}|\log h|.$$

这就完成了定理的证明.

下面来估计误差. 设 $p_h(\xi)$ 是一个实多项式,它的系数可能与 h 有关,并假定

$$|L_hU(x) - LU(x)| = O(h^\mu), \qquad \mu \geqslant 1, \ x\in\Omega'_h,$$

$$|L_hU(x) - p_h(L)U(x)| = O(h^{s_a}), \quad s_a \geqslant 1, \ x\in\Omega'_h,$$

$$|L_hU(x) - p_h(L)U(x)| = O(h^{s_a-2}), \ s_a \geqslant 1, \ x\in\Omega^*_h.$$

定理 16.13 (Kuttler (1970)) 如果 $U^{(l)}\in C^{s_a+2}(\bar\Omega)$，则存在正常数 h_l 和 c_l，使得当 $h\leqslant h_l$ 时，

$$|\mu_h^{(l)} - p_h(\lambda^{(l)})| \leqslant c_l h^{s_a}, \tag{16.63}$$

并且存在相对应的特征向量 $\overline{U}^{(l)}$，使得

$$\max_{\Omega_h}|\bar{U}^{(l)}-u_h^{(l)}|\leqslant c_l h^{\prime\alpha}. \tag{16.64}$$

证明 定理的证明是十分细致的，它由下面九个命题所组成.

命题 16.1 对一切 l，有

$$|\mu_h^{(l)}|\leqslant c_l, \tag{16.65}$$

$$\max_{\Omega_h}|u_h^{(l)}|\leqslant c_l, \tag{16.66}$$

$$\max_{\Omega_h^*\cup\Omega_h'^*}|u_h^{(l)}|\leqslant c_l h. \tag{16.67}$$

证明 由定理 16.12 直接得到 (16.65). 因为 $\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{A}$ 的逆，所以

$$u_h^{(l)}(x)=\mu_h^{(l)}h^n\sum_{y\in\Omega_h}G_h(x,y)u_h^{(l)}(y). \tag{16.68}$$

假设 $1<\sigma<\frac{n}{n-2}$，$\sigma\leqslant 2$，于是应用 Hölder 不等式，(16.65) 和 (16.55) 得到

$$\begin{aligned}\max_{\Omega_h}|u_h^{(l)}|&\leqslant c_l\max_{\Omega_h}\left[h^n\sum_{y\in\Omega_h}|G_h(x,y)|^{\sigma}\right]^{1/\sigma}\\&\quad\times\left[h^n\sum_{y\in\Omega_h}|u_h^{(l)}(y)|^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}\right]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\\&\leqslant c_l\left[\max_{\Omega_h}|u_h^{(l)}|^{\frac{2-\sigma}{\sigma-1}}h^n\sum_{y\in\Omega_h}|u_h^{(l)}(y)|^2\right]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\\&\leqslant c_l\|u_h^{(l)}\|^{\frac{2\sigma-2}{\sigma}}\max_{\Omega_h}|u_h^{(l)}|^{\frac{2-\sigma}{\sigma}},\end{aligned}$$

由此即得到 (16.66).

最后应用 (16.65), (16.66), (16.68) 和 (16.58) 得到

$$\max_{\Omega_h^*\cup\Omega_h'^*}|u_h^{(l)}|\leqslant c_l\max_{\Omega_h^*\cup\Omega_h'^*}h^n\sum_{y\in\Omega_h}|G_h(x,y)|\leqslant c_l h.$$

命题 16.2 设 $\tau_h^{(l)}=(p_h(L)-L_h)U^{(l)}$，则有

$|(\mu_h^{(l)}-p_h(\lambda^{(l)}))(u_h^{(l)},U^{(l)})|$

$$\leqslant c_l\Big(\max_{\Omega_h^*\cup\Omega_h'^*}|U^{(l)}-u_h^{(l)}|+\max_{\Omega_h'}h^n\sum_{y\in\Omega_h'}G_h'(x,y)$$

$$\times |\tau_h^{(l)}(y)| + h^2 \max_{\Omega_h} |\tau_h^{(l)}| \Big). \tag{16.69}$$

证明 设 L_h^* 是 L_h 的共轭算子,即

$$L_h^* w(x) = \sum_{y \in \Omega_h} A(y, x) w(y),$$

则有

$$\begin{aligned}
&(u_h^{(l)}, \rho_h(L)U^{(l)}) - (L_h u_h^{(l)}, U^{(l)}) \\
&\quad = (u_h^{(l)}, \rho_h(L)U^{(l)} - L_h^* U^{(l)}) \\
&\quad = (u_h^{(l)}, \tau_h^{(l)}) + (u_h^{(l)}, L_h U^{(l)} - L_h^* U^{(l)}) \\
&\quad = (u_h^{(l)}, \tau_h^{(l)}) + (u_h^{(l)} - U^{(l)}, L_h U^{(l)} - L_h^* U^{(l)}) \\
&\qquad + (U^{(l)}, L_h U^{(l)}) - (L_h U^{(l)}, U^{(l)}) \\
&\quad = (u_h^{(l)}, \tau_h^{(l)}) + (u_h^{(l)} - U^{(l)}, L_h U^{(l)} - L_h^* U^{(l)}) \\
&\qquad - (U^{(l)}, \tau_h^{(l)}) + (\tau_h^{(l)}, U^{(l)}).
\end{aligned}$$

下面逐项地估计上式的右端. 首先在 Ω'_h / Ω'^*_h 上,

$$L_h U^{(l)} - L_h^* U^{(l)} = 0,$$

而在 $\Omega_h^* \cup \Omega'^*_h$ 上则有

$$|L_h U^{(l)} - L_h^* U^{(l)}| \leqslant c_l h^{-2} \max_{\Omega_h^* \cup \Omega'^*_h} |U^{(l)}|.$$

因为 $U^{(l)} \in C^{s_0+2}(\bar{\Omega})$, 并且边值为零,所以

$$\max_{\Omega_h^* \cup \Omega'^*_h} |U^{(l)}| \leqslant c_l h,$$

因此

$$|(u_h^{(l)} - U^{(l)}, L_h U^{(l)} - L_h^* U^{(l)})| \leqslant c_l \max_{\Omega_h^* \cup \Omega'^*_h} |U^{(l)} - u_h^{(l)}|.$$

其次,由 (16.67) 得到

$$|(u_h^{(l)}, \tau_h^{(l)})| \leqslant |(u_h^{(l)}, \tau_h^{(l)})_{\Omega'_h}| + c_l h^2 \max_{\Omega_h^*} |\tau_h^{(l)}|.$$

作辅助函数 $w^{(l)}(x)$,

$$w^{(l)}(x) = \begin{cases} u_h^{(l)}(x), & x \in \Omega'_h, \\ 0, & x \in \Omega_h^* \cup \Gamma_h, \end{cases}$$

那末

$$
\begin{aligned}
(u_h^{(l)}, \tau_h^{(l)})_{\Omega'_h} &= h^n \sum_{y\in\Omega'_h} w^{(l)}(y)\tau_h^{(l)*}(y) \\
&= h^n \sum_{y\in\Omega'_h} \tau^{(l)*}(y) h^n \sum_{x\in\Omega'_h} G'_h(y,x) L_h w^{(l)}(x) \\
&= h^n \sum_{y\in\Omega'_h} \tau_h^{(l)*}(y) h^n \sum_{x\in\Omega'_h} G'_h(y,x) L_h u_h^{(l)}(x) \\
&\quad - h^n \sum_{y\in\Omega'_h} \tau_h^{(l)*}(y) h^n \sum_{x\in\Omega'^*_h} G'_h(y,x) \\
&\quad \times \sum_{y'\in\Omega^*_h} A(x,y') u_h^{(l)}(y') \\
&= \mu_h^{(l)} h^n \sum_{x\in\Omega'_h} u_h^{(l)}(x) h^n \sum_{y\in\Omega'_h} G'_h(x,y)\tau_h^{(l)*}(y) \\
&\quad - h^n \sum_{x\in\Omega'^*_h} \sum_{y'\in\Omega^*_h} A(x,y') u_h^{(l)}(y') h^n \\
&\quad \times \sum_{y\in\Omega'_h} G'_h(x,y)\tau_h^{(l)*}(y),
\end{aligned}
$$

故由条件 (ii) 和 (16.66), (16.67) 得到

$$
|(u_h^{(l)}, \tau_h^{(l)})_{\Omega'_h}| \leqslant c_l \max_{\Omega'_h} h^n \sum_{y\in\Omega'_h} G'_h(x,y) |\tau_h^{(l)}(y)|.
$$

类似地可估计 $|(U^{(l)}, \tau_h^{(l)})| = |(\tau_h^{(l)}, U^{(l)})|$，从而完成命题的证明.

下面设 $\lambda^{(l)} = \lambda^{(l+1)} = \cdots = \lambda^{(l+p)}$ 是 $p+1$ 重特征值，$v_h^{(l)}$ 是 (16.60) 的特征函数.

命题 16.3 设

$$
\bar{v}_h^{(j)} = \sum_{s=l}^{l+p} (u_h^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h} v_h^{(s)}, \quad l \leqslant j \leqslant l+p,
$$

则

$$
\|u_h^{(j)} - \bar{v}_h^{(j)}\|_{\Omega'_h} \leqslant c_j h.
$$

证明 作辅助函数 $f^{(j)}$, $l \leqslant j \leqslant l+p$,

$$\begin{cases} L_h f^{(j)}(x) = 0, & x \in \Omega'_h, \\ f^{(j)}(x) = u_h^{(j)}(x), & x \in \Omega_h^*. \end{cases}$$

由 (16.52), (16.67) 得到 $\max\limits_{\Omega_h} |f^{(j)}| \leqslant c_j h$. 又由于

$$\begin{cases} L_h(f^{(j)} - u_h^{(j)}) = -\mu_h^{(j)} u_h^{(j)}, & x \in \Omega'_h, \\ f^{(j)} - u_h^{(j)} = 0, & x \in \Omega_h^*, \end{cases}$$

因此

$$f^{(j)}(x) = u_h^{(j)}(x) - h^n \sum_{y \in \Omega'_h} \mu_h^{(j)} G'_h(x, y) u_h^{(j)}(y).$$

$$\begin{aligned} (f^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h} &= (u_h^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h} \\ &\quad - \mu_h^{(j)} \Big(u_h^{(j)}, h^n \sum_{y \in \Omega'_h} G'_h(x, y) v_h^{(s)}(y) \Big)_{\Omega'_h} \\ &= (u_h^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h} - \frac{\mu_h^{(j)}}{\gamma_h^{(s)}} (u_h^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h}, \end{aligned}$$

所以

$$(u_h^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h} = \frac{\gamma_h^{(s)}}{\gamma_h^{(s)} - \mu_h^{(j)}} (f^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h}.$$

故由 (16.61) 得到

$$\begin{aligned} \|u_h^{(j)}\|^2_{\Omega'_h} &= \sum_{s=l}^{l+p} |(u_h^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h}|^2 + \sum_{s \neq l, \cdots, l+p} |(u_h^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h}|^2 \\ &= (u_h^{(j)}, \bar{v}_h^{(j)})_{\Omega'_h} + \sum_{s \neq l, \cdots, l+p} \left| \frac{\gamma_h^{(s)}}{\gamma_h^{(s)} - \mu_h^{(j)}} (f^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h} \right|^2. \end{aligned}$$

因为当 $h \to 0$ 时, $\mu_h^{(j)} \to \lambda^{(j)}$, $\gamma_h^{(s)} \to \lambda^{(s)}$, 所以

$$\frac{|\gamma_h^{(s)}|}{|\gamma_h^{(s)} - \mu_h^{(j)}|} \leqslant c_j, \quad s \neq l, \cdots, l+p, \ l \leqslant j \leqslant l+p.$$

再次应用 $\{v_h^{(s)}\}$ 的正交性和 (16.61), 就得到

$$\begin{aligned} \|u_h^{(j)} - \bar{v}_h^{(j)}\|^2_{\Omega'_h} &= \|u_h^{(j)}\|^2_{\Omega'_h} - (u_h^{(j)}, \bar{v}_h^{(j)})_{\Omega'_h} \\ &\leqslant c_j \sum_{s \neq l, \cdots, l+p} |(f^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h}|^2 \end{aligned}$$

$$\leqslant c_j \sum_{s=1}^{N'} |(f^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h}|^2$$

$$= c_j \|f^{(j)}\|^2_{\Omega'_h} \leqslant c_j h^2.$$

命题 16.4 设 $U^{(l)}, \cdots, U^{(l+p)}$ 是关于 $\lambda^{(l)}$ 的特征子空间的正交基函数

$$\bar{v}_h^{(j)} = \sum_{s=l}^{l+p} (U^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h} v_h^{(s)}, \quad l \leqslant j \leqslant l+p,$$

则有

$$\|U^{(j)} - \bar{v}_h^{(j)}\|_{\Omega'_h} \leqslant c_j h.$$

证明 作辅助函数 $f^{(j)}$, $l \leqslant j \leqslant l+p$,

$$\begin{cases} L_h f^{(j)}(x) = 0, & x \in \Omega'_h, \\ f^{(j)}(x) = U^{(j)}(x), & x \in \Omega_h^*. \end{cases}$$

由 (16.52), $\max\limits_{\Omega_h} |f^{(j)}| \leqslant c_j h$. 又可利用 (16.61) 和类似于证明命题 16.3 的方法得到

$$\|U^{(j)} - \bar{v}_h^{(j)}\|^2_{\Omega'_h} = \|U^{(j)}\|^2_{\Omega'_h} - (U^{(j)}, \bar{v}_h^{(j)})_{\Omega'_h}$$

$$= \sum_{s \neq l, \cdots, l+p} \left| \frac{1}{\gamma_h^{(s)} - p_h(\lambda^{(j)})} (-\tau_h^{(j)} + \gamma_h^{(s)} f^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h} \right|^2.$$

记

$$\varphi^{(j)}(x) = h^n \sum_{y \in \Omega'_h} G'_h(x, y) \tau_h^{(j)}(y),$$

于是

$$(\tau_h^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h} = h^n \sum_{y \in \Omega'_h} \tau_h^{(j)}(y) v_h^{(s)}(y)$$

$$= \gamma_h^{(s)} h^n \sum_{y \in \Omega'_h} \tau_h^{(j)}(y) \sum_{x \in \Omega'_h} G'_h(y, x) v_h^{(s)}(x)$$

$$= \gamma_h^{(s)} \sum_{x \in \Omega'_h} v_h^{(s)}(x) h^n \sum_{y \in \Omega'_h} G'_h(y, x) \tau_h^{(j)}(y)$$

$$= \gamma_h^{(s)} (\varphi^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h}.$$

因为 L_h 对 $p_h(L)$ 和 L 的逼近都是相容的,所以当 $h\to 0$ 时,

$$p_h(\lambda^{(j)})\to\lambda^{(j)},$$

从而

$$\frac{|\gamma_h^{(s)}|}{|\gamma_h^{(s)}-p_h(\lambda^{(j)})|}\leqslant c_j,\quad s\neq l,\cdots,l+p,$$

并且由此得到

$$\|U^{(j)}-\tilde{v}_h^{(j)}\|^2_{\Omega'_h}\leqslant c_j\sum_{s\neq l,\cdots,l+p}|(\varphi^{(j)}+f^{(j)},v_h^{(s)})_{\Omega'_h}|^2.$$

最后,由 (16.52) 和相容性条件得到

$$\|U^{(j)}-\tilde{v}_h^{(j)}\|^2_{\Omega'_h}\leqslant c_j(\|\varphi^{(j)}\|^2_{\Omega'_h}+\|f^{(j)}\|^2_{\Omega'_h})\leqslant c_jh^2.$$

命题 16.5 在 $\lambda^{(l)}$ 的特征子空间中,存在特征函数

$$\bar{U}^{(j)}=\sum_{s=l}^{l+p}d_{js}(h)U^{(s)},\quad l\leqslant j\leqslant l+p,\tag{16.70}$$

使得

$$(\bar{U}^{(j)},v_h^{(s)})_{\Omega'_h}=(u_h^{(j)},v_h^{(s)})_{\Omega'_h},\ l\leqslant j,\ s\leqslant l+p,\tag{16.71}$$

而且 $\bar{U}^{(j)}$ 的偏导数对 h 一致有界,其上界与 $U^{(l)},\cdots,U^{(l+p)}$ 有关.

证明 为了证明 (16.71),只要证明 $(p+1)\times(p+1)$ 阶矩阵 $\mathscr{D}=((U^{(j)},v_h^{(s)})_{\Omega'_h})$ 是非奇异的. 也就是说,$\mathscr{D}$ 的各列向量是线性无关的. 若不然,则存在实数 $\alpha_l,\cdots,\alpha_{l+p}$,使得

$$\sum_{j=l}^{l+p}\alpha_j(U^{(j)},v_h^{(s)})_{\Omega'_h}=0,\quad l\leqslant s\leqslant l+p.$$

用 $\alpha_k(U^{(k)},v_h^{(s)})_{\Omega'_h}$ 乘第 s 个方程,并对 s 和 k 求和,根据 $\tilde{v}_h^{(j)}$ 的定义即得到

$$\begin{aligned}0&=\sum_{l\leqslant j,k\leqslant l+p}\alpha_j\alpha_k(U^{(j)},\tilde{v}_h^{(k)})_{\Omega'_h}\\&=\sum_{l\leqslant j,k\leqslant l+p}\alpha_j\alpha_k[(U^{(j)},U^{(k)})_{\Omega'_h}-(U^{(j)},U^{(k)}-\tilde{v}_h^{(k)})_{\Omega'_h}],\end{aligned}$$

故由命题 16.4 和 Schwarz 不等式得到

$$\sum_{l\leqslant j,k\leqslant l+p}\alpha_j\alpha_k(U^{(j)},U^{(k)})_{\Omega'_h}\leqslant ch\sum_{l\leqslant j,k\leqslant l+p}|\alpha_j\alpha_k|.\tag{16.72}$$

由于 $U^{(j)}\in C^{s_a+2}(\bar{\Omega})$，并在 Γ 上为零，因此

$$|(U^{(j)},U^{(k)})_{\Omega_h'}-(U^{(j)},U^{(k)})_{L^2(\Omega)}|\leqslant c_lh^2,\quad l\leqslant j,k\leqslant l+p. \tag{16.73}$$

再考虑到 $\{U^{(j)}\}$ 的规范正交性，就由 (16.72) 得到

$$\sum_{l\leqslant j\leqslant l+p}|\alpha_j|^2\leqslant c_l(h^2+h)\sum_{l\leqslant j,k\leqslant l+p}|\alpha_j\alpha_k|$$

$$\leqslant c_lh(p+1)\sum_{j=l}^{l+p}|\alpha_j|^2,$$

故当 h 适当小时，$\alpha_i\equiv 0$，因此矩阵 $\mathscr{D}$ 是非奇异的.

下面来估计范数

$$\|\bar{U}^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}^2=\sum_{s=l}^{l+p}|d_{js}(h)|^2.$$

由 (16.73) 得到

$$|\|\bar{U}^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}^2-\|\bar{U}^{(j)}\|^2_{\Omega_h'}|\leqslant c_lh^2\sum_{s=l}^{l+p}|d_{js}(h)|^2=c_lh^2\|\bar{U}^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

又由 (16.71) 和 Parseval 等式得到

$$|\|\bar{U}^{(j)}\|^2_{\Omega_h'}-\|u_h^{(j)}\|^2_{\Omega_h'}|=\Big|\sum_{s\neq l,\cdots,l+p}[|(\bar{U}^{(j)},v_h^{(s)})_{\Omega_h'}|^2$$

$$-|(u_h^{(j)},v_h^{(s)})_{\Omega_h'}|^2]\Big|.$$

再次应用引理 16.3, 16.4 中的证明技巧，可得到

$$|\|\bar{U}^{(j)}\|^2_{\Omega_h'}-\|u_h^{(j)}\|^2_{\Omega_h'}|\leqslant c_lh^2+c_lh^2\sum_{s=l}^{l+p}|d_{js}(h)|^2$$

$$=c_lh^2+c_lh^2\|\bar{U}^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

此外，由 (16.67) 和 $\|u_h^{(j)}\|^2=1$ 得到

$$|\|u_h^{(j)}\|^2_{\Omega_h'}-1|\leqslant c_lh^2.$$

把以上各估计式结合起来，就有

$$|\|\bar{U}^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}^2-1|=\left|\sum_{s=l}^{l+p}d_{js}^2(h)-1\right|\leqslant c_lh^2,l\leqslant j\leqslant l+p.$$

此外

$$\frac{\partial \overline{U}^{(j)}(x)}{\partial x_m} = \sum_{s=l}^{l+p} d_{js} \frac{\partial U^{(j)}(x)}{\partial x_m},$$

所以

$$\left|\frac{\partial \overline{U}^{(j)}(x)}{\partial x_m}\right| \leqslant \max_{l\leqslant s\leqslant l+p}\left|\frac{\partial U^{(j)}(x)}{\partial x_m}\right|\sqrt{p+1}\left(\sum_{s=l}^{l+p}|d_{js}(h)|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

由此即可得到命题的第二个结论.

还可证明

$$|\|\overline{U}^{(j)}\|^2 - 1| \leqslant c_l h^2. \tag{16.74}$$

命题 16.6 对一切 $l \leqslant j \leqslant l+p$, 都有

$$\|u_h^{(j)} - \overline{U}^{(j)}\| \leqslant c_l h, \tag{16.75}$$

$$|(u_h^{(j)}, \overline{U}^{(j)})| \geqslant 1 - c_l h^2. \tag{16.76}$$

证明 由 Parseval 等式和 (16.71) 得到

$$\|u_h^{(j)} - \overline{U}^{(j)}\|^2 = h^n \sum_{x\in\Omega_h^*} |u_h^{(j)}(x) - \overline{U}^{(j)}(x)|^2$$

$$+ \sum_{i\neq l,\cdots,l+p} |(u_h^{(j)} - \overline{U}^{(j)}, v_h^{(i)})_{\Omega_h'}|^2,$$

由此就可推出 (16.75), 又由 (16.74), (16.75) 得到

$$|(u_h^{(j)}, \overline{U}^{(j)})| \geqslant \mathrm{Re}(u_h^{(j)}, \overline{U}^{(j)})$$

$$= \frac{1}{2}((u_h^{(j)}, \overline{U}^{(j)}) + (\overline{U}^{(j)}, u_h^{(j)}))$$

$$= \frac{1}{2}[\|u_h^{(j)}\|^2 + \|\overline{U}^{(j)}\|^2 - \|u_h^{(j)} - \overline{U}^{(j)}\|^2] \geqslant 1 - c_l h^2.$$

把上面的结果代入 (16.69) 就有下列结果:

命题 16.7 对一切 $l \leqslant j \leqslant l+p$, 都有

$$|\mu_h^{(j)} - p_h(\lambda^{(j)})| \leqslant c_l\Big(\max_{\Omega_h^*\cup\Omega_h'^*}|u_h^{(j)} - \overline{U}^{(j)}|$$

$$+ \max_{x\in\Omega_h'} h^n \sum_{y\in\Omega_h'} G_h'(x,y)|\overline{\tau}_h^{(j)}(y)| + h^2\max_{\Omega_h}|\overline{\tau}_h^{(j)}|\Big), \tag{16.77}$$

其中

$$\bar{\tau}_h^{(j)} = p_h(L)\bar{U}^{(j)} - L_h\bar{U}^{(j)}.$$

命题 16.8 对一切 $l \leqslant j \leqslant l+p$，都有

$$\max_{\Omega_h}|u_h^{(j)} - \bar{U}^{(j)}| \leqslant c_l(\|u_h^{(j)} - \bar{U}^{(j)}\| + |\mu_h^{(j)} - p_h(\lambda^{(j)})|$$
$$+ \max_{\Omega_h} \sum_{y\in\Omega_h'} |G_h(x, y)||\bar{\tau}_h^{(j)}(y)| + h^2\max_{\Omega_h}|\bar{\tau}_h^{(j)}|), \tag{16.78}$$

$$\max_{\Omega_h^*\cup\Omega_h'^*} |u_h^{(j)} - \bar{U}^{(j)}| \leqslant c_l \Big(h\max_{\Omega_h}|u_h^{(j)} - \bar{U}^{(j)}| + h|\mu_h^{(j)}$$
$$- p_h(\lambda^{(j)})| + \max_{\Omega_h} h^n \sum_{y\in\Omega_h'} |G_h(x, y)|$$
$$\times |\bar{\tau}_h^{(j)}(y)| + h^2\max_{\Omega_h}|\bar{\tau}_h^{(j)}|.\Big) \tag{16.79}$$

证明 我们有

$$u_h^{(j)}(x) - \bar{U}^{(j)}(x) = h^n \sum_{y\in\Omega_h} G_h(x, y)(L_hu_h^{(j)}(y)$$
$$- L_h\bar{U}^{(j)}(y)). \tag{16.80}$$

因为 $l \leqslant j \leqslant l+p$，所以

$$|L_h\bar{U}^{(j)} - L_hu_h^{(j)}| \leqslant |\mu_h^{(j)} - p_h(\lambda^{(j)})||u_h^{(j)}|$$
$$+ |p_h(\lambda^{(j)})||u_h^{(j)} - \bar{U}^{(j)}| + |\bar{\tau}_h^{(j)}|.$$

从而由 (16.55)，(16.59) 和 (16.66) 得到

$$\max_{\Omega_h}|u_h^{(j)} - \bar{U}^{(j)}| \leqslant c_l\Big(\max_{\Omega_h} h^n \sum_{y\in\Omega_h} |G_h(x, y)||u_h^{(j)}(y)$$
$$- \bar{U}^{(j)}(y)| + |\mu_h^{(j)} - p_h(\lambda^{(j)})|$$
$$+ \max_{\Omega_h} h^n \sum_{y\in\Omega_h'} |G_h(x, y)||\bar{\tau}_h^{(j)}(y)| + h^2\max_{\Omega_h}|\bar{\tau}_h^{(j)}|\Big). \tag{16.81}$$

又有

$$h^n \sum_{y\in\Omega_h} |G_h(x, y)||u_h^{(j)}(y) - \bar{U}^{(j)}(y)|$$

$$\leqslant \left(h^n \sum_{y\in\Omega_h} |G_h(x, y)|^\sigma\right)^{\frac{1}{\sigma}} \left(h^n \sum_{y\in\Omega_h} |u_h^{(j)}(y) - \bar{U}^{(j)}(y)|^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \leqslant c_\sigma \|u_h^{(j)} - \bar{U}^{(j)}\|^{\frac{2(\sigma-1)}{\sigma}}$$

$$\cdot \max_{\Omega_h} |u_h^{(j)} - \bar{U}^{(j)}|^{\frac{2-\sigma}{\sigma}} \leqslant \frac{2c_\sigma(\sigma-1)}{\alpha\sigma} \|u_h^{(j)} - \bar{U}^{(j)}\| + \frac{\alpha(2-\sigma)}{\sigma} \max_{\Omega_h} |u_h^{(j)} - \bar{U}^{(j)}|,$$

其中 $\alpha > 0$, $1 \leqslant \sigma \leqslant \min\left(2, \frac{n}{n-2} - \varepsilon\right)$. 取 α 适当小，则可把上式的最后一项移到 (16.81) 的左端，并由此得到 (16.78).

类似地可从 (16.80), (16.58), (16.59) 和 (16.66) 推出 (16.79).

命题 16.9 若 $l \leqslant j \leqslant l+p$, 则

$$\|u_h^{(j)} - \bar{U}^{(j)}\| \leqslant c_l \left(\max_{\Omega_h^*} |u_h^{(j)} - \bar{U}^{(j)}| + |\mu_h^{(j)} - p_h(\lambda^{(j)})| + \max_{x\in\Omega_h'} h^n \sum_{y\in\Omega_h'} G_h'(x, y) |\tau_h^{(j)}(y)|\right). \quad (16.82)$$

证明 由 (16.71) 得到

$$\|u_h^{(j)} - \bar{U}^{(j)}\|^2_{\Omega_h'} = \sum_{s\neq l,\cdots,l+p} |(u_h^{(j)} - \bar{U}^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega_h'}|^2.$$

作辅助函数 $f^{(j)}$,

$$\begin{cases} L_h f^{(j)}(x) = 0, & x \in \Omega_h', \\ f^{(j)}(x) = u_h^{(j)}(x) - \bar{U}^{(j)}(x), & x \in \Omega_h^*, \end{cases}$$

则

$$\max_{\Omega_h} |f^{(j)}| \leqslant c_j \max_{\Omega_h^*} |u_h^{(j)} - \bar{U}^{(j)}|.$$

又由于

$$\begin{cases} L_h(f^{(j)} - u_h^{(j)} + \bar{U}^{(j)}) = -L_h u_h^{(j)} + L_h \bar{U}^{(j)} \\ \qquad = -\mu_h^{(j)} u_h^{(j)} + p_h(\lambda^{(j)}) \bar{U}^{(j)} - \tau_h^{(j)}, & x \in \Omega_h', \\ f^{(j)} - u_h^{(j)} + \bar{U}^{(j)} = 0, & x \in \Omega_h^*, \end{cases}$$

因此

$$f^{(j)} = u_h^{(j)} - \overline{U}^{(j)} + h^n \sum_{y \in \Omega'_h} G'_h(x, y)(-\mu_h^{(j)} u_h^{(j)}(y)$$
$$+ p_h(\lambda^{(j)})\overline{U}^{(j)}(y) - \bar{\tau}_h^{(j)}(y))$$

和

$$(f^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h} = (u_h^{(j)} - \overline{U}^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h} - \frac{\mu_h^{(j)}}{\gamma_h^{(s)}}(u_h^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h}$$
$$+ \frac{p_h(\lambda^{(j)})}{\gamma_h^{(s)}}(\overline{U}^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h} - \frac{1}{\gamma_h^{(s)}}(\bar{\tau}_h^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h}$$
$$= (u_h^{(j)} - \overline{U}^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h} - \frac{(\mu_h^{(j)} - p_h(\lambda^{(j)}))}{\gamma_h^{(s)}}$$
$$\times (u_h^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h} - \frac{p_h(\lambda^{(j)})}{\gamma_h^{(s)}}(u_h^{(j)}$$
$$- \overline{U}^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h} - \frac{1}{\gamma_h^{(s)}}(\bar{\tau}_h^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h},$$

即

$$\begin{aligned}\gamma_h^{(s)}(f^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h} = \gamma_h^{(s)}(u_h^{(j)} - \overline{U}^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h} \\ - (\mu_h^{(j)} - p_h(\lambda^{(j)}))(u_h^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h} \\ - p_h(\lambda^{(j)})(u_h^{(j)} - \overline{U}^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h} \\ - (\bar{\tau}_h^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h},\end{aligned}$$

因此

$$(\gamma_h^{(s)} - p_h(\lambda^{(j)}))(u_h^{(j)} - \overline{U}^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h} = \gamma_h^{(s)}(f^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h}$$
$$+ (\mu_h^{(j)} - p_h(\lambda^{(j)}))(u_h^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h} + (\bar{\tau}_h^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h}.$$

记

$$\varphi(x) = h^n \sum_{y \in \Omega'_h} G'_h(x, y)\bar{\tau}_h^{(j)}(y),$$

则

$$(\bar{\tau}_h^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h} = \gamma_h^{(s)}(\varphi^{(j)}, v_h^{(s)})_{\Omega'_h}.$$

此外，当 h 适当小时，对一切 $l \leqslant j \leqslant l + p$，都有

$$\frac{|\gamma_h^{(s)}|}{|\gamma_h^{(s)} - p_h(\lambda^{(j)})|} \leqslant c_1,$$

$$\frac{1}{|\gamma_h^{(s)} - p_h(\lambda^{(j)})|} \leqslant c_1, \quad s \neq l, \cdots, l + p,$$

所以

$$\|u_h^{(j)}-\overline{U}^{(j)}\|^2_{\Omega'_h}\leqslant c_l\sum_{s=l,\cdots,l+p}[|(f^{(j)},v_h^{(s)})_{\Omega'_h}|^2+|\mu_h^{(j)}$$
$$-p_h(\lambda^{(j)})|^2|(u_h^{(j)},v_h^{(s)})_{\Omega'_h}|^2+|(\varphi^{(j)},v_h^{(s)})_{\Omega'_h}|^2]$$
$$\leqslant c_l(\|f^{(j)}\|^2_{\Omega'_h}+|\mu_h^{(j)}-p_h(\lambda^{(j)})|^2\|u_h^{(j)}\|^2_{\Omega'_h}$$
$$+\|\varphi^{(j)}\|^2_{\Omega'_h}],$$

由此就可推出命题的结论.

最后把 (16.78), (16.79) 和 (16.82) 代入 (16.77), 就完成了定理 16.13 的证明.

注记 16.5 因为 $p_h(\lambda^{(l)})$ 是实数,所以尚有

$$|\mathrm{Re}(\mu_h^{(l)})-p_h(\lambda^{(l)})|\leqslant c_l h'^{\alpha}.$$

注记 16.6 若 $\lambda^{(l)}$ 是单重特征值,则 $u_h^{(l)}$ 收敛到 $U^{(l)}$, 否则 $u_h^{(j)}$ 收敛到 $\overline{U}^{(j)}$, $l\leqslant j\leqslant l+p$, 因为 $d_{js}(h)$ 与 h 有关,所以 $\overline{U}^{(j)}$ 也依赖于 h, 并且不一定是规范化的. 若把 $\{\overline{U}^{(j)}\}$ 按某种意义规范化为 $\{\bar{\overline{U}}^{(j)}\}$, 则可得到

$$\max_{\Omega_h}|u_h^{(j)}-\bar{\overline{U}}^{(j)}|=O(h'^{\alpha},h^{\varepsilon}).$$

在前面的证明中,都假定了 $\nu_{m,k}(x)\in C^\infty(\bar{\Omega})$, $\nu_0(x)\in C^\infty(\bar{\Omega})$, Γ 适当光滑,事实上可以减弱这些条件.

例16.3 假定 (16.44) 中的系数 $\nu_{m,k}=\nu_m\delta_{mk}$, ν_m, ν_0 是常数. 又当 $x\in\Omega'_h$ 时,

$$L_h u_h(x)=-\sum_{m=1}^{n}\nu_m u_{h,\bar{x}_m x_m}(x)+\nu_0 u_h(x);$$

当 $x\in\Omega_h^*$ 时, 例如设 $x+a_m h e_m\in\Gamma_h$, $(0\leqslant a_m\leqslant 1)$, $x-he_m\in\Omega_h$, 则令

$$A(x,y)=\begin{cases}-\displaystyle\sum_{m=1}^{n}\frac{1+a_m}{a_m}A(x-he_m,x), & y=x,\\ A(x-he_m,x), & y=x-h\ e_m\\ \dfrac{1}{a_m}A(x-he_m,x), & y=x+a_m he_m,\\ 0 & \text{否则},\end{cases}$$

则可证明，在 Ω_h 上 L_h 是对称的，在 Ω_h' 上的逼近误差是 $O(h^2)$，在 Ω_h^* 上是 $O(1)$. 因此，定理 16.13 的结论对 $s_a = 2$, $p_h(\xi) = \xi$ 和任意 n 都成立. 当 $L = -\Delta$ 时，这就是 Bramble, Hubbard (1968) 的结果.

例 16.4 设 $\nu_m \equiv 1$, $1 \leqslant m \leqslant n$, 并采用 § 14.4 中的差分算子来逼近 Δ. 于是，在 Ω_h' 上 L_h 是对称的，并且逼近误差是 $O(h^2)$，在 Ω_h^* 上 L_h 不是对称的，其逼近误差是 $O(h)$. 所以定理 16.13 的结论对 $s_a = 2$, $p_h(\xi) = \xi$, $n = 2, 3$ 也是成立的，这就包含了 Саулев (1955) 和 Moler (1965) 的结果.

例 16.5 设 $n = 2$, $\nu_m \equiv 1$, $\nu_0 \equiv 0$,

$$\Omega_h' = \{x \in \Omega / \text{与 } x \text{ 相距不超过 } 2h \text{ 的点都在 } \Omega \text{ 内}\}.$$

当 $x \in \Omega_h'$ 时，

$$A(x, y) = \begin{cases} \dfrac{10}{3h^2}, & y = x, \\ -\dfrac{2}{3h^2}, & |x - y| = h, \\ -\dfrac{1}{6h^2}, & |x - y| = \sqrt{2}\,h, \\ 0 & \text{否则}, \end{cases}$$

于是在 Ω_h' 上，L_h 是对称的，并对 $L - \dfrac{h^2}{12} L^2$ 的逼近误差精度是 $O(h^4)$. 当 $x \in \Omega_h^*$ 时，例如设 $x + a_m h\ e_m \in \Gamma_h$, $x - h\ e_m \in \Omega_h$,

$$x - 2h e_m \in \Omega_h,$$

则定义

$$A(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{h^2} \displaystyle\sum_{m=1}^{2} \dfrac{3 - a_m}{a_m}, & y = x, \\ \dfrac{-6}{h^2 a_m (a_m + 1)(a_m + 2)}, & y = x + a_m h e_m, \\ \dfrac{2(a_m - 2)}{h^2(a_m + 1)}, & y = x - h e_m, \\ \dfrac{1 - a_m}{h^2(a_m + 2)}, & y = x - 2h e_m, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases}$$

于是在 Ω_h^* 上，L_h 对 $L-\frac{h^2}{12}L^2$ 的逼近误差精度是 $O(h^2)$. 因此，根据定理 16.13 得到

$$\left|\mu_h^{(l)}-\lambda^{(l)}+\frac{h^2}{12}(\lambda^{(l)})^2\right|=O(h^4).$$

关于边界有角点时的误差估计，可见 Hubbard (1961) 的文章. Bramble, Hubbard (1968) 考虑了例 16.4 的一种特殊情况，其中 $n=2$, $\nu_0\equiv 0$. 他们证明，如果边界上的内角为 $\frac{\pi}{\alpha}$, $\alpha>\frac{1}{2}$, 则有

$$|\mu_h^{(l)}-\lambda^{(l)}|=O(h^{2\alpha-\varepsilon}+h^2),$$
$$\max_{\Omega_h}|u_h^{(l)}-U^{(l)}|=O(h^{\alpha-\varepsilon}+h^2),$$

其中 ε 是任意正数.

此外 Moler (1965) 讨论了 $\alpha>1$ 的情况. Fox, Henrici, Moler (1967a, b) 和 Fix (1968) 考虑了 $\alpha=\frac{2}{3}$ 时的情况.

§17 非线性椭圆型方程

本节讨论非线性椭圆型方程的差分方法. 第一部分是半线性方程的计算方法. 首先以单调型方程为例，介绍了基本研究课题，即格式的构造，解的存在性，稳定性，收敛性和计算差分格式近似解的迭代方法. 接着讨论了孤立解的计算，以及计算分歧点的两条主要途径，其一是应用线性主部的 Green 函数，把原问题化为全连续算子方程的分歧点问题，然后应用 § 4.3 中的方法来处理；其二是直接应用差分格式来处理. 本节中介绍了后一种处理方法. 在本节的第二部分中，介绍了生物数学中的离散模型，着重讨论解的性质，个数和分歧现象. 本节的第三部分是定常流体动力学的差分方法，叙述了定常涡度方程和 Navier-Stokes 方程的守恒型格式和逆风型格式，并应用能量方法研究解的稳定性和收敛性，也介

绍了计算近似解的迭代方法．此外，还略述了定常流问题的稳定化方法．

17.1 半线性方程的差分方法

非线性椭圆型方程的最简单情况是半线性方程，本节以它为例，介绍处理非线性问题的基本方法．

设 $\Omega=\{x/0<x_m<1,\ 1\leqslant m\leqslant n\}$，并考虑下列问题

$$\begin{cases}-\Delta U+g(U)=f, & x\in\Omega,\\ U=0, & x\in\Gamma,\end{cases}\tag{17.1}$$

其中 $g\in C^1(\mathscr{R})$，$g(0)=0$，并满足下列单调性条件

$$(g(U_1)-g(U_2),\ U_1-U_2)_{L^2(\Omega)}\geqslant 0.\tag{17.2}$$

我们总假定（17.1）具有古典解，从而可由（17.2）推出它是唯一的．

用 $g_h(u)$ 来逼近 $g(U)$，其中 $g_h(0)=0$，并满足

$$(g_h(v_1)-g_h(v_2),\ v_1-v_2)\geqslant 0,\tag{17.3}$$

$$|g_h(U)-g(U)|=O(h^q),\quad q>1.\tag{17.4}$$

计算 (17.1) 的差分格式是

$$\begin{cases}-\Delta_h u+g_h(u)=f, & x\in\Omega_h,\\ u=0, & x\in\Gamma_h,\end{cases}\tag{17.5}$$

今后记

$$m_0=\sup_{v\neq 0}\frac{\|v\|^2}{|v|_1^2+S(v,v)},$$

定理 17.1 格式 (17.5) 有唯一的解，并且

$$|u|_1^2+S(u,u)\leqslant m_0\|f\|^2.$$

证明 设 $\mathscr{H}$ 是边值为零的网格函数的全体，其内积为

$$(v,\ w)_{\mathscr{H}}=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\{(v_{x_m},w_{x_m})+(v_{\bar{x}_m},w_{\bar{x}_m})\}+S(v,w).$$

记 $\mathscr{P}(v)=-\Delta_h v+g_h(v)-f$，则对一切固定的 h，$\mathscr{P}(v)$ 是一个连续算子．由引理 4.10 和 (17.3) 得到

$$(\mathscr{P}v, v)_{\mathscr{H}} \geqslant \|v\|_{\mathscr{H}} - \|f\|\|v\| \geqslant \|v\|_{\mathscr{H}}^2 - m_0^{\frac{1}{2}}\|f\|\|v\|_{\mathscr{H}}.$$

若 $\|v\|_{\mathscr{H}} > m_0^{\frac{1}{2}}\|f\|$，则 $(\mathscr{P}v, v)_{\mathscr{H}} > 0$。 根据引理 5.4，(17.5) 至少有一个解$u$. 把 (17.5) 对 u 求内积,即有

$$\|u\|_{\mathscr{H}}^2 \leqslant \|u\|\|f\| \leqslant m_0^{\frac{1}{2}}\|f\|\|u\|_{\mathscr{H}},$$

从而 $\|u\|_{\mathscr{H}}^2 \leqslant m_0\|f\|^2$.

若 u_1 和 u_2 都是 (17.5) 的解，$\tilde{u} = u_2 - u_1$，则

$$\begin{cases} -\Delta_h\tilde{u} + g_h(u_1 + \tilde{u}) - g_h(u_1) = 0, & x \in \Omega_h, \\ \tilde{u} = 0, & x \in \Gamma_h. \end{cases}$$

可仿前得到 $\|\tilde{u}\|_{\mathscr{H}} = 0$. 因为在 Γ_h 上 $\tilde{u} = 0$，所以 $\tilde{u} \equiv 0$.

定理 17.2 假设 f 和 u 分别有误差 $\tilde{f}$ 和 $\tilde{u}$，则

$$|\tilde{u}|_1^2 + S(\tilde{u}, \tilde{u}) \leqslant m_0\|\tilde{f}\|^2, \quad \|\tilde{u}\|^2 \leqslant m_0^2\|\tilde{f}\|^2.$$

证明 此时有

$$\begin{cases} -\Delta_h\tilde{u} + g_h(u + \tilde{u}) - g_h(u) = \tilde{f}, & x \in \Omega_h, \\ \tilde{u} = 0, & x \in \Gamma_h. \end{cases}$$

把上式对 $\tilde{u}$ 求内积后得到

$$|\tilde{u}|_1^2 + S(\tilde{u}, \tilde{u}) \leqslant \|\tilde{f}\|\|\tilde{u}\| \leqslant m_0^{\frac{1}{2}}\|\tilde{f}\|(|\tilde{u}|_1^2 + S(\tilde{u}, \tilde{u}))^{\frac{1}{2}},$$

由此即得到第一个结论,并由此可以推出第二个结论.

根据 (17.4)，(17.5) 的逼近误差是 $O(h^2 + h^q)$. 根据 §3.1 的理论,直接由定理 17.2 得到

$$\|u - U\|^2 + |u - U|_1^2 + S(u - U, u - U) \leqslant c_1(h^4 + h^{2q}).$$

如果 $g_h(v)$ 对 v 的偏导数 $g_h'(v)$ 对 h 一致有界,那末

$$\begin{cases} -\Delta_h(u - U) = \tilde{g}_h, & x \in \Omega_h, \\ u - U = 0, & x \in \Gamma_h. \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{g}_h &= (g(U) - g_h(U)) + (g_h(U) - g_h(u)) \\ &= O(|u - U| + h^q), \end{aligned}$$

从而由引理 4.11 得到

$$|u - U|_2^2 \leqslant c_2(\|u - U\|^2 + h^{2q} \leqslant c_3(h^4 + h^{2q}).$$

尚可仿照 § 5.3 中的差分方法，证明 (17.1) 的解的存在性.

也可以采用不同的方法求 (17.5) 的解, 例如仿照 Kuo Pen-yu

(1977) 的方法构造松弛迭代过程

$$u^{(l+1)} = u^{(l)} + \tau(\Delta_h u^{(l+1)} - g_h(u^{(l)}) + f), \quad l \geqslant 0, \tag{17.6}$$

其中 $u^{(l)}$ 表示第 l 次迭代值，τ 是松弛因子．记 $\tilde{u}^{(l)} = u^{(l)} - u$，于是

$$\tilde{u}^{(l+1)} - \tilde{u}^{(l)} = \tau(\Delta_h \tilde{u}^{(l+1)} - g_h(u^{(l)}) + g_h(u)).$$

假定 $|g_h'| \leqslant g'$，则把上式与 $\tilde{u}^{(l+1)}$ 求积后得到

$$\|\tilde{u}^{(l+1)}\|^2 - \|\tilde{u}^{(l)}\|^2 + \tau|\tilde{u}^{(l+1)}|_1^2 + \tau S(\tilde{u}^{(l+1)}, \tilde{u}^{(l+1)})$$
$$\leqslant g'\tau\|\tilde{u}^{(l)}\|\|\tilde{u}^{(l+1)}\|,$$

因此

$$\left(1 + \frac{\tau}{m_0} - \varepsilon\tau\right)\|\tilde{u}^{(l+1)}\|^2 \leqslant \left(1 + \frac{\tau g'^2}{4\varepsilon}\right)\|\tilde{u}^{(l)}\|^2.$$

取 $\varepsilon = \dfrac{g'}{2}$，则有

$$\|\tilde{u}^{(l+1)}\|^2 \leqslant \theta\|\tilde{u}^{(l)}\|^2,$$

其中

$$\theta = \frac{1 + \dfrac{\tau g'}{2}}{1 + \dfrac{\tau}{m_0} - \dfrac{\tau g'}{2}},$$

故当 $g' < \dfrac{1}{m_0}$ 时，$\theta < 1$．

定理 17.3 如果 $g' < \dfrac{1}{m_0}$，则迭代过程 (17.6) 至少按几何级数的速率收敛．

上述迭代过程的优点是收敛性与 $u^{(0)}$ 的选择无关．

另一个重要途径是仿照 Keller (1970) 的方法，采用下列 Newton 迭代过程

$$u^{(l+1)} = u^{(l)} - [\mathscr{L}'(u^{(l)})]^{-1}\mathscr{L}(u^{(l)}), \quad l \geqslant 0, \tag{17.7}$$

或者简化的 Newton 迭代过程

$$u^{(l+1)} = u^{(l)} - [\mathscr{L}'(u^{(0)})]^{-1}\mathscr{L}(u^{(l)}), \tag{17.8}$$

其中

$$\mathscr{L}v=\begin{cases}-\Delta_h v+g_h(v)-f, & x\in\Omega_h,\\ v, & x\in\Gamma_h.\end{cases}$$

$\mathscr{L}'$ 是 $\mathscr{L}$ 的 Frèchet 导数，即

$$\mathscr{L}'(w)v=\begin{cases}-\Delta_h v+g_h'(w)v, & x\in\Omega_h,\\ v, & x\in\Gamma_h.\end{cases}$$

下面记 $\sigma_0=\|\mathscr{L}u^{(0)}\|=\|-\Delta_h u^{(0)}+g_h(u^{(0)})-f\|$.

定理 17.4 如果 $m_0^2\sigma_0 g''<\dfrac{1}{2}$, 那末迭代过程 (17.7) 和 (17.8) 都是收敛的，其中 g'' 是 $g_h(v)$ 对 v 的二阶导数绝对值的上界.

证明 只要验证引理 3.2 中的条件满足. 取该引理中的 $\mathscr{F}_2$ 为 $\bar{\Omega}_h$ 上的网格函数全体，$\mathscr{F}_1$ 是边值为零的网格函数的集合，其范数都是$\|\cdot\|$. 显然，对于固定的 h, $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{L}'$ 都是连续算子. 因为对一切 w_1, $w_2\in\mathscr{F}_1$,

$$\|\mathscr{L}'(w_1)-\mathscr{L}'(w_2)\|=\sup_{v\neq0}\frac{1}{\|v\|}\|-\Delta_h v+g_h'(w_1)v$$
$$+\Delta_h v-g_h'(w_2)v\|\leqslant g''\|w_1-w_2\|, \qquad (17.9)$$

所以可以选取适当大的正数 ρ, 使得在球

$$S_1(u^{(0)},\rho)=\{u/\|u-u^{(0)}\|\leqslant\rho\}$$

中，不等式 (17.9) 一致成立，故可在引理 3.2 中，取 $k_\rho=g''$.

考虑下列线性问题

$$\begin{cases}-\Delta_h v+g_h'(u^{(0)})v=0, & x\in\Omega_h,\\ v=0, & x\in\Gamma_h.\end{cases}$$

由条件 (17.3), $g_h'\geqslant0$, 因此 $v\equiv0$, 它表示 $[\mathscr{L}'(u^{(0)})]^{-1}$ 是存在的，

又对一切 $v\in\mathscr{F}_1$,

$$\|v\|^2\leqslant m_0[|v|_1^2+S(v,v)]\leqslant m_0(v,-\Delta_h v+g_h'(u^{(0)})v)$$
$$\leqslant m_0\|v\|\|-\Delta_h v+g_h'(u^{(0)})v\|,$$

即

$$\|v\|\leqslant m_0\|-\Delta_h v+g_h'(u^{(0)})v\|. \qquad (17.10)$$

令 $\xi = \mathscr{L}'(u^{(0)})v$，则得到

$$\|[\mathscr{L}'(u^{(0)})]^{-1}\xi\| \leqslant m_0\|\xi\|,$$

因此 $\|[\mathscr{L}'(u^{(0)})]^{-1}\| \leqslant m_0$，从而可在引理 3.2 中取 $b_0 = m_0$.

在 (17.10) 中令 $v = [\mathscr{L}'(u^{(0)})]^{-1}\mathscr{L}(u^{(0)})$，则

$$\begin{aligned}\eta_0 &= \|[\mathscr{L}'(u^{(0)})]^{-1}\mathscr{L}(u^{(0)})\| \leqslant m_0\|\mathscr{L}(u^{(0)})\| \\ &= m_0\|-\Delta_h u^{(0)} + g_h(u^{(0)}) - f\| = m_0\sigma_0.\end{aligned}$$

根据定理的条件，

$$a_0 = b_0 k_\rho \eta_0 = m_0^2\sigma\rho\bar{g}'' < \frac{1}{2},$$

$$\rho_0 = \frac{1-\sqrt{1-2a_0}}{b_0 k_\rho} = \frac{1-\sqrt{1-2m_0^2\sigma_0\bar{g}''}}{m_0\bar{g}'} < \rho,$$

所以引理 3.2 的条件都满足.

在实际问题中，$g(U)$ 不一定满足 (17.2). 例如在生物数学中会遇到 $g = U(U-1)(U-a)$，其中 $0 < a < \frac{1}{2}$. 计算它的格式是

$$\begin{cases} -\Delta_h u + g(u) = f, & x \in \Omega_h, \\ u = 0, & x \in \Gamma_h. \end{cases} \tag{17.11}$$

记 $\mathscr{P}(v) = -\Delta_h v + g(v) - f$，则

$$\begin{aligned}(\mathscr{P}v, v) \geqslant |v|_1^2 + S(v, v) + \|v\|_{l^4}^4 - (1+a)(v, v^2) \\ + a\|v\|^2.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}(1+a)|(v, v^2)| &\leqslant \|v\|_{l^4}^4 + \frac{(1+a)^2}{4}\|v\|^2 = \|v\|_{l^4}^4 \\ &\quad + a\|v\|^2 + \frac{(1-a)^2}{4}\|v\|^2 \leqslant \|v\|_{l^4}^4 \\ &\quad + a\|v\|^2 + \frac{(1-a)^2 m_0}{4} \\ &\quad \times (|v|_1^2 + S(v, v)),\end{aligned}$$

因此

$$(\mathscr{P}(v), v) \geqslant \left(1 - \frac{(1-a)^2 m_0}{4}\right)\|v\|_{\mathscr{H}}^2 - m_0\|f\|\|v\|_{\mathscr{H}},$$

若 $m_0 < \frac{4}{(1-\alpha)^2}$，则当 $\|v\|_{\mathscr{H}} = M$，M 适当大时，$(\mathscr{P}(v), v) > 0$，因此根据引理 5.4，此时至少有一个解 u。尚可仿照前面的方法估计 $\|v\|_{\mathscr{H}}$ 和讨论解的唯一性，稳定性和收敛性.

许多物理、化学和生物学问题还常常要求计算正值解，例如可见 Bers (1953)，Гельфанд (1959)，Joseph (1965)，Joseph, Sparrow (1970)，Simpson, Cohen (1970) 的方法. Simpson (1971) 证明，如果 (17.1) 有唯一的正值解，单调格式对它的逼近是相容的，那末它也有唯一的正值解. 并且可以得到了最大模的估计.

关于求非线性方程唯一古典解的差分方法，还可见 Bers (1953)，Parter (1965)，Mcallister (1969) 和 Ciarlet, Shultz, Varga (1969) 的文章.

17.2 半线性方程的孤立解

Simpson (1972)，Meyer-Spasche (1975, 1979) 等研究了半线性方程多个孤立解的计算方法.

设 Ω 是二维空间中的有界开域，边界 Γ 逐段光滑.

$$f(x, V) \in C^{2+\alpha}(\Omega \times \mathscr{R}), \quad 0 < \alpha < 1.$$

今考虑下列问题

$$LU(x) = \begin{cases} -\Delta U(x) - f(x, U) = 0, & x \in \Omega, \\ U(x) = 0, & x \in \Gamma. \end{cases} \tag{17.12}$$

记

$$f'(x, V) = \frac{\partial f(x, V)}{\partial V},$$

L' 表示 L 的 Frèchet 导数，则有

$$L'(U)V(x) = \begin{cases} -\Delta V(x) - f'(x, U)V(x), & x \in \Omega, \\ V(x), & x \in \Gamma. \end{cases}$$

我们假定 $U \in C^4(\bar{\Omega})$ 是 (17.12) 的孤立解，从而 $L'(U)$ 是非奇异的，否则，称为临界点. 由于 $f(x, V) \in C^{2+\alpha}(\Omega \times R)$，和

$$|L'(U_1) - L'(U_2)| \leqslant |f'(x, U_1) - f'(x, U_2)|,$$

所以 L' 满足 Lipschitz 条件,故根据定理 3.8,(17.12) 的孤立解 $U(x)$ 也一定是稳定解.

假设 Ω_h, Ω_h^* 和 Γ_h 的定义同 § 4.6 中的例 4.10,

$$\Omega_h' = \Omega_h/\Omega_h^*$$

N' 表示 Ω_h' 内的网格点总数,$\bar{\Delta}_h$ 表示 Shortley-Weller (1938) 差分算子,并用下列差分格式计算 (17.12),

$$L_h u(x) = \begin{cases} -\bar{\Delta}_h u(x) - f(x, u(x)) = 0, & x \in \Omega_h, \\ u(x) = 0, & x \in \Gamma_h. \end{cases} \quad (17.13)$$

为了分析格式(17.13)的解的存在性和收敛性,先引入一些记号与引理(见 Bramble (1966c)),

$$(\varphi, \psi)_{\Omega_h'} = h^2 \sum_{x \in \Omega'_h} \varphi(x)\psi(x), \quad \|\varphi\|^2_{\Omega_h'} = (\varphi, \varphi)_{\Omega_h'}.$$

引理 17.1 假设 $d(x)$ 是有界函数,$|d| \leqslant d_1$,其中正常数 d_1 不是下列问题

$$\begin{cases} -\Delta W + (d + d_1)W = \lambda W, & x \in \Omega, \\ W = 0, & x \in \Gamma, \end{cases} \quad (17.14)$$

的特征值,那末,对一切函数 φ,

$$\|\varphi_{\Omega_h'}\| \leqslant c_1(\|-\bar{\Delta}_h\varphi + d\varphi\|_{\Omega_h'} + \|\varphi\|_{\infty,\Omega_h^*}).$$

证明 用 $\{\lambda^{(l)}\}$ 表示 (17.14) 的由小到大排列的特征值,相对应的规范正交特征函数系是 $\{W^{(l)}\}$. 把 (17.14) 离散化为

$$\begin{cases} -\bar{\Delta}_h w_h(x) + (d + d_1)w_h(x) = \mu_h w_h(x), & x \in \Omega_h', \\ w_h(x) = 0, & x \in \Omega_h^*. \end{cases}$$

则它也有相应的由小到大排列的特征值 $\{\mu_h^{(l)}\}$ 和正交规范特征函数系 $\{w_h^{(l)}\}$, $1 \leqslant l \leqslant N'$. 根据 § 16.7 中的结果,当 $h \to 0$ 时,

$$\mu_h^{(l)} \to \lambda^{(l)} \neq d_1.$$

我们还有

$$\|\varphi\|^2_{\Omega_h'} = \sum_{l=1}^{N'} [(\varphi, w_h^{(l)})_{\Omega_h'}]^2,$$

$$\mu^{(l)}(\varphi, w_h^{(l)}) = (\varphi, -\bar{\Delta}_h w_h^{(l)} + (d + d_1)w_h^{(l)}). \quad (17.15)$$

作辅助函数 $v(x)$,它满足

$$\begin{cases} -\bar{\Delta}_h v(x) + (d + d_1) v(x) = 0, & x \in \Omega'_h, \\ v(x) = \varphi(x), & x \in \Omega^*_h. \end{cases}$$

显然有

$$\mu_h^{(l)}(\varphi, w_h^{(l)})_{\Omega'_h} = (\varphi - v, -\bar{\Delta}_h w_h^{(l)} + (d + d_1) w_h^{(l)})_{\Omega'_h} + \mu_h^{(l)}(v, w_h^{(l)})_{\Omega'_h}. \tag{17.16}$$

因为在 Ω^*_h 上，$\varphi - v = 0$，所以

$$(\varphi - v, -\bar{\Delta}_h w_h^{(l)} + (d + d_1) w_h^{(l)})_{\Omega'_h} = (-\bar{\Delta}_h \varphi + (d + d_1)\varphi, w_h^{(l)})_{\Omega'_h},$$

把上式代入 (17.16) 后得到

$$(\mu_h^{(l)} - d_1)(\varphi, w_h^{(l)})_{\Omega'_h} = (-\bar{\Delta}_h \varphi + d\varphi, w_h^{(l)})_{\Omega'_h} + \mu_h^{(l)}(v, w_h^{(l)})_{\Omega'_h},$$

从而得到

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{N'} &[(\varphi, w_h^{(l)})_{\Omega'_h}]^2 \\ &= \sum_{l=1}^{N'} \left(\frac{(-\bar{\Delta}_h \varphi + d\varphi, w_h^{(l)})_{\Omega'_h} + \mu^{(l)}(v, w_h^{(l)})_{\Omega'_h}}{\mu_h^{(l)} - d_1} \right)^2 \\ &\leqslant 2 \sum_{l=1}^{N'} \frac{1}{(\mu_h^{(l)} - d_1)^2} \{ [(-\bar{\Delta}_h \varphi + d\varphi, w_h^{(l)})_{\Omega'_h}]^2 \\ &\quad + (\mu_h^{(l)})^2 [(v, w_h^{(l)})_{\Omega'_h}]^2 \} \leqslant c_2 (\| -\bar{\Delta}_h \varphi \\ &\quad + d\varphi \|^2_{\Omega'_h} + \| v \|^2_{\infty, \Omega'_h}). \end{aligned} \tag{17.17}$$

又因为

$$\| v \|_{\infty, \Omega'_h} \leqslant \| v \|_{\infty, \Omega^*_h} \leqslant \| \varphi \|_{\infty, \Omega^*_h},$$

故代入 (17.17) 后即得所证的结论.

引理 17.2 设 d, d_1 如同引理 17.1 所示，h 适当小，则有

$$\| \varphi \|_{\infty, \Omega'_h} \leqslant c_3 (\| -\bar{\Delta}_h \varphi + d\varphi \|_{\infty, \Omega'_h} + h^2 \| -\bar{\Delta}_h \varphi + d\varphi \|_{\infty, \Omega^*_h} + \| \varphi \|_{\infty, \Gamma_h}).$$

证明 用 $G_h(x, y)$ 表示 Shortley-Weller 算子的离散 Green 函数，则由引理 4.25 得到

$$\varphi(x) = h^2 \sum_{y \in \Omega_h} G_h(x, y) \{ -\Delta_h \varphi(y) + d\varphi(y) \}$$

$$-h^2\sum_{y\in\Omega_h}G_h(x,y)d\varphi(y)+\sum_{y\in\Gamma_h}G_h(x,y)\varphi(y),$$
(17.18)

因此

$$|\varphi(x)|\leqslant\Big(h^2\sum_{y\in\Omega_h'}G_h^2(x,y)\Big)^{\frac12}(\|-\bar\Delta_h\varphi+d\varphi\|_{\Omega_h'}$$
$$+d_1\|\varphi\|_{\Omega_h'})+h^2\sum_{y\in\Omega_h^*}G_h(x,y)[\|-\Delta_h\varphi$$
$$+d\varphi\|_{\infty,\Omega_h^*}+d_1\|\varphi\|_{\infty,\Omega_h^*}]$$
$$+\sum_{y\in\Gamma_h}G_h(x,y)\|\varphi\|_{\infty,\Gamma_h}. \tag{17.19}$$

故由引理 4.25, 4.27, 4.30 和引理 17.1 得到

$$\|\varphi\|_{\infty,\bar\Omega_h}\leqslant c_4(\|-\bar\Delta_h\varphi+d\varphi\|_{\infty,\Omega_h'}+h^2\|-\Delta_h\varphi$$
$$+d\varphi\|_{\infty,\Omega_h^*}+\|\varphi\|_{\infty,\Omega_h^*}+\|\varphi\|_{\infty,\Gamma_h}). \tag{17.20}$$

又由引理 4.25 和 4.29 得到

$$\|\varphi\|_{\infty,\Omega_h^*}\leqslant c_5(\|-\bar\Delta_h\varphi+d\varphi\|_{\infty,\Omega_h'}+h^2\|-\Delta_h\varphi$$
$$+d\varphi\|_{\infty,\Omega_h^*}+\|\varphi\|_{\infty,\Gamma_h}+h\|\varphi\|_{\infty,\bar\Omega_h}). \tag{17.21}$$

假定 $h<\dfrac{1}{c_4c_5}$, 并把 (17.21) 代入 (17.20), 就得到引理的结论.

定理 17.5 若 $U\in C^4(\bar\Omega)$ 是 (17.12) 的孤立解, 则存在 (17.13) 的某个解 u, 使得 $\|U-u\|_{\infty,\bar\Omega_h}=O(h^2)$.

证明 应用引理 3.2 来证明. 设 $\mathscr{F}_2$ 是 $\bar\Omega_h$ 上的网格函数的集合, $\mathscr{F}_1$ 是边值为零的网格函数集合,其范数为 $\|\cdot\|_{\infty,\bar\Omega_h}$. 令

$$\mathscr{L}=L_h,$$

其 Frèchet 导数是 $\mathscr{L}'$, 于是

$$\mathscr{L}'(w)v(x)=\begin{cases}-\bar\Delta_hv(x)-f'(x,w(x))v(x), & x\in\Omega_h,\\ v(x), & x\in\Gamma_h.\end{cases} \tag{17.22}$$

对任何固定的 h, $\mathscr{L}'(w)$ 是连续算子. 把 (17.12) 的解 U 选为 $u^{(0)}$, $\rho=1$, 则在球 $S_1(U,1)$ 内,

$$\|\mathscr{L}'(w_1)-\mathscr{L}'(w_2)\|\leqslant\|f'(x,w_1)-f'(x,w_2)\|_{\infty,\bar\Omega_h}$$
$$\leqslant c_6\|w_1-w_2\|_{\infty,\bar\Omega_h}.$$

从而可以把引理 3.2 中的 k_0 取为 c_6.

今考虑下列问题

$$\begin{cases} -\bar{\Delta}_h v(x) - f'(x, U)v = 0, & x \in \Omega_h, \\ v(x) = 0, & x \in \Gamma_h. \end{cases} \quad (17.23)$$

因为 U 是 (17.12) 的孤立解,所以下列问题

$$\begin{cases} -\Delta W - f'(x, U)W = 0, & x \in \Omega, \\ W = 0, & x \in \Gamma, \end{cases}$$

只有零解. 记 $\bar{f}' = \max|f'(x, U)|$, 则 $\bar{f}'$ 不是下列问题

$$\begin{cases} -\Delta W + (\bar{f}' - f'(x, U))W = \lambda W, & x \in \Omega, \\ W = 0, & x \in \Gamma, \end{cases}$$

的特征值. 所以根据引理 17.2, 下列问题

$$\begin{cases} -\bar{\Delta}_h w - f'(x, U)w = 0, & x \in \Omega_h, \\ w = 0, & x \in \Gamma_h, \end{cases}$$

也只有零解,故 $[\mathscr{L}'(U)]^{-1}$ 是存在的,并且

$$\|v\|_{\infty,\bar{\Omega}_h} \leqslant c_7(\|\bar{\Delta}_h v + f'(x, U)v\|_{\infty,\Omega'_h} + h^2\|\bar{\Delta}_h v + f'(x,U)v\|_{\infty,\Omega^*_h}).$$

令 $\xi = \mathscr{L}'(U)v$, 则

$$\|[\mathscr{L}'(U)]^{-1}\xi\|_{\infty,\bar{\Omega}_h} \leqslant c_7(\|\xi\|_{\infty,\Omega'_h} + h^2\|\xi\|_{\infty,\Omega^*_h}). \quad (17.24)$$

不妨假定 $h \leqslant 1$, 则得到

$$\|[\mathscr{L}'(U)]^{-1}\xi\|_{\infty,\bar{\Omega}_h} \leqslant 2G\|\xi\|_{\infty\bar{\Omega}_h},$$

因此可以在引理 3.2 中取 $b_0 = 2c_7$.

又令 $v = [\mathscr{L}'(U)]^{-1}\mathscr{L}(U)$, 则由 (17.24) 得到

$$\begin{aligned} \eta_0 = \|[\mathscr{L}'(U)]^{-1}\mathscr{L}(U)\|_{\infty,\bar{\Omega}_h} &\leqslant 2G(\|\bar{\Delta}_h U + f(x,U)\|_{\infty,\Omega'_h} \\ &\quad + h^2\|\bar{\Delta}_h U + f(x,v)\|_{\infty,\Omega^*_h}) \\ &\leqslant 2c_7(\|\bar{\Delta}_h U - \Delta U\|_{\infty,\Omega'_h} + h^2\|\bar{\Delta}_h U - \Delta U\|_{\infty,\Omega^*_h}) \\ &\leqslant c_8 h^2, \end{aligned}$$

因此当 h 适当小时,

$$\alpha_0 = b_0 k_0 \eta_0 = 2c_6 c_7 c_8 h^2 < \frac{1}{2},$$

$$\rho_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2a_0}}{b_0 k_\rho} = O(h^2) \leqslant \rho = 1.$$

综合以上分析，即知引理 3.2 的条件全部满足，因此存在 (17.23) 的解 $u \in S_1(U, \rho_0)$，即 $\|u - U\|_{\infty, \bar{\Omega}_h} = O(h^2)$.

从定理的证明过程还可知道，如果选取初始值 $u^{(0)}$ 与 U 充分接近，则 Newton 迭代法或简化 Newton 迭代法都使 $u^{(l)}$ 收敛到 U. 特别，若 U 是 (17.12) 的正值解，则当 h 充分小时，也存在相应的正值解 u.

与定理 17.5 相反的问题是是否存在 (17.13) 的解的序列，使得当 $h \to 0$ 时，它的极限不是 (17.12) 的解. 对于一般的非线性方程，并没有肯定的回答. 但对于 (17.12), (17.13), Meyer-Spasche (1979) 得到了在某种意义下的肯定结果.

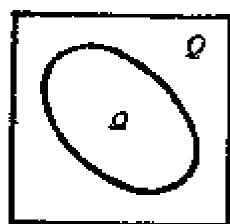


图 17.1

作包含 $\bar{\Omega}$ 的正方形区域 Q，见图 17.1，它的边界与座标轴平行，并与 Γ 的距离不小于 $2h$. 把与 Q 相对应的网格内点集合记为 Q_h.

命题 17.1 设 $v(x)$ 满足 (17.13)，并在 Q_h/Ω_h 上 $v \equiv 0$，那末存在正常数 c_9，使得

$$|v|_{1,Q_h}^2 \leqslant c_9 h^2 \sum_{x \in \Omega_h} v(x) f(x, v(x)).$$

证明 我们有

$$|v|_{1,Q_h}^2 \leqslant h^2 \sum_{x \in Q_h} v(x)(-\Delta_h v(x)). \qquad (17.25)$$

由于当 $x \in \Omega_h'$ 时，$-\bar{\Delta}_h v = -\Delta_h v$，而当 $x \in Q_h/\Omega_h$ 时，$v(x) = 0$，所以可证得

$$h^2 \sum_{x \in \Omega_h} v(x)(\bar{\Delta}_h v(x) - \Delta_h v(x)) \leqslant \gamma |v|_{1,Q_h}^2, \quad \gamma < 1.$$

把它代入 (17.25) 后得到

$$|v|_{1,Q_h}^2 \leqslant c_9 h^2 \sum_{x \in \Omega_h} v(x)(-\Delta_h v(x)),$$

由此即得所证的结论.

设 $\{h_l\}$ 是步长序列，并当 $l\to\infty$ 时，$h_l\to 0$. 又设 $\{u_l\}$ 是 (17.13) 的对应于步长 h_l 的解，并且对一切 h_l 满足

$$\|u_l\|_{\infty,\bar{\Omega}_{h_l}}\leqslant c_{10}. \tag{17.26}$$

现在用零值把 $u_l(x)$ 扩充到整个 Ω_{h_l}，再用双线性插值方法求得连续函数 $U_l(x)$，于是 (17.26) 对 U_l 仍然成立. 由命题 17.1，$|U_l|^2_{1,\Omega_{h_l}}$ 对 h_l 一致有界. 又因为 $|U_l|^2_{H^1(\Omega)}\leqslant c_{11}|U_l|^2_{1,\Omega_{h_l}}$ (见 Bramble (1969))，所以 $\|U_l\|^2_{H^1(\Omega)}$ 也一致有界，而且每一个按 $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ 弱收敛的子列(仍记为 U_l)，按 $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ 强收敛，把它的极限记为 $U(x)$.

又把网格函数 $f(x, U_l(x))|_{x\in\Omega_{h_l}}$ 延拓为分片常数函数 F，即在每个以 $x'\in\Omega'_{h_l}$ 为中心，以 h_l 为边长的正方形 $S_{h_l}(x')$ 中，

$$F=f(x',U_l(x')),$$

而在 $\Omega_{h_l}/\Omega'_{h_l}$ 中，$F=0$.

命题 17.2 当 $l\to\infty$ 时，

$$\|F(\cdot, U_l)-f(\cdot, U)\|_{L^2(\Omega)}\to 0.$$

证明 我们有

$$\|F(\cdot, U_l)-f(\cdot, U)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\|F(\cdot, U_l)-f(\cdot, U_l)\|_{L^2(\Omega)} + \|f(\cdot, U_l)-f(\cdot, U)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{17.27}$$

若 $x\in S_{h_l}(x')$，$x'\in\Omega'_{h_l}$，则有

$$F(x, U_l(x))-f(x,U_l(x))=\sum_{m=1}^{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x_m}(\eta, \xi) + f'(\eta, \xi)\frac{\partial U_l}{\partial x_m}(\eta)\right](x_m-x'_m).$$

因为 $x'\in\Omega'_{h_l}$，所以或者 $\dfrac{\partial U_l}{\partial x_m}=0$，或者 $\dfrac{\partial U_l}{\partial x_m}=(U_l)_{x_m}(x')$. 若 $x'\bar{\in}\Omega'_{h_l}$，则在上式中增加一个 $O(h_l)$ 的项. 总之，当 $h_l\to 0$时，

$$\|F(\cdot, U_l)-f(\cdot, U_l)\|_{L^2(\Omega)}\to 0.$$

又由于 $f\in C^{2+\alpha}(\Omega\times\mathscr{R})$，且当 $h\to 0$ 时，$\|U_l-U\|_{L^2(\Omega)}\to 0$，所以还有

$$\|f(\cdot, U_l) - f(\cdot, U)\|_{L^2(\Omega)} \to 0.$$

下面作辅助函数 $w_l(x)$，它满足

$$\begin{cases} -\bar{\Delta}_{h_l} w_l(x) - f(x, U_l(x)) = 0, & x \in \Omega'_{h_l}, \\ w_l(x) = 0, & x \in \Omega_{h_l}/\Omega'_{h_l}. \end{cases} \tag{17.28}$$

命题 17.3 当 $x \in \Omega^*_{h_l}$ 时，

$$\bar{\Delta}_{h_l} w_l(x) = O\left(\frac{1}{h_l}\right).$$

证明 设 G_{h_l} 是离散 Green 函数，它满足

$$\begin{cases} -\bar{\Delta}_{h_l} G_{h_l}(x, y) = h_l^{-2}\delta(x, y), & x \in \Omega'_{h_l}, \ y \in \bar{\Omega}_h, \\ G_{h_l}(x, y) = 0, & x \in \Omega_{h_l}/\Omega'_{h_l}, \ y \in \bar{\Omega}_h, \end{cases}$$

于是

$$w_l(x) = h_l^2 \sum_{y \in \Omega'_{h_l}} G_{h_l}(x, y) f(y, U_l(y)). \tag{17.29}$$

可以证明，若x'与 $\Omega^*_{h_l}$ 的距离不超过 h_l，则有

$$0 \leqslant h_l^2 \sum_{y \in \Omega^*_{h_l}} G_{h_l}(x', y) \leqslant c_{11} h_l. \tag{17.30}$$

又因为当 $x' \bar{\in} \Omega'_{h_l}$ 时，$G_{h_l}(x', y) = 0$，所以还不妨假设 $x' \in \Omega'_{h_l}$.

为了证明(17.30)成立，作三个辅助函数 $V(x)$，$v(x)$ 和 $\tilde{v}(x)$，它们满足

$$\begin{cases} -\Delta V = 1, & x \in \Omega, \\ V = 0, & x \in \Gamma, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta_{h_l} v = 1, & x \in \Omega'_{h_l}, \\ v = 0, & x \in \Omega^*_{h_l} \cup \Gamma_{h_l}, \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} -\bar{\Delta}_{h_l} \tilde{v}(x) = 1, & x \in \Omega'_{h_l}, \\ \tilde{v}(x) = V(x), & x \in \Omega^*_{h_l}, \\ \tilde{v}(x) = 0, & x \in \Gamma_{h_l}. \end{cases}$$

首先，由引理 17.2 得到

$$\|V - \tilde{v}\|_{\infty, \bar{\Omega}_{h_l}} \leqslant c_{12}(\|\bar{\Delta}_{h_l} V - \bar{\Delta}_{h_l} \tilde{v}\|_{\infty, \Omega'_{h_l}} + h_l^2 \|\bar{\Delta}_{h_l} V - \bar{\Delta}_{h_l} \tilde{v}\|_{\infty, \Omega^*_{h_l}})$$

$$= c_{12}(\|\bar{\Delta}_{h_l}V - \Delta V\|_{\infty,\Omega'_{h_l}} + h_l^2\|\bar{\Delta}_{h_l}V - \bar{\Delta}_{h_l}\bar{v}\|_{\infty,\Omega^*_{h_l}})$$

$$\leqslant c_{13}(h_l + h_l^2\|\bar{\Delta}_{h_l}V - \bar{\Delta}_{h_l}\bar{v}\|_{\infty,\Omega^*_{h_l}}). \qquad (17.31)$$

如果 $x \in \Omega^*_{h_l}$，例如 $x + h_l e_m \in \Omega'_{h_l}$，$x - a_m h_l e_m \in \Gamma_{h_l}$，那末，由于在 $\Omega^*_{lh} \cup \Gamma_{h_l}$ 上，$V(x) - \bar{v}(x) = 0$，所以

$$\bar{\Delta}_{h_l}V(x) - \bar{\Delta}_{h_l}\bar{v}(x) = \frac{2}{h_l^2}\Big(\frac{1}{1+a_1}(V(x+h_l e_1) - \bar{v}(x+h_l e_1)) + \frac{1}{1+a_2}(V(x + h_l e_2) - \bar{v}(x+h_l e_2))\Big). \qquad (17.32)$$

因为 $x + h_l e_m$ 与 x 相距为 h_l，所以由 $|\bar{v}|^2_{1,\Omega_h}$ 的一致有界性得到

$$|V(x+h_l e_m) - \bar{v}(x+h_l e_m)| \leqslant |V(x+h_l e_m) - V(x)| + |\bar{v}(x) - \bar{v}(x+h_l e_m)| \leqslant c_{14}h_l,$$

从而由 (17.31), (17.32) 得到

$$\|V - \bar{v}\|_{\infty,\Omega h_l} \leqslant c_{15}h_l. \qquad (17.33)$$

下面来估计 $\|v - \bar{v}\|_{\infty,\bar{\Omega}_{h_l}}$。由引理 17.2 得到

$$\|v - \bar{v}\|_{\infty,\bar{\Omega}_{h_l}} \leqslant c_{16}h_l^2\|\bar{\Delta}_{h_l}v - \bar{\Delta}_{h_l}\bar{v}\|_{\infty,\Omega^*_{h_l}}. \qquad (17.34)$$

假设 $x \in \Omega^*_{h_l}$，例如是 (17.32) 中的情况，则有

$$\bar{\Delta}_{h_l}v(x) - \bar{\Delta}_{h_l}\bar{v}(x) = \frac{2}{h_l^2}\Big\{\frac{1}{1+a_1}(v(x+h_l e_1) - \bar{v}(x+h_l e_1)) + \frac{1}{1+a_2}(v(x+h_l e_2) - \bar{v}(x+h_l e_2)) + \Big(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\Big)V(x)\Big\}.$$

因为

$$|v(x+h_l e_m) - \bar{v}(x+h_l e_m)| \leqslant |v(x+h_l e_m) - v(x)| + |\bar{v}(x+h_l e_m) - \bar{v}(x)| + |V(x)| \leqslant c_{17}h_l,$$

所以

$$h^2\|\bar{\Delta}_{h_l}v - \bar{\Delta}_{h_l}\bar{v}\|_{\infty,\Omega^*_h} \leqslant c_{18}h_l,$$

代入 (17.34) 后就得到

$$\|v-\bar{v}\|_{\infty,\bar{\Omega}_{h_l}} \leqslant c_{19}h_l.$$

从而结合 (17.33) 得到

$$\|V-v\|_{\infty,\bar{\Omega}_{h_l}} \leqslant c_{20}h_l. \tag{17.35}$$

另一方面，在 Γ 上 $V=0$。设 x' 与 $\Omega^*_{h_l}$ 距离不超过 h_l，则

$$V(x') = O(h_l).$$

故由 (17.35) 得到 $|v(x')| = O(h_l)$. 若在 (17.28) 中令 $f \equiv 1$，则有 $w_l(x) = v(x)$，从而由 (17.29) 得到

$$v(x') = h_l^2 \sum_{y\in\Omega'_{h_l}} G_{h_l}(x', y) \leqslant c_{21}h_l. \tag{17.36}$$

最后，依次应用 (17.29)，(17.26) 和 (17.36) 得到

$$|w_l(x')| = h_l^2 \sum_{y\in\Omega'_{h_l}} G_{h_l}(x', y)f(y, U_l(y))$$

$$\leqslant c_{22}h_l^2 \sum_{y\in\Omega'_{h_l}} G_{h_l}(x', y) \leqslant c_{23}h_l,$$

所以当 $x\in\Omega^*_{h_l}$ 时，$\Delta_{h_l}w_l(x) = O\left(\frac{1}{h_l}\right)$.

现在仿照把 f 延拓为 F 的方法，把 $w_l(x)$ 延拓为分片常数函数 $W_l(x)$.

命题 17.4 当 $l\to\infty$ 时，$\|w_l - U_l\|_{L^2(\Omega)} \to 0$.

证明 我们有

$$\begin{cases} -\bar{\Delta}_{h_l}(w_l - u_l) = 0, & x\in\Omega'_{h_l}, \\ w_l - u_l = 0, & x\in\Gamma_{h_l}. \end{cases}$$

又当 $x\in\Omega^*_{h_l}$ 时，$-\bar{\Delta}_{h_l}u_l(x) = f(x, u_l(x))$. 它是有界的. 另一方面，由命题 17.3 得到，$-\bar{\Delta}_{h_l}w_l(x) = O(h_l^{-1})$，所以由引理 17.2 得到

$$\|W_l - U_l\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} = \|w_l - u_l\|_{\infty,\bar{\Omega}_{h_l}} = O(h_l),$$

由此即得所证的结论.

下面用 $G(x, y)$ 表示 $-\Delta$ 的 Green 函数，并记

$$W=\int_{\Omega}G(x,y)f(y,U(y))dy,$$

于是W是(17.12)的古典解(见 Sattinger (1973))。

命题 17.5 当 $l\to\infty$ 时，$\|W-W_l\|_{L^2(\Omega)}\to 0$。

证明 按照把 f 延拓为 F 的方法把 $G_{hl}(x,y)$ 延拓为分片常数函数 $\bar{G}_{hl}(x,y)$，于是

$$\begin{aligned}W_l(x)-W(x)&=\int_{\Omega}[\bar{G}_{hl}(x,y)F(y,U_l(y))\\&\quad-G(x,y)f(y,U(y))]dy\\&=E_1+E_2,\end{aligned}$$

其中

$$E_1=\int_{\Omega}\bar{G}_{hl}(x,y)(F(y,U_l(y))-f(y,U(y)))dy,$$

$$E_2=\int_{\Omega}(\bar{G}_{hl}(x,y)-G(x,y))f(y,U(y))dy.$$

不难证明

$$E_1\leqslant\|\bar{G}_{hl}\|_{L^2(\Omega)}\|F(\cdot,U_l)-f(\cdot,U)\|_{L^2(\Omega)},$$

从而由引理 4.30 和命题 17.2 可知，当 $l\to\infty$ 时，$E_1\to 0$。又可证明(见 Bramble (1969))，当 $l\to\infty$ 时，

$$\|\bar{G}_{hl}-G\|_{L^2(\Omega)}\to 0,$$

因此 $E_2\to 0$。

综合前面的命题，就得到了下面的结果。

定理 17.6 假设当 $l\to\infty$ 时，$h_l\to 0$，而 u_l 是(17.13)相应的解，并满足(17.26)。那末，可以利用双线性插值把 u_l 为连续函数 $U_l(x)$，使得它的任何一个收敛子列的极限函数 $U(x)$，都是(17.12)的古典解，并且 $\|U\|_{L^\infty(\bar{\Omega})}\leqslant c_{24}$。

Simpson (1972) 讨论了 $f(x,0)\geqslant 0$，$f'(x,V)>0$ 的情况，此时对 Ω 的要求较弱，但仍可得到与定理 17.5，17.6 相同的结果。

Guo Ben-yu (1983c) 还直接应用 §3.2 中的理论，研究(17.13)的收敛性。为方便计，假定 $\Omega=\{x/0<x_m<1,\ m=1,2\}$，

$$f(x,V)\in C^2(\bar{\Omega}\times\mathscr{R}),$$

并且对一切 x 和 V，$f'(x, V) > 0$。与 (17.12) 相应的特征值问题是

$$L'(W)V(x) = \begin{cases} -\Delta V(x) - \mu f'(x, W)V(x) = 0, & x \in \Omega, \\ V(x) = 0, & x \in \Gamma. \end{cases} \tag{17.37}$$

用 $\mu^{(l)}(W)$ 表示它的特征值。假定 $U \in C^4(\bar{\Omega})$ 是 (17.12) 的孤立解，则对一切 l，$\mu^{(l)}(U) \neq 1$。

设 $Jh = 1$，$\Omega_h = \{x/x_m = j_m h, 1 \leqslant j_m \leqslant J - 1, m = 1, 2\}$。与 (17.37) 相对应的离散问题是

$$L'_h(W)v = \begin{cases} -\Delta_h v(x) - \mu_h f'(x, W)v(x) = 0, & x \in \Omega_h, \\ v(x) = 0, & x \in \Gamma_h. \end{cases} \tag{17.38}$$

用 $\mu_h^{(l)}(W)$ 表示它的特征值. Simpson (1972) 推广了 Kuttler (1970) 的结果，得到 $|\mu_h^{(l)}(W) - \mu^{(l)}(W)| = O(h^2)$. 此外，因为 $f' > 0$，所以根据引理 17.2 的一个推广形式(见 Simpson (1972))，对一切 $\varphi(x)$，有

$$\|\varphi\|_{\infty,\bar{\Omega}_h} \leqslant c_{25}(U)(\min_l |1 - \mu_h^{(l)}(U)|)^{-1} \|L'_h(U)\varphi\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}. \tag{17.39}$$

为了应用 § 3.2 中的结果，定义

$\mathfrak{B}_1 = C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$，$\mathfrak{B}_2 = C(\bar{\Omega})$，$\mathfrak{B}_{1,h}$ 和 $\mathfrak{B}_{2,h}$ 都是定义在 $\bar{\Omega}_h$ 上的网格函数空间，其范数是

$$\|u\|_{1,h} = \max(\|u\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}, |u|_{1,\infty}, |u|_{2,\infty}), \quad \|g\|_{2,h} = \|g\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}.$$

又对一切 $x \in \Omega_h$，定义 $r_{1,h}U(x) = U(x)$，并用 $R_h(U)$ 表示格式 (17.13) 的逼近误差。

用 R 表示适当小的正数，则对一切 $v \in B_{1,h}(U, R)$，

$$(\min_l |1 - \mu_h^{(l)}(v)|)^{-1} \leqslant c_{26}(U),$$

从而由 (17.39) 得到

$$\|\varphi\|_{\infty,\bar{\Omega}_h} \leqslant c_{25}(U)c_{26}(U)\|L'_h(v)\varphi\|_{2,h},$$

并由此推得

$$\|\Delta_h\varphi\|_{2,h} \leqslant c_{27}(U)\|L'_h(v)\varphi\|_{2,h}.$$

可应用离散 Green 函数证明

$$|\varphi|_{1,\infty} \leqslant c_{28}(U)\|\Delta_h\varphi\|_{1,h},$$

所以

$$\|\varphi\|_{1,h} \leqslant \frac{c_{29}(U)}{h}\|L_h'(v)\varphi\|_{2,h},$$

从而 $\|(L_h'(v))^{-1}\| \leqslant \dfrac{c_{29}(U)}{h}$, 并根据定理 3.13, L_h 在 $B_{1,h}(U,R)$ 内对 U 是一致广义弱稳定的，且

$$\bar{M}(U,\ h) = \frac{c_{29}(U)}{h}.$$

因为 $\|R_h(U)\|_{2,h} = O(h^2)$, 故对一切适当小的 h,

$$\|R_h(U)\|_{2,h} < r_0(h) = \frac{Rh}{c_{29}(U)},$$

因此，根据定理 3.14 和定理 3.15，(17.13) 在 $B_{1,h}(U,\ R)$ 内有唯一解 u.

若把上面的方法应用于一维问题，则可得到

$$\|u - U\|_{1,h} = O(h^2).$$

这方法尚可应用于更一般的问题.

17.3 半线性方程的分歧点

关于半线性方程分歧点的计算，主要有两个途径，第一个途径是利用线性主部的 Green 函数，把原问题化为全连续算子方程的分歧点问题，然后用 § 4.3 中的方法来处理. 第二个途径是直接应用差分格式来研究.

假设 Ω 是二维空间中的有界开域，其边界适当光滑，

$$f(x,\ V) \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathscr{R}),$$

并考虑下列问题的正值解

$$\begin{cases} -\Delta U(x,\ \lambda) - \lambda f(x,\ U(x,\ \lambda)) = 0, & x \in \Omega, \\ U(x,\lambda) = 0, & x \in \Gamma. \end{cases} \quad (17.40)$$

(17.40) 的正值解的存在性和唯一性与 $f(x,\ V)$ 的性质和 λ 的值有关. Simpson, Cohen (1970) 证明，若 f 是关于 V 的凹函

数，则对某个范围内的λ，(17.40)有唯一的正值解．如果f是关于V的凸函数，$f(x,0)>0$，则存在$\bar{\lambda}<\infty$，使得当$0<\lambda\leqslant\bar{\lambda}$时，(17.40)存在正值解，但可能不唯一(见 Keller, Cohen (1967), Laetsch (1969))．如果f既非凸函数，也非凹函数，那末可能有无穷多个解(见 Krasnosel'skii, Stechenko (1966))．

下面假定$f(x,0)>0$，并对一切$x\in\bar{\Omega}$和$V\in\mathscr{R}$，

$$f'(x,V)=\frac{\partial f(x,V)}{\partial V}>0,$$

从而与(17.40)相对应的线性问题

$$\begin{cases}-\Delta V(x)-\gamma f'(x,U(x,\lambda))V(x)=0, & x\in\Omega,\\ V(x)=0, & x\in\Gamma,\end{cases}\quad(17.41)$$

有从小到大排列的正的特征值$\gamma^{(l)}(U(x,\lambda))$．若$\lambda\neq\gamma^{(l)}(U(x,\lambda))$，则$U(x,\lambda)$是(17.40)的孤立解．由于$f\in C^2(\bar{\Omega}\times\mathscr{R})$，因此它还是稳定解．

$U(x,\lambda)$与λ的依赖关系还可用图来表示．通常选择一点x'，然后用$\lambda(x',U)$表示λ与$U(x',\lambda)$之间的关系．为书写简便计，一般简记为$\lambda(U)$．例如当$f(U)=e^U$或

$$f(U)=[1+(b_1U)^2]U+b_2$$

时，$\lambda(U)$的图形就如图17.2所示．显然存在$\bar{\lambda}=\bar{\lambda}(x')$，当

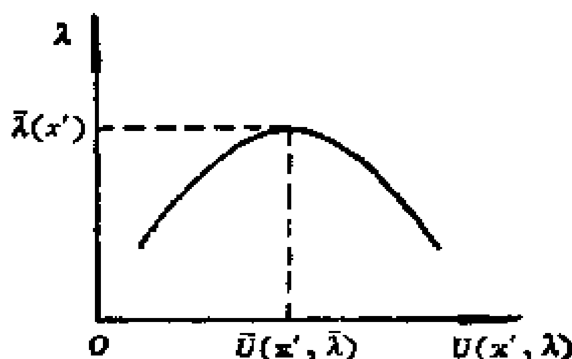


图 17.2

$\lambda<\bar{\lambda}$时，至少有两个正值的分枝解；当$\lambda=\bar{\lambda}$时，两个分枝合而为一；当$\lambda>\bar{\lambda}$时，则不再有正值解．(可见 Keller, Cohen (1967), Joseph, Sparrow (1970))．

下面来计算$\bar{\lambda}$的值，我们假定下列条件满足：

(i) 当 $\bar{\lambda}-a_1<\lambda<\bar{\lambda}$, $a_1>0$ 时，(17.40) 至少存在两个正值解 $U_1(x,\lambda)$ 和 $U_2(x,\lambda)$，并对一切 $x\in\Omega$,

$$U_1(x,\lambda)<U_2(x,\lambda).$$

(ii) 对于固定的 $x\in\Omega$, $U_1(x,\lambda)$ 是λ的增函数，而 $U_2(x,\lambda)$ 是λ的减函数.

(iii) $\lim\limits_{\lambda\to\bar{\lambda}}U_l(x,\lambda)=\bar{U}(x,\bar{\lambda})$, $\quad l=1,2$.

(iv) 当 $\bar{\lambda}<\lambda\leqslant\bar{\lambda}+a_2$, $a_2>0$ 时，(17.40) 没有正值解 $U(x,\lambda)$，使得

$$\max_x U(x,\lambda)<\max_x U_2(x,\bar{\lambda}-a_1)=M.$$

(v) 当 $\bar{\lambda}-a_1<\lambda<\bar{\lambda}$ 时，

$$\gamma^{(1)}(U_2(x,\lambda))<\lambda<\bar{\lambda}<\gamma^{(1)}(U_1(x,\lambda)).$$

许多实际问题都满足上述条件，例如 Keller, Cohen (1967) 所讨论的问题的最小正值解 $U_1(x,\lambda)$ 就满足前面条件. 关于 $U_2(x,\lambda)$ 的性质，则所知不多，但对某些特殊情况，则也满足上述条件，可见 Joseph (1965), Keller (1969b), Joseph, Sparrow (1970) 的文章.

假设 Ω_h, Ω_h^* 和 Γ_h 如前节，Δ_h 表示 Shortley-Weller 算子，并用下列格式计算 (17.40),

$$\begin{cases}-\Delta_h u(x,\lambda)-\lambda f(x,u(x,\lambda))=0, & x\in\Omega_h,\\ u(x,\lambda)=0, & x\in\Gamma_h.\end{cases}\tag{17.42}$$

用 $\lambda_h(u)=\lambda_h(x',u)$ 表示 $u(x',\lambda)$ 对λ的依赖关系. 根据前节的结果，$\lambda_h(u)$ 也有一个极大值 $\bar{\lambda}_h=\bar{\lambda}_h(x')$，使得当 h 充分小而 $\lambda<\bar{\lambda}_h$ 时，(17.42) 至少有两个正值解，当 $\lambda=\bar{\lambda}_h$ 时，各个分枝解合而为一；而当 $\lambda>\bar{\lambda}_h$ 时，(17.42) 没有正值解. 为简单计，把 $U(x',\bar{\lambda})$, $u(x',\bar{\lambda}_h)$ 简记为 $\bar{U}$ 和 $\bar{u}$.

Simpson (1972) 得到了下列结果：

定理 17.7 假设 $\lambda(U)$ 和 $\lambda_h(u)$ 是三次可微函数，

$$\frac{d^2\lambda}{dU^2}(\bar{U}) < 0,$$

那末

$$|\bar{U} - \bar{u}| = O(h^{\frac{6}{7}}), \tag{17.43}$$

$$|\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_h| = O(h^{\frac{4}{3}-\varepsilon}), \tag{17.44}$$

其中 ε 是任意正数.

证明 对于 $U \in [U_1(x', \bar{\lambda} - a_1), U_2(x', \bar{\lambda} - a_1)]$, $\lambda(U)$ 是有定义的(见图 17.3). 曲线 $\lambda(U)$ 有极大点 $(\bar{U}, \bar{\lambda})$. 设 q 是待定正常数, $\lambda_k = \bar{\lambda} - kh^q$, $k = 1, 2, 3$, 则

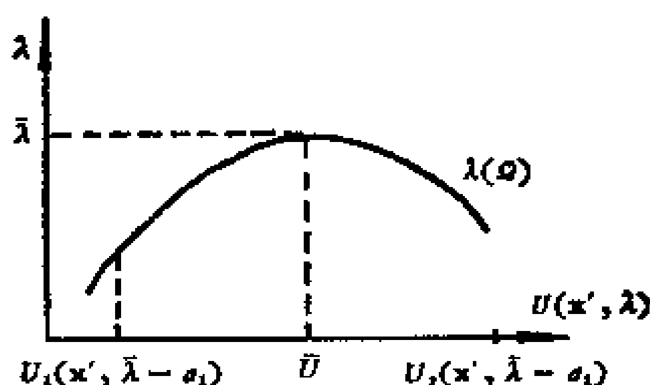


图 17.3

$$-kh^q = \lambda_k - \bar{\lambda} = \frac{1}{2}\frac{d^2\lambda}{dU^2}(\bar{U})(U_1(x', \lambda_k) - \bar{U})^2 + \cdots.$$

因为 $\frac{d^2\lambda}{dU^2}(\bar{U}) < 0$, 所以有

$$O(h^{\frac{q}{2}}) = U_1(x', \lambda_k) - \bar{U} \neq o(h^{\frac{q}{2}}), \tag{17.45}$$

和

$$O(h^{\frac{q}{2}}) = U_1(x', \lambda_k) - U_1(x', \lambda_j) \neq o(h^{\frac{q}{2}}),\ j \neq k. \tag{17.46}$$

又由条件 (v), $\gamma^{(1)}(U_1(x, \lambda_k)) > \bar{\lambda}$, 因此

$$\gamma^{(1)}(U_1(x, \lambda_k)) - \lambda_k \neq o(h^q).$$

现在考察一个辅助问题

$$-\Delta W(x, \mu(h)) - \mu(h) f(x, W(x, \mu(h))) = 0,\quad x \in \Omega,$$
$$W(x, \mu(h)) = 0,\quad x \in \Gamma, \tag{17.47}$$

以及相应的差分格式

$$\begin{cases}-\bar{\Delta}_h w(x,\mu(h))-\mu(h)f(x,w(x,\mu(h)))=0 & x\in\Omega_h,\\ w(x,\mu(h))=0, & x\in\Gamma_h.\end{cases}\tag{17.48}$$

又假定 $\sigma^{(l)}(h)$ 和 $\sigma_h^{(l)}(h)$ 分别是下列问题

$$\begin{cases}-\Delta V-\sigma(h)f'(x,W(x,\mu(h)))V=0, & x\in\Omega,\\ V=0, & x\in\Gamma,\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}-\Delta v-\sigma_h(h)f'(x,W(x,\mu(h)))v=0, & x\in\Omega_h\\ v=0, & x\in\Gamma_h,\end{cases}$$

的特征值.

引理 17.3 如果对一切 l, $|\sigma_h^{(l)}(h)-\sigma^{(l)}(h)|=O(h^2)$, 并且

$$|\mu(h)-\sigma^{(l)}(h)|\geqslant O(h^{1-\varepsilon}),\quad |\varepsilon|<1,\tag{17.49}$$

那末存在 (17.48) 的解 w, 使得

$$\|W-w\|_{\infty,\bar{\Omega}_h}=O(h^{1+\varepsilon}).\tag{17.50}$$

证明 证明的过程与证明定理 17.5 的过程相仿，但要用到一个与引理 17.2 相类似而稍加推广的结果，而这又要用到一个与引理 17.1 相类似的结论. 由 (17.49), 此时 (17.17) 中的 c_2 应改为 $c_2h^{\varepsilon-1}$, 从而引理 17.2 中的 c_3 应改为 $c_3h^{\varepsilon-1}$, 这样就得到了 (17.50).

现在在引理 17.3 中令 $\mu(h)=\lambda_k$,

$$\sigma^{(l)}(h)=\gamma^{(l)}(U_1(x,\lambda_k)),\ W=U_1(x,\lambda_k),$$

$$w=u_1(x,\lambda_k),\ 0<q<2,\ \varepsilon=1-q,$$

于是 (17.42) 至少存在一个解，记为 $u_1(x,\lambda_k)$, 使得对一切 $x\in\Omega_h$,

$$|U_1(x,\lambda_k)-u_1(x,\lambda_k)|=O(h^{2-q}).\tag{17.51}$$

我们利用插值方法分别用点 $(U_1(x',\lambda_k),\lambda_k)$ 和 $(u_1(x',\lambda_k),\lambda_k)$ 构造二次曲线 $p(U)$ 和 $p_h(U)$, 其中

$$p(U) = a(h)(U - U_1(x', \lambda_1))(U - U_1(x', \lambda_2)) + b(h)(U - U_1(x', \lambda_1)) + U_1(x', \lambda_1),$$

$$p_h(U) = A(h)(U - u_1(x', \lambda_1))(U - u_1(x', \lambda_2)) + B(h)(U - u_1(x', \lambda_1)) + u_1(x', \lambda_1),$$

其中

$$b(h) = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{U_1(x', \lambda_2) - U_1(x', \lambda_1)},$$

$$B(h) = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{u_1(x', \lambda_2) - u_1(x', \lambda_1)},$$

$a(h)$ 和 $A(h)$ 则分别是 $p(U)$ 和 $p_h(U)$ 对 $U_1(x', \lambda_k)$ 和 $u_1(x', \lambda_k)$ 的二阶差商. 令

$$W(h) = \frac{U_1(x', \lambda_1) + U_1(x', \lambda_2)}{2} - \frac{b(h)}{2a(h)},$$

$$w(h) = \frac{u_1(x', \lambda_1) + u_1(x', \lambda_2)}{2} - \frac{B(h)}{2A(h)},$$

则 $W(h)$ 和 $w(h)$ 分别是 $p(U)$ 和 $p_h(U)$ 的极点. 下面的三个命题分别估计了 $W(h)$, $w(h)$, $\bar{U}$ 和 $\bar{u}$ 之间的距离.

命题 17.6 $W(h) - \bar{U} = O(h^{\frac{3q}{4}})$.

证明 由插值理论知

$$\lambda(U) - p(U) = \frac{1}{3!} \frac{d^3\lambda}{dU^3}(\xi) \prod_{k=1}^{3} (U - U_1(x', \lambda_k)),$$

于是由 (17.45) 得到

$$|\lambda(U) - p(U)| \leqslant O((|U - \bar{U}| + h^{\frac{q}{2}})^3), \tag{17.52}$$

因此

$$p(\bar{U}) \geqslant \lambda - O(h^{\frac{3q}{2}}).$$

但 $p(U)$ 只有一个极大点 $W(h)$, 所以

$$p(W(h)) \geqslant p(\bar{U}) \geqslant \bar{\lambda} - O(h^{\frac{3q}{2}}). \tag{17.53}$$

如果命题的结论不真, 例如说

$$W(h) - \bar{U} = O(h^{\frac{r}{2}}),$$

其中，

$$r < \frac{3q}{2}.$$

由于

$$\frac{d^2\lambda}{dU^2}(\overline{U}) < 0,$$

我们有

$$\lambda(W(h)) < \lambda - O(h^r),$$

从而由 (17.52) 得到

$$p(W(h)) \leqslant \lambda(W(h)) + O((|W(h) - \overline{U}| + h^{\frac{q}{2}})^3) < \lambda - O(h^r),$$

而这是与 (17.53) 矛盾的。

命题 17.7 若 $q < \frac{4}{3}$，则 $W(h) - w(h) = O(h^{2-q})$.

证明 经计算得到

$$W(h) - w(h) = \frac{1}{2}(U_1(x', \lambda_1) + U_1(x', \lambda_2) - u_1(x', \lambda_1) - u_1(x', \lambda_2)) + \frac{1}{2}\left(\frac{B(h)}{A(h)} - \frac{b(h)}{a(h)}\right). \tag{17.54}$$

由 (17.51)

$$U_1(x', \lambda_1) + U_1(x', \lambda_2) - u_1(x', \lambda_1) - u_1(x', \lambda_2) = O(h^{2-q}). \tag{17.55}$$

又由 (17.46), (17.51) 得到

$$O(h^{\frac{q}{2}}) = u_1(x', \lambda_k) - u_1(x', \lambda_i) \neq o(h^{\frac{q}{2}} + h^{2-q}), \ i \neq k. \tag{17.56}$$

因为

$$B(h) = b(h)\frac{(U_1(x', \lambda_2) - U_1(x', \lambda_1))}{(u_1(x', \lambda_2) - u_1(x', \lambda_1))} = b(h)\left\{1 + \frac{U_1(x', \lambda_2) - u_1(x', \lambda_2) + u_1(x', \lambda_1) - U_1(x', \lambda_1)}{u_1(x', \lambda_2) - u_1(x', \lambda_1)}\right\},$$

所以当 $q<\frac{4}{3}$ 时，由 (17.55)，(17.56) 得到

$$B(h)=b(h)(1+O(h^{2-\frac{3q}{2}})).$$

类似地有

$$A(h)=a(h)(1+O(h^{2-\frac{3q}{2}})).$$

因为 $a(h)$ 趋向于 $\frac{d^2\lambda}{dU^2}(\overline{U})\neq 0$，所以

$$E=\frac{B(h)}{A(h)}-\frac{b(h)}{a(h)}=\frac{b(h)}{a(h)}O(h^{2-\frac{3q}{2}}).$$

又由 (17.46) 得到

$$b(h)=O(h^{\frac{q}{2}}),$$

因此 $E=O(h^{2-q})$。把它和 (17.55) 式代入 (17.54)，就得到了命题的结论。

命题 17.8 若 $q<\frac{4}{3}$，则 $w(h)-\bar{u}=O(h^{\frac{3q}{4}})$。

证明 我们有

$$\lambda_h(U)-p_h(U)=\frac{1}{3!}\frac{d^3\lambda_h}{dU^3}(\eta)\prod_{k=1}^{3}(U-u_1(x',\lambda_k)).$$

于是，由命题 17.6，17.7 和 (17.45)，(17.51) 得到

$$\begin{aligned}u_1(x',\lambda_k)-w(h)&=(u_1(x',\lambda_k)-U_1(x',\lambda_k))\\&\quad+(U_1(x',\lambda_k)-\overline{U})+(\overline{U}-W(h))\\&\quad+(W(h)-w(h))=O(h^{\frac{q}{2}}),\\&\qquad k=1,2,3,\end{aligned}$$

所以

$$\lambda_h(w(h))-p_h(w(h))=O(h^{\frac{3q}{2}}). \tag{17.57}$$

记

$$w^+(h)=w(h)+h^{\frac{q}{2}},\quad w^-(h)=w(h)-h^{\frac{q}{2}}.$$

由于当 h 充分小时，$A(h)\neq 0$，所以

$$O(h^q) = |p_h(w^{\pm}(h)) - p_h(w(h))| \neq o(h^q).$$

另一方面，又不难验证

$$|\lambda_h(w^{\pm}(h)) - p_h(w^{\pm}(h))| = O(h^{\frac{3q}{2}}).$$

所以由

$$p_h(w^{\pm}(h)) < p_h(w(h))$$

得到

$$\lambda_h(w^{\pm}(h)) < \lambda_h(w(h)).$$

它表示在区间 $\{U / w^-(h) \leqslant U \leqslant w^+(h)\}$ 中，曲线 $\lambda_h(U)$ 有一个极大点，所以 $\bar{u}$ 一定在这个区间内，从而

$$w(h) - \bar{u} = O(h^{\frac{q}{2}}).$$

假定 U 的变化满足

$$O(h^{\frac{q}{2}}) = U - w(h) \neq O(h^{\frac{3q}{4}}),$$

例如设

$$U - w(h) = O(h^{\frac{r}{2}}),\ r < \frac{3q}{2},$$

那末，$p_h(w(h)) > p_h(U) - O(h^r)$. 又由于 (17.57) 和

$$p_h(U) - \lambda_h(U) = O(h^{\frac{3q}{2}}),$$

故 $\lambda_h(U) < \lambda_h(w(h))$. 这表示 U 不可能是 $\lambda_h(U)$ 的极大点 $\bar{u}$，因此 $w(h) - \bar{u} = O(h^{\frac{3q}{4}})$，这就完成了命题的证明.

下面来完成定理 17.7 的证明. 首先由命题 17.6—17.8 得到

$$\begin{aligned} \bar{U} - \bar{u} &= \bar{U} - W(h) + W(h) - w(h) + w(h) - \bar{u} \\ &= O(h^{\frac{3q}{4}} + h^{2-q}). \end{aligned} \qquad (17.58)$$

取 $q = \frac{8}{7}$，就得到了 (17.43). 其次有

$$\begin{aligned} |\lambda - \lambda_h| &= |\bar{\lambda} - \lambda_1| + |\bar{\lambda}_h - \lambda_1| \\ &\leqslant O(h^q) + |\lambda_h(x', \bar{u}) - \lambda_h(x', u_1(x', \lambda_1))| \\ &\leqslant O(h^q + |\bar{u} - u_1(x', \lambda_1)|^2). \end{aligned}$$

由 (17.58), (17.45) 和 (17.51) 得到

$$\tilde{u} - u_1(x', \lambda_1) = \tilde{u} - \tilde{U} + \tilde{U} - U_1(x', \lambda_1) + U_1(x', \lambda_1) - u_1(x', \lambda_1) = O(h^{\frac{q}{2}} + h^{2-q}),$$

因此

$$|\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_h| = O(h^q + h^{4-2q}).$$

取 $q = \frac{4}{3} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, 就得到了(17.44).

例 17.1 设 $n = 2$, $f(U) = e^U$, Ω 是单位圆, Гельфанд (1959), Fujita (1969) 证明了(17.40)的解的存在性. 对于一般的 Ω, 尚不知道解存在与否,但是 Keller, Cohen (1967)证明,如果(17.40)有解,那末它的最小正值解是稳定的,而其余的解都不稳定. Rosen (1970) 设计了一种算法,但似乎只宜于稳定解的计算. Simpson (1972) 则在单位正方形的区域中计算了这个问题,数值结果显示出确实存在 $\bar{\lambda}_h$.

关于计算简单分歧点的有限元方法, 可见 Brezzi, Rappaz, Raviart (1981) 的文章.

17.4 生物数学中的离散模式

正如 § 12.2 中所指出的那样, 有时需要研究半线性椭圆型差分格式的解的性质. 假设 Ω, Ω_h, f, g 和 ν 如 § 12.2 中所示, 但 g 不一定满足条件(12.8). 我们考虑下列问题

$$\begin{cases} -\nu\Delta U(x) - f(U(x)) = 0, & x \in \Omega, \\ U(x) = 0, & x \in \Gamma, \end{cases} \tag{17.59}$$

及相应的差分格式

$$\begin{cases} -\nu\Delta_h u(x) - f(u(x)) = 0, & x \in \Omega_h, \\ u(x) = 0, & x \in \Gamma_h. \end{cases} \tag{17.60}$$

我们用 Guo Ben-yu, Chen Sui-yang (1986) 的方法来分析解的性质. 关于(17.60)的上解,正规上解, 严格上解和下解, 正规下解,严格下解的定义同 § 12.2.

设 $D_h \subseteq \Omega_h$ 是连通网格区域，其边界记为 Γ_{D_h}. $G_h(x, y, D_h)$ 是离散 Green 函数，它满足

$$\begin{cases} -\Delta_h G_h(x, y, D_h) = \delta(x, y), & x \in D_h, \quad y \in \overline{D}_h, \\ G_h(x, y, D_h) = \delta(x, y), & x \in \Gamma_{D_h}, \quad y \in \overline{D}_h. \end{cases}$$

于是 $G_h(x, y, D_h) > 0$，并对于一切函数 $v(x)$ 和 $x \in \overline{D}_h$，有

$$v(x) = -h^n \sum_{y \in D_h} G_h(x, y, D_h) \Delta_h v(y)$$

$$+ \sum_{y \in \Gamma_{D_h}} G_h(x, y, D_h) v(y).$$

应用上式，不难得到下面的结果.

引理 17.4 假设 $D_h \subseteq \Omega_h$ 是连通的，并且

$$\begin{cases} -\Delta_h v(x) \leqslant -\Delta_h w(x), & x \in D_h, \\ v(x) \leqslant w(x), & x \in \Gamma_{D_h}, \end{cases}$$

则对一切 $x \in \overline{D}_h$, $v(x) \leqslant w(x)$. 又若至少存在一点 $x' \in \overline{D}_h$，使得

$$-\Delta_h v(x') < -\Delta_h w(x'), \quad 若\ x' \in D_h,$$

或者

$$v(x') < w(x'), \quad 若\ x' \in \Gamma_{D_h}.$$

那末，对一切 $x \in D_h$, $v(x) < w(x)$.

用 $G_h(x, y)$ 简记 $G_h(x, y, \Omega_h)$. G_h 表示线性算子，

$$G_h v(x) = h^n \sum_{y \in \Omega_h} G_h(x, y) v(y).$$

可以证明，存在与 h 无关的正常数 c_1，使得

$$\|G_h\| \leqslant c_1. \tag{17.61}$$

又记 $T_h = \frac{1}{\nu} G_h \cdot f$，那末 (12.60) 等价于下列算子方程

$$v = T_h v. \tag{17.62}$$

用 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 表示两个连续函数，并对一切 $x \in \overline{\Omega}_h$ 和

$$\varphi(x) \leqslant \psi(x),$$

定义

$$f(\varphi, \phi, \sigma)(v(x)) = \begin{cases} \sigma f(\phi(x)), & 若\ v(x) > \phi(x), \\ f(v(x)), & 若\ \varphi(x) \leqslant v(x) \leqslant \phi(x), \\ \sigma f(\varphi(x)), & 若\ v(x) < \varphi(x), \end{cases}$$

$$T_h(\varphi, \phi, \sigma) = \frac{1}{\nu} G_h \cdot f(\varphi, \phi, \sigma).$$

显然，$T_h(\varphi, \phi, \sigma)$ 是一个连续算子，又用 $\bar{K}(\varphi, \phi)$ 表示闭锥

$$E\{w(x)/\varphi(x) \leqslant W(x) \leqslant \phi(x),\ \forall x \in \bar{\Omega}_h\},$$

其内部记为 $K(\varphi, \phi)$，它是一个开集．于是，$T_h(\varphi, \phi, 1)$ 在 $\bar{K}(\varphi, \phi)$ 中的不动点一定是(17.60)在 $\bar{K}(\varphi, \phi)$ 中的解．

定理 17.8 假设 $\varphi(x)$ 和 $\phi(x)$ 分别是(17.60)的严格下解和严格上解，$\varphi(x) \leqslant \phi(x)$，那末，$T_h$ 在 $K(\varphi, \phi)$ 中至少有一个不动点．

证明 首先证明，在 $\bar{K}(\varphi, \phi)$ 上，$T_h = T_h(\varphi, \phi, 1)$．事实上，对一切 $v \in \bar{K}(\varphi, \phi)$ 和 $x \in \bar{\Omega}_h$，都有

$$\varphi(x) \leqslant v(x) \leqslant \phi(x),$$

因此

$$T_h(\varphi, \phi, 1)v = \frac{1}{\nu} G_h \cdot f(\varphi, \phi, 1)(v)$$

$$= \frac{1}{\nu} G_h \cdot f(v) = T_h v.$$

其次证明，$T_h(\varphi, \phi, 1)$ 的全部不动点都在 $K(\varphi, \phi)$ 之中．为此，记

$$D_h^- = \{x \in \bar{\Omega}_h / v(x) < \varphi(x)\},$$

$$D_h^+ = \{x \in \bar{\Omega}_h / v(x) > \phi(x)\}.$$

不妨假设 D_h^- 和 D_h^+ 是连通的．若 v 是 $T_h(\varphi, \phi, 1)$ 的不动点，则对一切 $x \in D_h^-$，

$$-\nu\Delta_h v(x) = f(\varphi, \phi, 1)v(x) = f(\varphi(x)) \geqslant -\nu\Delta_h\varphi(x).$$

另一方面，在 $\Gamma_{D_h^-}$ 上，$\varphi(x) \leqslant v(x)$，所以，根据引理 17.4，对一切 $x \in D_h^-$，$\varphi(x) \leqslant v(x)$，而这是与 D_h^- 的定义相矛盾的，因此 D_h^- 是空集，类似地可证明，D_h^+ 也是空集．所以 $U \in \bar{K}(\varphi, \phi)$．尚

可进一步证明 $U \in K(\varphi, \psi)$.

现在来证明,存在一个正常数 r, 使得 $T_h(\varphi, \psi, \sigma)$ 的所有不动点都在球 $B(0, r)$ 之中,其中

$$B(0, r) = \{w / \|w\|_\infty < r\}.$$

事实上,若 v 为 $T_h(\varphi, \psi, \sigma)$ 的不动点,则由 (17.61) 得到

$$\|v\|_\infty = \|T_h(\varphi, \psi, \sigma)v\|_\infty \leqslant \frac{c_1}{\nu} \|f(\varphi, \psi, \sigma)v\|_\infty$$

$$\leqslant \frac{c_1}{\nu} \max\{ \max_{x \in \bar{D}_h} |\sigma f(\varphi(x))|, \max_{x \in \bar{D}_h} |\sigma f(\psi(x))|,$$

$$\max_{\substack{\varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x) \\ x \in \bar{D}_h}} |\sigma f(y)| \},$$

所以, 存在正数 r, 使得 $T_h(\varphi, \psi, \sigma)$的全部不动点都在 $B(0, r)$ 中.

最后,由代数拓扑度的理论得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Deg}(I - T_h(\varphi, \psi, 1), B(0, r), 0) &= \mathrm{Deg}(I \\ &\quad - T_h(\varphi, \psi, 0), B(0, r), 0) \\ &= \mathrm{Deg}(I, B(0, r), 0) = 1,\end{aligned}$$

所以 $T_h(\varphi, \psi, 1)$ 在 $K(\varphi, \psi)$ 中至少有一个不动点.

综合上面的结果,就完成了定理的证明.

定理 17.9 假设存在 (17.60) 的严格下解 $\varphi^{(1)}(x)$, $\varphi^{(2)}(x)$ 和严格上解 $\psi^{(1)}(x)$, $\psi^{(2)}(x)$, 并满足下列条件:

(i) $\varphi^{(1)}(x) \leqslant \varphi^{(2)}(x)$, $\varphi^{(1)}(x) \leqslant \psi^{(1)}(x)$, $\varphi^{(2)}(x) \leqslant \psi^{(2)}(x)$,

$$\psi^{(1)}(x) \leqslant \psi^{(2)}(x),$$

(ii) $\bar{K}_1 \cap \bar{K}_2$ 是空集,其中 $\bar{K}_l = \bar{K}(\varphi^{(l)}, \psi^{(l)})$, 且记

$$\bar{K} = \bar{K}(\varphi^{(1)}, \psi^{(2)}),$$

那末, T_h 至少有三个不动点 $v^{(l)}$, $l = 1, 2, 3$, 其中 $v^{(1)} \in K_1$,

$$v^{(2)} \in K_2, \quad v^{(3)} \in K / \overline{(K_1 \cup K_2)}.$$

证明 根据定理 17.8, 存在下列三个算子

$$T_h(K_1) = T_h(\varphi^{(1)}, \psi^{(1)}, 1), \quad T_h(K_2) = T_h(\varphi^{(2)}, \psi^{(2)}, 1),$$

$$T_h(K) = T_h(\varphi^{(1)}, \psi^{(2)}, 1),$$

使得

$$\operatorname{Deg}(I - T_h(K), B(\theta, r), 0) = \operatorname{Deg}(I - T_h(K_1), B(0, r), 0)$$
$$= \operatorname{Deg}(I - T_h(K_2), B(0, r), 0) = 1. \tag{17.63}$$

因为 $T_h(K)$ 的所有不动点都在 K 中，所以在闭集 $\bar{B}(0, r)/K$ 中没有 $T_h(K)$ 的不动点。又由于

$$B(0, r)/(\bar{B}(0, r)/K) = B(0, r)\cap K,$$

所以

$$\operatorname{Deg}(I - T_h(K), B(0, r), 0)$$
$$= \operatorname{Deg}(I - T_h(K), B(0, r)\cap K, 0).$$

如果在 $K/(K_1\cup K_2)$ 中没有 $T_h(K)$ 的不动点，那末

$$\operatorname{Deg}(I - T_h(K), B(0, r), 0) = \operatorname{Deg}(I - T_h(K), B(0, r)\cap K_1, 0) + \operatorname{Deg}(I - T_h(K), B(0, r)\cap K_2, 0). \tag{17.64}$$

可以证明，在 K_1 上，$T_h(K) = T(K_1)$. 事实上，若 $v\in K_1$, $x\in \bar{Q}_h$, 那末

$$\varphi^{(1)}(x) \leqslant v(x) \leqslant \psi^{(1)}(x),$$

所以

$$T_h(K_1)v = \frac{1}{\nu} G_h \cdot f(\varphi^{(1)}, \psi^{(1)}, 1)v$$
$$= \frac{1}{\nu} G_h \cdot f(v) = T_h(K)v,$$

故在 K_1 上，$T_h(K) = T_h(K_1)$. 类似地，在 K_2 上

$$T_h(K) = T_h(K_2).$$

最后，由 (17.64) 得到

$$\operatorname{Deg}(I - T_h(K), B(\theta, r), 0) = \operatorname{Deg}(I - T_h(K_1), B(0, r)\cap K_1, 0) + \operatorname{Deg}(I - T_h(K_2), B(0, r)\cap K_2, 0) = \operatorname{Deg}(I - T_h(K_1), B(0, r), 0) + \operatorname{Deg}(I - T_h(K_2), B(0, r), 0),$$

但这与 (17.63) 相矛盾. 所以在 $K/(K_1\cup K_2)$ 中，$T_h(K)$ 至少

有一个不动点．因为在K上，$T_h = T_h(K)$，所以在$K/(K_1 \cup K_2)$中，T_h也至少有一个不动点$v^{(3)}$。

因为在$\bar{K}_1$上，$T_h(K) = T_h(K_1)$，所以，若$v^{(3)} \in K \cap \bar{K}_1$，则$v^{(3)}$也是$T_h(K_1)$在$\bar{K}_1$中的不动点，从而$v^{(3)} \in K_1$，但这与

$$v^{(3)} \in K/(K_1 \cup K_2)$$

相矛盾，所以$v^{(3)} \bar{\in} K_1$．类似地，$v^{(3)} \bar{\in} K_2$．这就完成了定理的证明。

对某些特殊情况，还可以得到不动点的确切个数．下面假定$g(0) \geqslant 0$，且满足条件(12.8)，又存在正常数

$$p_0 \leqslant p_1, \quad f(p_1) \leqslant 0.$$

引理 17.5 假设Λ是$\mathscr{R}^1$中的一个区间，函数族$\{\varphi_\alpha(x)/0 < \varphi_\alpha(x) \leqslant p_0,\ \alpha \in \Lambda\}$是关于$\alpha$连续且严格增加的，记

$$\underline{\mathscr{N}}_\alpha = \{\varphi/\varphi \leqslant \varphi_\alpha\}, \quad \underline{\mathscr{N}} = \bigcap_\alpha \underline{\mathscr{N}}_\alpha,$$

$$\bar{\mathscr{N}}_\alpha = \{\varphi/\varphi \geqslant \varphi_\alpha\}, \quad \bar{\mathscr{N}} = \bigcap_\alpha \bar{\mathscr{N}}_\alpha,$$

那末，(i) 若φ_α是(17.60)的严格上解，且(17.60)的解$u \in \underline{\mathscr{N}}_{\alpha_0}$，则$u \in \underline{\mathscr{N}}$，(ii) 若$\varphi_\alpha$是(17.60)的严格下解，且(17.60)的解$u \in \bar{\mathscr{N}}_{\alpha_0}$，则$u \in \bar{\mathscr{N}}$．

证明 只证明结论(i)．假设(17.60)的解$u \in \underline{\mathscr{N}}_{\alpha_0}$，而$u \bar{\in} \underline{\mathscr{N}}$，则存在$\alpha_1 \in \Lambda$，$\alpha_1 < \alpha_0$，以及点$x' \in \Omega_h$，使得

$$u(x) \leqslant \varphi_{\alpha_0}(x),$$

而$u(x') > \varphi_{\alpha_1}(x')$．记

$$\tilde{\alpha} = \inf\{\alpha/u \leqslant \varphi_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}.$$

由于φ_α关于α是连续的，因此存在$x'' \in \Omega_h$，使得$u(x) \leqslant \varphi_{\tilde{\alpha}}(x)$，而$u(x'') = \varphi_{\tilde{\alpha}}(x'')$．

设τ适当小，并用$\eta^k(x)$和$\xi^k(x)$分别表示下列两个方程的解，

$$\begin{cases} \eta_t^k(x) = \nu \Delta_h \eta^k(x) + f(\eta(x)), & x \in \Omega_h,\ k \geqslant 0, \\ \eta^k(x) = 0, & x \in \Omega_h,\ k \geqslant 0, \\ \eta^0(x) = u(x), & x \in \bar{\Omega}_h, \end{cases} \tag{17.65}$$

$$\begin{cases}\xi_t^k(x) = \nu\Delta_h\xi^k(x) + f(\xi(x)), & x \in \Omega_h,\ k \geqslant 0,\\ \xi^k(x) = 0, & x \in \Omega_h,\ k \geqslant 0,\\ \xi^0(x) = \varphi_{\tilde{a}}(x), & x \in \bar{\Omega}_h.\end{cases} \tag{17.66}$$

因为 $\varphi_{\tilde{a}}(x)$ 是严格上解，所以由定理 12.2 得到

$$u(x) \equiv \eta^k(x) \leqslant \xi^k(x) < \varphi_{\tilde{a}}(x),\quad k \geqslant 0. \tag{17.67}$$

特别有 $u(x'') < \varphi_{\tilde{a}}(x'')$，但这与 $u(x'') = \varphi_{\tilde{a}}(x'')$ 相矛盾，因此 $u \in \mathscr{N}$.

定理 17.10 如果当 $z \in [0, \beta]$ 时，$\dfrac{f(z)}{z}$ 对 z 是严格递减的，那末 (17.60) 在 $\bar{K}(0, \beta)$ 内至多有一个正值解.

证明 假设 (17.60) 有两个正值解 $u^{(1)}, u^{(2)} \in \bar{K}(0, \beta)$，且存在 $x' \in \Omega_h$，使得 $u^{(1)}(x') < u^{(2)}(x')$. 作 $\varphi_\alpha(x) = \alpha u^{(2)}(x)$，$\alpha \in (0, 1)$，由于 $\varphi_\alpha \in \bar{K}(0, \beta)$，所以

$$-\nu\Delta_h\varphi_\alpha(x) - f(\varphi_\alpha(x)) = \alpha u^{(2)}(x)\left[\frac{f(u^{(2)}(x))}{u^{(2)}(x)} - \frac{f(\alpha u^{(2)}(x))}{\alpha u^{(2)}(x)}\right] < 0, \tag{17.68}$$

即 $\varphi_\alpha(x)$ 是严格下解.

可以证明，存在 $\tilde{\alpha} \in (0, 1)$，使得 $\varphi_{\tilde{a}}(x) \leqslant u^{(1)}(x)$，从而由引理 17.5，$u^{(1)} \in \mathscr{N}$，即 $u^{(1)}(x) \geqslant u^{(2)}(x)$. 特别有

$$u^{(1)}(x') \geqslant u^{(2)}(x'),$$

但这与前面的分析相矛盾，所以 $u^{(1)}(x) \equiv u^{(2)}(x)$.

现在应用前面的理论，讨论一个具体的问题，它是生物数学中 Logistic 模型的定常问题，即

$$\begin{cases}-\nu\Delta U(x) - U(x)(1 - U(x)) = 0, & x \in \Omega,\\ U(x) = 0, & x \in \Gamma.\end{cases} \tag{17.69}$$

相应的离散模式是

$$\begin{cases}-\nu\Delta_h u(x) - u(x)(1 - u(x)) = 0, & x \in \Omega_h,\\ u(x) = 0, & x \in \Gamma_h.\end{cases} \tag{17.70}$$

与此有关的特征值问题是

$$\begin{cases} -\mu_h \Delta_h w(x) - w(x) = 0, & x \in \Omega_h, \\ w(x) = 0, & x \in \Gamma_h. \end{cases} \tag{17.71}$$

可以证明，(17.71) 有 $n(J-1)$ 个正的特征值，最大的特征值是

$$\nu_h^* = \frac{h^2}{4n\sin^2\frac{\pi h}{2}},$$

与其相对应的特征函数记为 $w^*(x)$，并且对一切 $x \in \Omega_h$，

$$w^*(x) > 0.$$

此外，对一切边值为零的函数 $v(x)$，

$$\|v\|^2 \leqslant \nu_h^*(|v|_1^2 + S(v,v)). \tag{17.72}$$

显然，(17.70) 有平凡解，但我们感兴趣的是正值解 $u(x)$，即对一切 $x \in \Omega_h$，$u(x) > 0$.

定理 17.11 如果 $\nu > \nu_h^*$，那末 (17.70) 没有正值解.

证明 假设 $u(x)$ 是正值解. 把 (17.70) 对 $u(x)$ 求内积后得到

$$\nu|u|_1^2 + \nu S(u,u) - \|u\|^2 + |u|_{l^3}^3 = 0,$$

由 (17.72) 推得

$$(\nu - \nu_h^*)(|u|_1^2 + S(u,u)) = 0,$$

因此 $u(x) \equiv 0$.

定理 17.12 ν_h^* 是 (17.70) 对平凡解的分歧点.

证明 记 $\mathscr{M}_h = G_h \cdot f$，于是 (17.70) 等价于

$$\nu u = \mathscr{M}_h u.$$

用 $\mathfrak{B}_h$ 表示边值为零的离散函数空间，其范数为 $\|\cdot\|_\infty$. 用 θ 表示 $\mathfrak{B}_h$ 中的零元素，于是 $\mathscr{M}_h$ 是从 $\mathfrak{B}_h$ 到 $\mathfrak{B}_h$ 的连续算子，且

$$\mathscr{M}_h \theta = \theta.$$

用 $\mathscr{M}_h'$ 和 $\mathscr{M}_h''$ 表示 $\mathscr{M}_h$ 的一阶和二阶 Frèchet 导数. 可以证明，存在正常数 c_2，使得对 θ 的充分小邻域中的一切 v，

$$\|\mathscr{M}_h''(v)\| \leqslant c_2.$$

又考虑特征值问题

$$\mathscr{M}_h w = \mathscr{M}_h'(\theta) w,$$

它等价于(17.71). 用 $\sigma_h(\theta)$ 表示 $\mathscr{M}'_h(\theta)$ 的谱，那末

$$\sigma_h(\theta) = \{\mathscr{M}_h^{(i)}\}.$$

显然，最大的谱点值和相应的特征元素即为 ν_h^* 和 $w^*(x)$.

可以仿照 § 3.3 中的方法证明，存在正常数 c_3，使得当 $|\alpha| \leqslant c_3$ 时，存在唯一的单参数族 $\delta_h(\alpha)$ 和 $u_\alpha(x)$，它们满足

$$\begin{aligned} &\nu_\alpha = \nu_h^* + \delta_h(\alpha), && \nu_\alpha u_\alpha = \mathscr{M}_h u_\alpha, \\ &u_\alpha(x) = \alpha[w^*(x) + \phi_h(x)], && \phi_h \in \text{Range}(\nu_h^* - \mathscr{M}'_h(\theta)), \\ &\delta_h(\alpha) = O(\alpha), && \phi_h = O(\alpha). \end{aligned}$$

令 $\alpha > 0$，于是对一切 $x \in \Omega_h$，$u_\alpha(x) > 0$. 又根据定理 17.11，当 $\nu > \nu_h^*$ 时，(17.70) 没有正值解，所以 ν_h^* 是 (17.70) 对平凡解的分歧点.

定理 17.13 如果 $u(x)$ 是 (17.70) 的正值解，那末

$$0 < \|u\|_\infty < 1.$$

证明 设 $u(x') = \|u\|_\infty \neq 0$，于是

$$u(x')(1 - u(x')) = -\Delta_h u(x') \geqslant 0,$$

因此 $0 < u(x') \leqslant 1$. 如果 $u(x') = 1$，则 $\Delta_h u(x') = 0$，从而

$$u(x' + he_m) = u(x' - he_m) = 1, \quad 1 \leqslant m \leqslant n.$$

因为 Ω_h 是连通的. 最后导致在边界点 x'' 上，$u(x'') = 1$，而这是与边界条件相矛盾的.

定理 17.14 若 $u(x)$ 是 (17.70) 的正值解，则当 $\nu \to \nu_h^*$ 时，$\|u\|_\infty \to 0$.

定理 17.15 若 $u(x)$ 是 (17.70) 的正值解，则当 $\nu \to 0$ 时，$\|u\|_\infty \to 1$.

定理 17.16 对一切 $\nu < \nu_h^*$，(17.70) 都有唯一的正值解.

证明 设 $\nu < \nu' < \nu_h^*$，且 $|\nu' - \nu_h^*|$ 充分小，于是

$$\begin{cases} -\nu'\Delta_h\varphi(x) - \varphi(x)(1 - \varphi(x)) = 0, & x \in \Omega_h, \\ \varphi(x) = 0, & x \in \Gamma_h \end{cases}$$

存在唯一的正值解. 由定理 17.13,

$$-\nu\Delta_h\varphi(x) - \varphi(x)(1 - \varphi(x)) = (\nu' - \nu)\Delta_h\varphi(x)$$

$$= \frac{\nu' - \nu}{\nu'} \varphi(x)(\varphi(x) - 1) < 0,$$

因此，$\varphi(x)$ 是 (17.70) 的严格下解. (17.70) 有严格上解

$$\psi(x) = 1 + \beta, \ \beta > 0.$$

根据定理 17.8，(17.70) 至少有一个正值解 $u(x)$. 并且由于 $\frac{f(z)}{z}$ 是 z 的严格减函数，所以由定理 17.10 知，(17.70) 只有唯一的正值解.

可以证明，(17.69) 对平凡解的分歧点是

$$\nu^* = \frac{1}{n\pi^2}.$$

而当 $\nu < \nu^*$ 时，(17.69) 具有唯一的正值解 U，且 $\|U\|_{L^\infty(\Omega)} < 1$. 因此它与 (17.70) 的性质十分类似. 显然 $\nu^* < \nu_h^*$，并且当 $h \to 0$ 时，$\nu_h^* \to \nu^*$.

下面假定 $\nu < \nu^*$，并用 § 3.2 中的理论来估计正值解的计算误差(见 Guo Ben-Yu (1985a)). 用 $C_0(\bar{\Omega})$ 表示边值为零的连续函数空间，$\mathfrak{B}_1 = C_0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$，$\mathfrak{B}_2 = C_0(\bar{\Omega})$，它们的范数和通常一样. $\mathfrak{B}_{1,h}$ 和 $\mathfrak{B}_{2,h}$ 都是边值为零的离散函数空间，它们的范数分别为

$$\|\cdot\|_{1,h} = \max(\|\cdot\|_\infty, |\cdot|_{1,\infty}, |\cdot|_{2,\infty}), \ \|\cdot\|_{2,h} = \|\cdot\|_\infty.$$

又对一切 $x \in \bar{\Omega}_h$，定义限制算子 $\gamma_h U(x) = U(x)$.

记

$$L_h v(x) = \begin{cases} -\Delta_h v(x) - v(x)(1 - v(x)), & x \in \Omega_h, \\ v(x), & x \in \Gamma_h, \end{cases}$$

则可把 (17.70) 改写为

$$L_h u(x) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}_h,$$

而 L_h 的 Fréchet 导数为

$$L_h'(v) = \begin{cases} -\Delta_h - I + 2v(x), & x \in \Omega_h, \\ I, & x \in \Gamma_h. \end{cases}$$

设 U 和 u 分别为 (17.69) 和 (17.70) 的解. 于是，当 h 适当小时，对一切函数 $w(x)$，

$$\|w\|_\infty \leqslant c_4(U)\|L'_h(U)w\|_{2,h}. \tag{17.73}$$

定理 17.17 若 $\nu < \nu^*$, $U \in C^4(\bar{\Omega})$, 则 $\|U - u\|_{1,h} = O(h)$.

证明 设 $v^{(l)}$是两个边值为零的网格函数,并记

$$\tilde{v}^{(l)} = v^{(l)} - U, \ \tilde{v} = v^{(2)} - v^{(1)}, \ \tilde{L}_h = L_h v^{(2)} - L_h v^{(1)},$$

于是

$$-\Delta_h \tilde{v} - \tilde{v} + \tilde{v}(2U + 2\tilde{v}^{(1)} + \tilde{v}) = \tilde{L}_h.$$

如果 $v^{(l)} \in B_{1,h}(U, R)$,

$$R \leqslant \frac{1}{4c_4(U)}, \quad \|\tilde{L}_h\|_{2,h} \leqslant \frac{1}{8c_4^2(U)},$$

则由 (17.73) 得到

$$\|\tilde{v}\|_\infty \leqslant c_4(U)(\|\tilde{L}_h\|_{2,h} + 2R\|\tilde{v}\|_\infty + \|\tilde{v}\|_\infty^2),$$

因此,或者

$$\|\tilde{v}\|_\infty \geqslant \frac{1 - 2Rc_4(U) + \sqrt{(1 - 2Rc_4(U))^2 - 4c_4^2(U)\|\tilde{L}_h\|_{2,h}}}{2c_4(U)}, \tag{17.74}$$

或者

$$\|\tilde{v}\|_\infty \leqslant \frac{1 - 2Rc_4(U) - \sqrt{(1 - 2Rc_4(U))^2 - 4c_4^2(U)\|\tilde{L}_h\|_{2,h}}}{2c_4(U)}. \tag{17.75}$$

若 (17.74) 成立,则

$$\|\tilde{v}\|_\infty \geqslant \frac{1}{2c_4(U)}\Big[1 - 2Rc_4(U) + (1 - 2Rc_4(U)) \times \Big(1 - \frac{2c_4^2(U)\|\tilde{L}_h\|_{2,h}}{(1 - 2Rc_4(U))^2}\Big)\Big] \geqslant \frac{1}{2c_4(U)} \times (1 - 4c_4^2(U)\|\tilde{L}_h\|_{2,h}) \geqslant \frac{1}{4c_4(U)},$$

但这与 $\tilde{v} \in B_{1,h}(U, R)$ 相矛盾,因此由 (17.75) 得到

$$\|\tilde{v}\|_\infty \leqslant \frac{1}{2c_4(U)}\Big[1 - 2Rc_4(U) - (1 - 2Rc_4(U)) \times \Big(1 - \frac{2c_4^2(U)\|\tilde{L}_h\|_{2,h}}{(1 - 2Rc_4(U))^2}\Big)\Big]$$

$$= \frac{c_1(U)\|\tilde{L}_h\|_{2,h}}{1-2Rc_4(U)} \leqslant c_5(U)\|\tilde{L}_h\|_{2,h},$$

并可仿照§17.2得到

$$\|\tilde{v}\|_{1,h} \leqslant \frac{c_6(U)}{h}\|\tilde{L}_h\|_{2,h}.$$

根据定理3.13，L_h 在 $B_{1,h}(U, R)$ 内对 U 是一致广义弱稳定的，且

$$\bar{\bar{M}}(U, h) = \frac{c_5(U)}{h}, \quad \bar{N}(U, h) = \frac{1}{8c_4^2(U)}.$$

用 $R_h(U)$ 表示逼近误差，则 $\|R_h(U)\|_{2,h} = O(h^2)$. 因此，当 h 适当小时，

$$\|R_h(U)\|_{2,h} \leqslant r_0(h) = \min\left(\frac{1}{8c_4^2(U)}, \frac{Rh}{c_6(U)}\right).$$

所以，根据定理3.14和定理3.15，(17.70)在 $B_{1,h}(U, R)$ 中有唯一解，且 $\|U-u\|_{1,h} = O(h)$.

如果 $n=1$，则可把上面的结果改进为

$$\|U-u\|_{1,h} = O(h^2).$$

Chen Sui-Yang，Guo Ben-Yu (1984, 1985) 还研究了下列问题

$$\begin{cases} -\nu\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial U}{\partial \rho}\right) - f(U) = 0, \quad 0<\rho<1, \\ \dfrac{\partial U}{\partial \rho}(0) = U(1) = 0, \end{cases}$$

其中 $f(U) = U(1-U)$ 或者

$$f(U) = U - \frac{U^2}{Q} - \frac{U^2}{R(1+U^2)}, \quad Q > 3\sqrt{3}, \quad R > 0.$$

17.5 拟线性方程的能量方法

本节介绍拟线性方程边值问题的能量方法．假设 $\Omega = \{x / 0 < x_m < 1, 1 \leqslant m \leqslant 3\}$，$\Gamma$ 适当光滑，并考虑下列散度型方程

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(\nu(U)\nabla U) = f, & x\in\Omega, \\ U = 0, & x\in\Gamma, \end{cases} \tag{17.76}$$

其中 $f \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$，$0 < \alpha < 1$，$\nu(\varphi)$ 具有一阶和二阶连续导数，分别记为 $\nu'(\varphi)$ 和 $\nu''(\varphi)$，并假定存在正常数 ν_0，ν_1，c_1 和 c_2，使得对一切 $\varphi \in \mathscr{R}$，都有

$$0 < \nu_0 \leqslant \nu(\varphi) \leqslant \nu_1, \quad |\nu'(\varphi)| \leqslant c_1, \quad |\nu''(\varphi)| \leqslant c_2.$$

记

$$a(V, W, \nu(\varphi)) = \sum_{m=1}^{3} \int_{\Omega} \nu(\varphi) \nabla V \cdot \nabla W dx.$$

(17.76) 的广义解是指函数 $U \in H_0^1(\Omega)$，它满足

$$a(U, W, \nu(U)) = (f, W)_{L^2(\Omega)}, \forall W \in C_0^{\infty}(\Omega), \tag{17.77}$$

Douglas, Dupont (1975) 证明，在上述条件下，(17.77) 具有广义解 $U \in C^{2+\alpha}(\Omega)$，从而也是唯一的古典解.

用 h 表示 x_m 的步长，Kuo Pen-Yu (1984) 用下列格式计算 (17.76)，

$$\begin{cases} -\Delta_h^{\nu(u)} u = f, & x \in \Omega_h, \\ u = 0, & x \in \Gamma_h. \end{cases} \tag{17.78}$$

用 R_h 表示逼近误差，则有

$$\begin{cases} -\Delta_h^{\nu(U)} U = f + R_h, & x \in \Omega_h, \\ U = 0, & x \in \Gamma_h, \end{cases} \tag{17.79}$$

其中，当 $h \to 0$ 时，$\|R_h\| \to 0$.

用 $\mathscr{H}$ 表示边值为零的网格函数集合，其内积与范数为

$$(v, w)_{\mathscr{H}} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{3} [(v_{x_m}, w_{x_m}) + (v_{\bar{x}_m}, w_{\bar{x}_m})] + S(v, w),$$

$$\|v\|_{\mathscr{H}}^2 = (v, v)_{\mathscr{H}}.$$

记

$$a_h(v, w, \nu(\varphi)) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n} (\nu(\varphi), v_{x_m} w_{x_m} + v_{\bar{x}_m} w_{\bar{x}_m}) + S^{(\nu)}(v, w).$$

显然有

$$\nu_0 \|v\|_{\mathscr{H}}^2 \leqslant a_h(v, v, \nu(\varphi)) \leqslant \nu_1 \|v\|_{\mathscr{H}}^2, \tag{17.80}$$

并由引理 4.10 得到

$$(-\Delta_h^{\nu(\varphi)}v, w) = a_h(v, w, \nu(\varphi)).$$

定理 17.18 对一切 h，格式 (17.78) 都有解，并且

$$\|u\|_{\mathscr{W}} \leqslant \frac{m_0^{1/2}\|f\|}{\nu_0}.$$

证明 定义算子 σ，$u=\sigma v$ 表示

$$\begin{cases} -\Delta_h^{\nu(v)}u = f, & x\in\Omega_h, \\ u=0, & x\in\Gamma_h. \end{cases}$$

把上式对 u 求内积，则有

$$a_h(u, u, \nu(v)) \leqslant \|f\|\|u\| \leqslant m_0^{1/2}\|f\|\|u\|_{\mathscr{W}}.$$

由 (17.80)，

$$\|u\|_{\mathscr{W}} \leqslant \frac{m_0^{1/2}\|f\|}{\nu_0},$$

所以 σ 的值域被包含在一个闭球之内.又假设 $u^{(l)}=\sigma v^{(l)}$，$l=1$，2，则

$$\begin{cases} -\Delta_h^{\nu(v^{(1)})}u^{(1)} + \Delta_h^{\nu(v^{(2)})}u^{(2)} = 0, & x\in\Omega_h, \\ u^{(1)}-u^{(2)}=0, & x\in\Gamma_h. \end{cases}$$

记 $\tilde{u}=u^{(1)}-u^{(2)}$，$\tilde{\nu}=\nu(u^{(1)})-\nu(u^{(2)})$，则

$$\begin{cases} -\Delta_h^{\nu(v^{(1)})}\tilde{u} = \Delta_h^{\tilde{\nu}}u^{(2)}, & x\in\Omega_h, \\ \tilde{u}=0, & x\in\Gamma_h. \end{cases}$$

把上式对 $\tilde{u}$ 求内积后得到

$$a_h(\tilde{u}, \tilde{u}, \nu(v^{(1)})) = a_h(u^{(2)}, \tilde{u}, \tilde{\nu}).$$

因为在 Γ_h 上 $\tilde{\nu}=0$，故由 (17.80) 得到

$$\nu_0\|\tilde{u}\|_{\mathscr{W}}^2 \leqslant c_1\|v^{(1)}-v^{(2)}\|_\infty |u^{(2)}|_1 \|\tilde{u}\|_{\mathscr{W}}.$$

令 $v^{(1)}\to v^{(2)}$，则有 $\|\tilde{u}\|_{\mathscr{W}}\to 0$，所以 σ 是连续算子． 于是，由 Brouwer 不动点定理，(17.78) 至少有一个解．$\|u\|_{\mathscr{W}}$ 的上界估计是显然的.

定理 17.19 存在正常数 c_3，使得

$$\|u-U\|_{\mathscr{W}} \leqslant c_3\|R_h\|.$$

证明 记 $\tilde{u}=u-U$，$\tilde{\nu}=\nu(u)-\nu(U)$，则

$$\begin{cases} -\Delta_h^{\nu(u)}\tilde{u} = \Delta_h^{\tilde{\nu}}U - R_h, & x\in\Omega_h, \\ \tilde{u}=0, & x\in\Gamma_h. \end{cases}$$

把上式对 $\tilde{u}$ 求内积后得到

$$a_h(\tilde{u}, \tilde{u}, \nu(u)) = -a_h(U, \tilde{u}, \tilde{v}) - (\tilde{u}, R_h),$$

故由 (17.80) 得到

$$\nu_0 \|\tilde{u}\|_{\mathscr{W}}^2 \leqslant |a_h(U, \tilde{u}, \tilde{v})| + |(\tilde{u}, R_h)|. \tag{17.81}$$

下面来估计 $|a_h(U, \tilde{u}, \tilde{v})|$. 由于在 Γ_h 上 $\tilde{v} = 0$, 所以 $S(u, \tilde{u}, \tilde{v}) = 0$. 我们有

$$|(\tilde{v}, U_{x_m}, \tilde{u}_{x_m})| \leqslant c_4 \|\tilde{u} U_{x_m}\| \|\tilde{u}_{x_m}\|$$
$$\leqslant c_4 \|\tilde{u}\|_{l^3} \|U_{x_m}\|_{l^6} \|\tilde{u}_{x_m}\|,$$

根据引理 4.7,

$$\|\tilde{u}\|_{l^3}^3 \leqslant \|\tilde{u}\| \|\tilde{u}\|_{l^4}^2 \leqslant c_5 \|\tilde{u}\|^{3/2} |\tilde{u}|_1^{3/2},$$

所以

$$|a_h(U, \tilde{u}, \tilde{v})| \leqslant c_6 \|\tilde{u}\|^{\frac{1}{2}} |\tilde{u}|_1^{3/2}.$$

此外,

$$|(R_h, \tilde{u})| \leqslant m_0^{1/2} \|R_h\| \|\tilde{u}\|_{\mathscr{W}}.$$

取 ε 适当小,并把以上各估计式代入 (17.81), 就得到

$$\nu_0 \|\tilde{u}\|_{\mathscr{W}} \leqslant c_7 (\|R_h\| + \|\tilde{u}\|^{\frac{1}{2}} \|\tilde{u}\|_{\mathscr{W}}^{1/2}),$$

从而

$$\|\tilde{u}\|_{\mathscr{W}} \leqslant c_8 (\|R_h\| + \|\tilde{u}\|). \tag{17.82}$$

下面来估计 $\|\tilde{u}\|$. 为此考虑下列共轭问题

$$\begin{cases} -\Delta_h^{\nu(U)} \varphi + \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{m=1}^{3} \nu'(U)(U_{x_m} \varphi_{x_m} + U_{\bar{x}_m} \varphi_{\bar{x}_m}) = \tilde{u}, & x \in \Omega_h, \\ \varphi = 0, & x \in \Gamma_h, \end{cases} \tag{17.83}$$

于是可证明 $\|\varphi\|_2 \leqslant c_9 \|\tilde{u}\|^2$. 又把 (17.83) 对 $\tilde{u}$ 求内积得到

$$\|\tilde{u}\|^2 = a_h(\varphi, \tilde{u}, \nu(U)) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{3} (\tilde{u} \nu'(U), U_{x_m} \varphi_{x_m} + U_{\bar{x}_m} \varphi_{\bar{x}_m}). \tag{17.84}$$

因为 $S(v, w, \tilde{v}) = 0$ 和

$$a_h(\varphi, \tilde{u}, \nu(U)) = -a_h(\varphi, U, \nu(U)) + a_h(\varphi, u, \nu(U))$$
$$= a_h(\varphi, u, \nu(u)) - a_h(\varphi, U, \nu(U))$$
$$- a_h(\varphi, U, \tilde{v}) - a_h(\varphi, \tilde{u}, \tilde{v}),$$

所以由 (17.84) 得到

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{u}\|^2 = & a_h(\varphi, u, \nu(u)) - a_h(\varphi, U, \nu(U)) \\
& - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{3}(\tilde{\nu}, \varphi_{x_m}\tilde{u}_{x_m} + \varphi_{\bar{x}_m}\tilde{u}_{\bar{x}_m}) \\
& + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{3}(\tilde{u}\nu'(U) - \tilde{\nu}, \varphi_{x_m}U_{x_m} + \varphi_{\bar{x}_m}U_{\bar{x}_m}).
\end{aligned} \tag{17.85}
$$

下面来估计 (17.85) 的右端各项. 首先把 (17.78), (17.79) 对 φ 求内积,于是得到

$$
a_h(\varphi, u, \nu(u)) = (f, \varphi),
$$

$$
a_h(\varphi, U, \nu(U)) = (f, \varphi) + (R_h, \varphi),
$$

从而

$$
\begin{aligned}
& |a_h(\varphi, u, \nu(u)) - a_h(\varphi, U, \nu(U))| \\
& \leqslant \|R_h\|\|\varphi\| \leqslant c_{10}\|R_h\|\|\tilde{u}\|.
\end{aligned} \tag{17.86}
$$

又有

$$
\begin{aligned}
& \left|\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{3}(\tilde{\nu}, \varphi_{x_m}\tilde{u}_{x_m} + \varphi_{\bar{x}_m}\tilde{u}_{\bar{x}_m})\right| \\
& \leqslant \frac{c_1}{2}\|\varphi\|_{W_h^{1,6}(\Omega)}\|\tilde{u}\|_{L^3}|\tilde{u}|_1 \leqslant c_{11}\|\varphi\|_2\|\tilde{u}\|^{\frac{1}{2}}|\tilde{u}|_1^{3/2} \\
& \leqslant c_{12}\|\tilde{u}\|^{\frac{3}{2}}|\tilde{u}|_1^{\frac{3}{2}}
\end{aligned} \tag{17.87}
$$

最后,因为

$$
\begin{aligned}
|\tilde{\nu} - \tilde{u}\nu(U)| & = |\nu'(U + \xi_1\tilde{u})\tilde{u} - \nu'(U)\tilde{u}| \\
& = |\xi_1\nu''(U + \xi_1\xi_2\tilde{u})\tilde{u}^2| \leqslant c_3|\tilde{u}|^2,
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
& \left|\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{3}(\tilde{\nu} - \tilde{u}\nu'(U), \varphi_{x_m}U_{x_m} + \varphi_{\bar{x}_m}U_{\bar{x}_m})\right| \\
& \leqslant c_{13}\|\varphi\|_{W_h^{1,6}}\|\tilde{u}\|_{L^4}\|\tilde{u}\| \leqslant c_{14}\|\tilde{u}\|^{\frac{3}{2}}|\tilde{u}|_1^{3/2}.
\end{aligned} \tag{17.88}
$$

把 (17.86), (17.87) 和 (17.88) 代入 (17.85), 就得到

$$
\|\tilde{u}\| \leqslant c_{15}(\|R_h\| + \|\tilde{u}\|^{\frac{1}{2}}|\tilde{u}|_1^{3/2}),
$$

从而

$$\|\tilde{u}\| \leqslant c_{16}(\|R_h\| + \|\tilde{u}\|_{\mathscr{H}}^3).$$

由于当 $h \to 0$ 时，$\|R_h\| \to 0$，所以把 (17.82) 代入上式后得到

$$\|\tilde{u}\| \leqslant c_{17}(\|R_h\| + \|\tilde{u}\|^3).$$

因此，若能证明当$h \to 0$时，$\|\tilde{u}\| \to 0$，那末，就可由 (17.82) 推得所证的结论。

事实上，古典解U也一定是 (17.76) 的广义解。另一方面把 u 记为 u_h，于是对一切 $W \in C_0^\infty(\Omega)$，都有

$$a_h(u_h, W, \nu(u_h)) = (f, W). \tag{17.89}$$

把利用分片线性插值方法和 u_h 构造连续函数 $U_h(x) \in H_0^1(\Omega)$，则 $\|U_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant c_0\|u_h\|_{\mathscr{H}}$。所以 $\|U_h\|_{H_0^1(\Omega)}$ 对 h 一致有界，从而可选择一个子序列 $\{U_{h_l}(x)\}$，使得当 $h_l \to 0$ 时，$\{U_{h_l}(x)\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中弱收敛到 $\bar{U}(x)$，同时在 $L^2(\Omega)$ 中强收敛到 $\bar{U}$。同理利用W在网格点上的值，用线性插值方法构造函数 $W_{h_l} \in H_0^1(\Omega)$，则当 $h_l \to 0$ 时，$\|W - W_{h_l}\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0$。于是

$$\begin{aligned}|a(\bar{U}, W, \nu(\bar{U})) - (f, W)_{L^2(\Omega)}| = {} & |a(\bar{U}, W \\ & - W_{h_l}, \nu(\bar{U}))| + \left|\int_\Omega (\nu(\bar{U})\nabla\bar{U} \right. \\ & \left. - \nu(U_{h_l})\nabla U_{h_l})\nabla W_{h_l} dx\right| \\ & + |a(U_{h_l}, W_{h_l}, \nu(U_{h_l})) \\ & - a_h(u_{h_l}, W_{h_l}, \nu(u_{h_l}))| + |(f, W_{h_l}) \\ & - (f, W)_{L^2(\Omega)}|.\end{aligned}$$

不难证明，上式右端各项都趋向于零，所以

$$a(\bar{U}, W, \nu(\bar{U})) = (f, W)_{L^2(\Omega)},$$

即 $\bar{U}$ 是 (17.76) 的广义解，从而 $U = \bar{U}$。

因为对每个子列 $\{U_{h_l}(x)\}$，都可选取子列，使得它的极限函数是 $U(x)$，所以整个 $\{U_h(x)\}$ 都在 $L^2(\Omega)$ 中强收敛到 $U(x)$。但当 h 充分小时，

$$\|\tilde{u}\|^2 = \|u_h - U\|^2 = \|U_h - U\|^2 \leqslant c_{15}\|U_h - U\|_{L^2(\Omega)},$$

所以当 $h \to 0$ 时，$\|\tilde{u}\|^2 \to 0$，这就完成了定理的证明。

可以把上面结果推广到更一般的情况，例如

$$\begin{cases}-\nabla\cdot(\nu(x,U)\nabla U)=f(x,U), & x\in\Omega,\\ U=g & x\in\Gamma,\end{cases}$$

其中 ν 对 x 和 U 都有连续的二阶偏导数，并且一致 Lipschitz 连续，ν 对一切 x 和 U，都有正的上、下界，g 是适当正则的函数。

17.6 粘性流体涡度方程的定常问题

不可压缩粘性流体的二维定常问题是

$$\begin{cases}-\nu\Delta H+\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_2}H\right)-\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_1}H\right)=f, & x\in\Omega,\\ \Delta\Phi+H=0, & x\in\Omega,\end{cases}\tag{17.90}$$

其中 $\nu>0$。

Janssen (1956) 最早用模拟机计算 (17.90) 的外部问题。六十年代以来，出现了大量数值计算工作，例如可见 Greenspan (1969), Davis(1972), Dorodnichn (1972), Roache (1972, 1976) 和郭本瑜 (1976, 1979a) 的文章。

为方便计，设 $\Omega=\{x/0<x_1,\ x_2<1\}$，并在 Γ 上

$$H=\Phi=0.$$

计算 (17.90) 的格式有两类。第一类是基于守恒律，例如用下列格式计算 (17.90)，

$$\begin{cases}-\nu\Delta_h\eta(x)+J^{(\alpha)}(\eta(x),\varphi(x))=f(x), & x\in\Omega_h,\\ \Delta_h\varphi(x)+\eta(x)=0, & x\in\Omega_h,\\ \eta(x)=\varphi(x)=0, & x\in\Gamma_h,\end{cases}\tag{17.91}$$

其中 $J^{(\alpha)}(\eta,\varphi)$ 的定义见 § 12.7。郭本瑜 (1976, 1979a) 采用 $\alpha=\alpha''$，从而它的解满足守恒律。

离散函数空间 $\mathscr{H}$ 的内积及其范数的定义与前节相同，m_0 的意义也如前。假定 (f,w) 是 $\mathscr{H}$ 上的线性连续泛函，那末存在元素 $F\in\mathscr{H}$，使得 $(F,w)_{\mathscr{H}}=(f,w)$，并且

$$|(f,w)|\leqslant\|F\|_{\mathscr{H}}\|w\|_{\mathscr{H}}.$$

定理 17.20 若 $\alpha=\alpha''$，$\|F\|_{\mathscr{H}}$ 对 h 一致有界，则对一切 h，

格式 (17.91) 都至少有一个解 η，并且 $\|\eta\|_{\mathscr{H}} \leqslant \frac{\|F\|_{\mathscr{H}}}{\nu}$。

证明 把 (17.91) 的第一式对 $w \in \mathscr{H}$ 求内积，由引理 4.10 得到

$$\nu(\eta, w)_{\mathscr{H}} + (w, J^{(\alpha'')}(\eta, \varphi)) = (f, w).$$

因为对于固定的 η 和 φ，$(w, J^{(\alpha'')}(\eta, \varphi))$ 也是 $\mathscr{H}$ 上的线性连续泛函，所以存在元素 $\sigma\eta \in \mathscr{H}$，使得

$$(\sigma\eta, w)_{\mathscr{H}} = (w, J^{(\alpha'')}(\eta, \varphi)).$$

因此，(17.91) 又等价于下列算子方程的定解问题

$$\eta + \frac{1}{\nu}(\sigma\eta - F) = 0. \qquad (17.92)$$

假定有序列 $\{\eta^{(l)}\}$，它在 $\mathscr{H}$ 中是收敛的，并且

$$\Delta_h\varphi^{(l)} + \eta^{(l)} = 0.$$

于是，当 l 充分大时，$\|\eta^{(l)}\|_{\mathscr{H}}$ 一致有界。又把 (17.91) 的第二式对 $\varphi^{(l)}$ 求内积，由引理 4.10 得到

$$\|\varphi^{(l)}\|_{\mathscr{H}}^2 \leqslant \|\varphi^{(l)}\|\|\eta^{(l)}\| \leqslant m_0^{1/2}\|\varphi^{(l)}\|_{\mathscr{H}}$$

和

$$\|\varphi^{(l)}\|_{\mathscr{H}}^2 \leqslant c_1\|\eta^{(l)}\|^2. \qquad (17.93)$$

又根据引理 4.11

$$|\varphi^{(l)}|_2^2 \leqslant c_2\|\eta^{(l)}\|^2, \qquad (17.94)$$

记 $\xi^{(l_1,l_2)} = (\sigma\eta^{(1)} - \sigma\eta^{(2)}, w)_{\mathscr{H}}$，则有

$$\xi^{(l_1,l_2)} = (w, J^{(\alpha'')}(\eta^{(l_1)} - \eta^{(l_2)}, \varphi^{(l_1)})) + (w, J^{(\alpha'')}(\eta^{(l_2)}, \varphi^{(l_1)} - \varphi^{(l_2)})).$$

由引理 4.6 和 (17.93)，(17.94) 得到

$$\begin{aligned}|(w, J^{(\alpha'')}(\eta^{(l_1)} - \eta^{(l_2)}, \varphi^{(l_1)}))| &\leqslant |\eta^{(l_1)} - \eta^{(l_2)}|_1(\|w\varphi_{\bar{x}_1}^{(l_1)}\| \\ &+ \|w\varphi_{\bar{x}_2}^{(l_1)}\|) \leqslant c_3|\eta^{(l_1)} - \eta^{(l_2)}|_1\|w\|^{\frac{1}{2}}|w|_1^{1/2} \\ &\times |\varphi^{(l_1)}|_1^{1/2}|\varphi^{(l_1)}|_2^{1/2} \leqslant c_4\|\eta^{(l_1)} \\ &- \eta^{(l_2)}\|_{\mathscr{H}}\|w\|_{\mathscr{H}}\|\eta^{(l_1)}\| \leqslant c_5\|\eta^{(l_1)} \\ &- \eta^{(l_2)}\|_{\mathscr{H}}\|w\|_{\mathscr{H}}.\end{aligned}$$

类似地可估计 $|(w, J^{(\alpha'')}(\eta^{(l_2)}, \varphi^{(l_1)} - \varphi^{(l_2)})|$。于是有

$$|\xi^{(l_1,l_2)}| \leqslant c_6\|\eta^{(l_1)}-\eta^{(l_2)}\|_{\mathscr{H}}\|w\|_{\mathscr{H}}.$$

取 $w=\sigma\eta^{(l_1)}-\sigma\eta^{(l_2)}$，则得到

$$\|\sigma\eta^{(l_1)}-\sigma\eta^{(l_2)}\|_{\mathscr{H}} \leqslant c_7\|\eta^{(l_1)}-\eta^{(l_2)}\|_{\mathscr{H}},$$

因此 σ 是连续算子，所以根据 Brouwer 定理，只要证明，当

$$\lambda\in\left[0,\ \frac{1}{\nu}\right]$$

时，下列方程

$$\eta^{(\lambda)}+\lambda(\sigma\eta^{(\lambda)}-F)=0$$

的一切可能解是一致有界的．事实上，把上式对 $\eta^{(\lambda)}$ 求内积后得到

$$\|\eta^{(\lambda)}\|_{\mathscr{H}}^2=\lambda|(F,\eta^{(\lambda)})|\leqslant\frac{1}{\nu}\|F\|_{\mathscr{H}}\|\eta^{(\lambda)}\|_{\mathscr{H}},$$

从而 $\|\eta^{(\lambda)}\|_{\mathscr{H}}\leqslant\dfrac{\|F\|_{\mathscr{H}}}{\nu}$，这就完成了定理的证明．

方程(17.90)的解不一定是稳定的，也未必是唯一的．但在一定条件下，例如 $\|f\|_{L^2(\Omega)}$ 或区域直径适当小，或者 ν 适当大，则它有唯一解，并且是稳定的．格式(17.91)也有类似的性质．下面用 R_e 表示广义 Reynolds 数，即

$$R_e=\frac{2\sqrt{2}\,m_0^{3/2}\|f\|}{\nu^2}.$$

又用 $\tilde{\eta}$, $\tilde{\varphi}$ 和 $\tilde{f}$ 分别表示 η, φ 和 f 的误差．

定理 17.21 若 $\alpha=\alpha''$, $R_e<1$，则 $\|\tilde{\eta}\|_{\mathscr{H}}\leqslant c_8\|\tilde{f}\|$.

证明 误差满足下列方程组

$$\begin{cases}-\nu\Delta_h\tilde{\eta}(x)+J^{(\alpha'')}(\tilde{\eta}(x),\varphi(x)+\tilde{\varphi}(x)) & \\ \qquad\qquad +J^{(\alpha'')}(\eta(x),\tilde{\varphi}(x))=\tilde{f}(x), & x\in\Omega_h,\\ \Delta_h\tilde{\varphi}(x)+\tilde{\eta}(x)=0, & x\in\Omega_h\\ \tilde{\eta}(x)=\tilde{\varphi}(x)=0, & x\in\Gamma_h.\end{cases}\quad(17.95)$$

把(17.95)的第一式对 $\tilde{\eta}$ 求内积，且由引理 4.10 和 (12.69) 得到

$$\nu\|\tilde{\eta}\|_{\mathscr{H}}^2\leqslant|(\tilde{\eta},J^{(\alpha'')}(\eta,\tilde{\varphi}))|+|(\tilde{\eta},\tilde{f})|$$

$$\leqslant |(\eta, J^{(\alpha'')}(\tilde{\eta}, \tilde{\varphi}))| + \nu\varepsilon\|\tilde{\eta}\|^2 + \frac{1}{\nu\varepsilon}\|\bar{f}\|^2. \quad (17.96)$$

又由 (17.95) 的第二式得到

$$\|\tilde{\varphi}\|_{\mathscr{H}}^2 \leqslant m_0\|\tilde{\eta}\|^2, \quad \|\tilde{\varphi}\|_2^2 \leqslant \|\tilde{\eta}\|^2.$$

因为

$$\begin{aligned} J^{(\alpha'')}(\tilde{\eta}(x), \tilde{\varphi}(x)) = {} & \tilde{\eta}_{\hat{x}_1}(x)\tilde{\varphi}_{\hat{x}_2}(x) - \tilde{\eta}_{\hat{x}_2}(x)\tilde{\varphi}_{\hat{x}_1}(x) \\ & + \frac{h}{4}\tilde{\varphi}_{\hat{x}_2 x_1}(x)\tilde{\eta}_{x_1}(x) - \frac{h}{4}\tilde{\varphi}_{\hat{x}_2 x_1}(x)\tilde{\eta}_{\hat{x}_1}(x) \\ & - \frac{h}{4}\tilde{\varphi}_{\hat{x}_1 x_2}(x)\tilde{\eta}_{x_2}(x) + \frac{h}{4}\tilde{\varphi}_{\hat{x}_1 x_2}(x)\eta_{\hat{x}_2}(x), \end{aligned}$$

所以由引理 4.6 得到

$$\begin{aligned} |(\eta, J^{(\alpha'')}(\tilde{\eta}, \tilde{\varphi}))| & \leqslant 2|\tilde{\eta}|_1(\|\eta\tilde{\varphi}_{\hat{x}_1}\| + \|\eta\tilde{\varphi}_{\hat{x}_2}\|) \\ & \leqslant 2\sqrt{2}\,|\tilde{\eta}|_1\|\eta\|^{\frac{1}{2}}|\eta|_1^{1/2}|\tilde{\varphi}|_1^{1/2}|\tilde{\varphi}|_2^{1/2} \\ & \leqslant 2\sqrt{2}\,m_0^{1/4}\|\tilde{\eta}\|_{\mathscr{H}}\|\eta\|^{\frac{1}{2}}\|\eta\|_{\mathscr{H}}^{1/2}\|\tilde{\eta}\| \\ & \leqslant 2\sqrt{2}\,m_0^{3/4}\|\tilde{\eta}\|_{\mathscr{H}}^2\|\eta\|^{\frac{1}{2}}\|\eta\|_{\mathscr{H}}^{1/2}. \end{aligned}$$

又把 (17.91) 对 η 求内积得到

$$\nu\|\eta\|_{\mathscr{H}}^2 \leqslant \|f\|\|\eta\| \leqslant m_0^{1/2}\|f\|\|\eta\|_{\mathscr{H}},$$

所以

$$\|\eta\|_{\mathscr{H}} \leqslant \frac{m_0^{1/2}}{\nu}\|f\|,$$

亦即

$$\|\eta\|^{\frac{1}{2}}\|\eta\|_{\mathscr{H}}^{1/2} \leqslant \frac{m_0^{3/4}}{\nu}\|f\|.$$

把它代入 (17.96) 后就得到

$$\nu(1 - K_t - \varepsilon)\|\tilde{\eta}\|_{\mathscr{H}}^2 \leqslant \frac{c_9}{\varepsilon}\|\bar{f}\|^2,$$

从而得到所证的结论.

上述定理表示,格式 (17.91) 对 f 是广义稳定的,并且广义稳定性指标 $s = -\infty$,所以二次守恒格式具有很好的稳定性质. 还可由此推出解的唯一性.

如果 (17.91) 第二式的右端也有误差，则稍微修改前面的证明过程，也可得到 $s=-\infty$. 如果 H, Φ 是 (17.90) 的解，(17.91) 对 (17.90) 的逼近是相容的，那末，根据 § 3.1 中的理论，格式 (17.91) 对 U 来说是收敛的，详见 Kuo Pen-Yu(1977) 的文章.

计算 (17.90) 的第二类方法是基于传输律. Greenspan (1969) 采用通常的特征型格式，例如当 $\varphi_{\bar{x}_1}(x) \leqslant 0$, $\varphi_{\bar{x}_2}(x) \leqslant 0$ 时，就用下式来逼近 (17.90) 中的第一式

$$-\nu\Delta_h\eta(x)+\varphi_{\bar{x}_2}(x)\eta_{x_1}(x)-\varphi_{\bar{x}_1}(x)\eta_{\bar{x}_2}(x)=f(x), \quad x\in\Omega_h.$$

郭本瑜则采用修正逆风法，即

$$\begin{cases}-\nu\Delta_h\eta(x)+F(\eta(x))=f(x), & x\in\Omega_h,\\ -\Delta_h\varphi(x)+\eta(x)=0, & x\in\Omega_h.\end{cases}$$

其中 $F(\eta(x))$ 的意义见 § 12.7.

对于大 Reynolds 数流动，则可采用 Петров-Галеркин 方法计算它.

关于三维涡度方程的计算方法，可见郭本瑜(1980c)的文章.

17.7 定常流体动力学的动态松弛法和稳定化方法

通常采用 Newton 法，简化 Newton 法或松弛迭代过程计算流体力学中的定常问题. 例如设 Ω 是矩形区域，则可采用下列迭代过程

$$\begin{cases}\eta^{(l+1)}(x)=\eta^{(l)}(x)+\tau[\nu\Delta_h\eta^{(l+1)}(x)-J^{(\alpha)}(\beta\eta^{(l+1)}(x)\\ \qquad +(1-\beta)\eta^{(l)}(x), \varphi^{(l)}(x))+f(x)], & x\in\Omega_h,\\ \Delta_h\varphi^{(l)}(x)+\eta^{(l)}(x)=0, & x\in\Omega_h,\\ \eta^{(l)}(x)=\varphi^{(l)}(x)=0, & x\in\Gamma_h,\end{cases} \tag{17.97}$$

其中 l 表示迭代次数，τ 是松弛因子，$0\leqslant\beta\leqslant 1$.

若 $\beta=0$, $\tau\to\infty$, 则(17.97)就是 Dorodnichn (1972) 的逐步松弛法. 若 $\alpha=\alpha'$, $\beta=1$, 则它是 N-S 方法（见 Greenspan (1974)）. 郭本瑜 (1976, 1979a) 则令 $\alpha=\alpha''$, $\beta=1$, 并证明了下列结果：

定理 17.22 若$\alpha = \alpha''$, $\beta = 1$, $R_e < 1$, 则迭代过程 (17.97) 至少按几何级数速率收敛.

证明 记

$$\eta^{(l)}(x) = \eta(x) + \tilde{\eta}^{(l)}(x), \quad \varphi^{(l)}(x) = \varphi(x) + \tilde{\varphi}^{(l)}(x),$$

则

$$\begin{cases} \tilde{\eta}^{(l+1)}(x) = \tilde{\eta}^{(l)}(x) + \tau[\nu\Delta_h\tilde{\eta}^{(l+1)}(x) - J^{(\alpha'')}(\tilde{\eta}^{(l+1)}(x), \tilde{\varphi}^{(l)}(x) \\ \qquad\qquad + \varphi(x)) - J^{(\alpha'')}(\eta(x), \tilde{\varphi}^{(l)}(x))], & x \in \Omega_h, \\ \Delta_h\tilde{\varphi}^{(l)}(x) + \tilde{\eta}^{(l)}(x) = 0, & x \in \Omega_h, \\ \tilde{\eta}^{(l)}(x) = \tilde{\varphi}^{(l)}(x) = 0, & x \in \Gamma_h. \end{cases} \tag{17.98}$$

把上面的第一式对 $\tilde{\eta}^{(l+1)}$ 求内积，由引理 4.10 和 (12.69) 得到

$$\|\tilde{\eta}^{(l+1)}\|^2 - \|\tilde{\eta}^{(l)}\|^2 + \|\tilde{\eta}^{(l+1)} - \tilde{\eta}^{(l)}\|^2 + 2\tau\nu\|\tilde{\eta}^{(l+1)}\|_{\mathscr{H}}^2$$
$$= -2\tau(\tilde{\eta}^{(l+1)}, J^{(\alpha'')}(\eta, \tilde{\varphi}^{(l)})). \tag{17.99}$$

又由引理 4.6, 4.10, 4.11 和 (12.69) 得到

$$|(\tilde{\eta}^{(l+1)}, J^{(\alpha'')}(\eta, \tilde{\varphi}^{(l)}))| = |(\eta, J^{(\alpha'')}(\tilde{\eta}^{(l+1)}, \tilde{\varphi}^{(l)}))|$$

$$\leqslant 2\sqrt{2}\,|\tilde{\eta}^{(l+1)}|_1\|\eta\|^{\frac{1}{2}}|\eta|_1^{1/2}|\tilde{\varphi}^{(l)}|_1^{1/2}|\tilde{\varphi}^{(l)}|_2^{1/2}$$

$$\leqslant 2\sqrt{2}\,m_0^{1/4}\|\tilde{\eta}^{(l)}\|\,\|\tilde{\eta}^{(l+1)}\|_{\mathscr{H}}\|\eta\|^{\frac{1}{2}}\|\eta\|_{\mathscr{H}}^{1/2}$$

$$\leqslant \frac{2\sqrt{2}\,m_0}{\nu}\|f\|\,\|\tilde{\eta}^{(l)}\|\,\|\tilde{\eta}^{(l+1)}\|_{\mathscr{H}}$$

$$\leqslant \varepsilon\|\tilde{\eta}^{(l+1)}\|_{\mathscr{H}}^2 + \frac{2m_0^2}{\varepsilon\nu^2}\|f\|^2\|\tilde{\eta}^{(l)}\|^2.$$

把它代入 (17.99)，就得到

$$\|\tilde{\eta}^{(l+1)}\|^2 + 2\tau(\nu - \varepsilon)\|\tilde{\eta}^{(l+1)}\|_{\mathscr{H}}^2 \leqslant \left(1 + \frac{4\tau m_0^2\|f\|^2}{\varepsilon\nu^2}\right)\|\tilde{\eta}^{(l)}\|^2.$$

若 $\varepsilon < \nu$，且记

$$\theta = \frac{1 + \dfrac{4\tau m_0^2}{\varepsilon\nu^2}\|f\|^2}{1 + \dfrac{2\tau(\nu - \varepsilon)}{m_0}},$$

则

$$\|\tilde{\eta}^{(l+1)}\|^2 \leqslant \theta\|\tilde{\eta}^{(l)}\|^2.$$

取 $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{2}\, m_0^{3/2}\|f\|}{\nu}$，于是

$$\theta = \frac{1 + \dfrac{2\sqrt{2}\,\tau m_0^{1/2}}{\nu}\|f\|^2}{1 + \dfrac{2\tau\nu}{m_0} - \dfrac{2\sqrt{2}\,\tau m_0^{1/2}\|f\|}{\nu}},$$

因为 $R_e < 1$，所以 $\theta < 1$，由此即得所证。

关于内迭代过程误差的影响，可见 Kuo Ben-yu(1977)。

可以从物理角度来解释上面的迭代过程，若把 $\eta^{(l)}(x)$，$\varphi^{(l)}(x)$ 看作 η 和 φ 在 $l\tau$ 时刻和 x 点上的值，那末，(17.97) 又可视为解不定常问题 (12.63) 的差分格式 (12.71)，其中 $\delta = \sigma = 1$，即为隐式格式，并且 f 与 t 无关，而迭代过程收敛性，从某种意义上说，类似于非定常问题的近似解趋向于定常问题的近似解。

关于定常问题差分格式的迭代解与不定常问题差分格式终态解之间的相互关系，是 Frankel (1950) 最早揭示的。他研究了 Richardson 迭代过程与抛物型差分格式之间的关系。Engeli, Ginsburg, Rutishauser, Stiefel(1954) 和 Albrecht(1963) 则研究了三层迭代方法。Hodgkins (1967) 还研究了 Vargar (1962) 的 Чебышев 迭代方法与相应的不定常问题终态解之间的关系。Otter (1965) 把这类方法称为动态松弛法。此外，Harlow，Fromm (1965)，Macagno(1965) 等把这个方法应用于流体计算，Hung, Macagno(1966) 则很早就用同一个计算程序计算定常与不定常问题。但是，Frankel(1950) 的分析方法不能简单地应用于非线性问题。

郭本瑜 (1979a) 从另一个角度来考虑这一问题。事实上在一定条件下，(12.63) 和 (17.90) 都具有广义解。若广义 Reynolds 数 $\bar{R}_e < 1$，则它还是唯一解，其中

$$\bar{R}_e = \frac{2\sqrt{2}\,\bar{m}_0^{3/2}}{\nu^2}\|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad \bar{m}_0 = \sup_{V \in H_0^1(\Omega)} \frac{\|V\|_{L^2(\Omega)}^2}{|V|_{H^1(\Omega)}^2}.$$

定理 17.23 假设 (12.63) 和 (17.90) 具有相同的右端 f, f 与 t 无关, $H(t)$, $\Phi(t)$ 是 (12.63) 的解, H, Φ 是 (17.90) 的解,则当 $\bar{R}_c < 1$ 时,

$$\|H(t) - H\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant e^{-at}\|H(0)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

其中 $a = 2\nu\bar{m}_0^{-1}(1 - \bar{R}_c)$.

证明 记 $H(t) = H + \tilde{H}(t)$, $\Phi(t) = \Phi + \tilde{\Phi}(t)$, 则有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{H}(t)}{\partial t} + \dfrac{\partial \tilde{H}(t)}{\partial x_1}\dfrac{\partial(\Phi + \tilde{\Phi}(t))}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \tilde{H}(t)}{\partial x_2}\dfrac{\partial(\Phi + \tilde{\Phi}(t))}{\partial x_1} \\ \qquad - \nu\Delta\tilde{H}(t) = \dfrac{\partial H}{\partial x_2}\dfrac{\partial \tilde{\Phi}(t)}{\partial x_1} - \dfrac{\partial H}{\partial x_1}\dfrac{\partial \tilde{\Phi}(t)}{\partial x_2}, \\ \qquad\qquad x \in \Omega,\ t > 0, \\ \Delta\tilde{\Phi}(t) + \tilde{H}(t) = 0, \qquad x \in \Omega,\ t > 0, \\ \tilde{H}(t) = \tilde{\Phi}(t) = 0, \qquad x \in \Gamma,\ t \geqslant 0. \end{cases} \tag{17.100}$$

把上面的第一式对 $\tilde{H}(t)$ 求内积,则有

$$\frac{d\|\tilde{H}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}}{dt} + 2\nu|\tilde{H}(t)|^2_{H^1(\Omega)} = F, \tag{17.101}$$

其中

$$F = 2\left(\tilde{H}(t),\ \frac{\partial H}{\partial x_2}\frac{\partial \tilde{\Phi}(t)}{\partial x_1} - \frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\partial \tilde{\Phi}(t)}{\partial x_2}\right)$$

$$= 2\left(H,\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x_1}\frac{\partial \tilde{\Phi}(t)}{\partial x_2} - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x_2}\frac{\partial \tilde{\Phi}(t)}{\partial x_1}\right).$$

由 Ладыженская (1961) 著作的第一章中的引理 1 得到

$$|F| \leqslant 4\sqrt{2}\,|\tilde{H}(t)|_{H^1(\Omega)}\|H\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}|H|^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)}$$

$$\times |\tilde{\Phi}(t)|^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)}|\tilde{\Phi}(t)|^{\frac{1}{2}}_{H^2(\Omega)}.$$

又由 (17.100) 的第二式和 Ладыженская (1961) 第一章中的 (20) 式得到

$$|\tilde{\Phi}(t)|_{H^1(\Omega)} \leqslant \bar{m}_0|\tilde{H}(t)|_{H^1(\Omega)},$$

$$|\tilde{\Phi}(t)|^2_{H^2(\Omega)} \leqslant \|\Delta\tilde{\Phi}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \bar{m}_0|\tilde{H}(t)|^2_{H^1(\Omega)},$$

此外,把 (17.90) 对 H 求内积得到

$$\|H\|_{H^1(\Omega)} < \frac{\bar{m}_0^{1/2}}{\nu} \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

所以

$$\|H\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\|H\|^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)} \leqslant \frac{\bar{m}_0^{3/4}}{\nu} \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

从而

$$|F| \leqslant \frac{4\sqrt{2}\,\bar{m}_0^{3/2}}{\nu} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\widetilde{H}(t)\|_{H^1(\Omega)}.$$

把它代入 (17.101)，就得到

$$\frac{d\|\widetilde{H}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}}{dt} + \frac{2\nu}{\bar{m}_0}(1-\bar{R}_e)\|\widetilde{H}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant 0,$$

由此即得所证的结论.

根据上面的分析，可以得到下列结论：

(i) 对任意的 ε，可选取 T_0，使得当 $t \geqslant T_0$ 时，

$$\|\widetilde{H}(t)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

其中

$$T_0 = \frac{2}{a}\left|\log\frac{\varepsilon}{2\|H(0)\|_{L^2(\Omega)}}\right|.$$

又用 §12.7 中的某种格式计算 $H(t)$ 的近似解 $\eta(t)$，若形式逼近误差是 R_h，$|R_h| \leqslant c_1 h^{s_a}$，且满足收敛性的各种条件，则

$$\|H(t)-\eta(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c_1 c_2 h^{2s_a} e^{c_3 T_0},$$

因此当 $h < \sqrt[2s_a]{\dfrac{\varepsilon^2 e^{-c_3 T_0}}{4c_1 c_2}}$ 时，$\|H(T_0)-\eta(T_0)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. 把以上两步合起来，看作为一个总的迭代过程，则有

$$\|\eta(T_0) - H\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \varepsilon.$$

(ii) 总的迭代过程的收敛性与许多因素有关，若 $\bar{R}_e$ 太大(例如 ν 太小，$\|f\|^2_{L^2(\Omega)}$ 太大或者 $\bar{m}_0$ 太大)，就会破坏定理 17.23 的条件，于是整个迭代过程可能不收敛. 若 τ 太大，则可能破坏 § 12.7 中的差分格式的收敛性或稳定性条件，从而 $\eta(t)$ 也可能不收敛到 $H(t)$，因此总的迭代过程也不收敛.

(iii) 迭代的精度与许多因素有关．若 T_0 太小，$H(t)$ 与 H 相差太大，所以无论 h 怎么小，总的误差都过大．反之，若 h 太大，则 $H(t)$ 与 $\eta(t)$ 相差太大，从而无论 T_0 多么大，总的误差仍很大．迭代误差还与初始迭代解有关．若边界值不为零，则还与边值条件处理方法有关．

(iv) 记 $\lambda = \frac{\tau}{h^2}$，那末总的计算工作量大致为 L_0，

$$L_0 = \frac{T_0}{\lambda h^2} \approx \frac{2}{\lambda a}\left|\log \frac{\varepsilon}{2\|H(0)\|_{L^2(\Omega)}}\right|\left|\frac{4c_1c_2}{\varepsilon^2}\right|^{\frac{1}{s_\alpha}}\left|\frac{\varepsilon}{2\|H(0)\|_{L^2(\Omega)}}\right|^{\frac{2\nu}{a s_\alpha}}.$$

显然，当 ν，ε 较大时，L_0 较小；而当 $\|f\|_{L^2(\Omega)}$，$\|H(0)\|_{L^2(\Omega)}$ 或 c_1、c_2 较大时，L_0 就较大．又当解较光滑时，s_α 就较大，从而 L_0 也较小．

选取 $\alpha = \alpha''$ 的优点是 $\|H(0)\|$ 只影响收敛速度，而与收敛与否无关．但一般说来，是有关系的．

上面的分析与 Roache (1972, 1976), Greenspan (1974) 所总结的实际计算经验相吻合．

郭本瑜 (1980c) 还研究了三维涡度方程的稳定化方法． 他证明，若 H 是原问题的解，而 $H(0)$ 在 H 的某个邻域内，则稳定化方法是收敛的．

17.8 Navier-Stokes 方程的定常问题

设 $n \leqslant 3$，n 维 Navier-Stokes 方程的齐次边值问题是

$$\begin{cases}(U \cdot \nabla U) - \nu\Delta U + \nabla P = f, & x \in \Omega, \\ \nabla \cdot U = 0, & x \in \Omega, \\ U = 0, & x \in \Gamma.\end{cases} \tag{17.102}$$

其差分格式格式是

$$\begin{cases}d^{(\alpha)}(u(x), u(x)) - \nu\Delta_h u(x) + G(p(x)) = f(x), & x \in \Omega_h, \\ D(u(x)) = 0, & x \in \Omega_h, \\ u(x) = 0, & x \in \Gamma_h,\end{cases} \tag{17.103}$$

其中差分算子 $d^{(\alpha)}(v, w)$，$D(v)$ 和 $G(\varphi)$ 的定义见§12.8.

用 $\mathscr{H}$ 表示边值为零且 $D(v)=0$ 的函数的集合，其内积与范数是

$$(v, w)_{\mathscr{H}}=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}((v_{x_m}, w_{x_m})+(v_{\bar{x}_m}, w_{\bar{x}_m}))+S(v, w),$$

$$\|v\|_{\mathscr{H}}^2=(v, v)_{\mathscr{H}}.$$

假定 (f, w) 是 $\mathscr{H}$ 上的线性连续泛函，则存在元素 $F\in\mathscr{H}$，使得 $(f, w)=(F, w)_{\mathscr{H}}$，并且 $|(f, w)|\leqslant\|F\|_{\mathscr{H}}\|w\|_{\mathscr{H}}$.

定理 17.24 若 $\alpha=\frac{1}{2}$，$\|F\|_{\mathscr{H}}$ 对 h 一致有界，那末(17.103)至少有一个解，并且

$$\|u\|_{\mathscr{H}}\leqslant\frac{1}{\nu}\|F\|_{\mathscr{H}}.$$

证明 把 (17.103) 的第一式对 $w\in\mathscr{H}$ 求内积，则由(12.83)，(12.85) 和引理 4.10 得到

$$\nu(u, w)_{\mathscr{H}}+(w, d^{(\frac{1}{2})}(u, u))=(F, w)_{\mathscr{H}}.$$

但对固定的 u，由引理 4.6 和 4.7 得到

$$|(d^{\frac{1}{2}}(u, u), w)|=|(d^{\frac{1}{2}}(w, u), u)|$$
$$\leqslant c_1\|w\|_{\mathscr{H}}\|u\|^{\frac{4-n}{2}}\|u\|_{\mathscr{H}}^{n/2}\leqslant c_2\|w\|_{\mathscr{H}},$$

所以 $(d^{(\frac{1}{2})}(u, u), w)$ 也是 $\mathscr{H}$ 上的线性连续泛函. 因此存在元素 $\sigma u\in\mathscr{H}$，使得 $(w, d^{(\frac{1}{2})}(u, u))=(\sigma u, w)_{\mathscr{H}}$，从而 (17.103) 等价于下列非线性算子方程

$$u+\frac{1}{\nu}(\sigma u-F)=0,\quad u\in\mathscr{H}.$$

设 $\{u^{(l)}\}$ 是 $\mathscr{H}$ 中的收敛序列，则当 l 充分大时，$\|u^{(l)}\|_{\mathscr{H}}$ 一致有界. 又可证明

$$|(\sigma u^{(l_1)}-\sigma u^{(l_2)}, w)_{\mathscr{H}}|=|(w, d^{(\frac{1}{2})}(u^{(l_1)}-u^{(l_2)}, u^{(l_1)}))|$$
$$+|(w, d^{(\frac{1}{2})}(u^{(l_2)}, u^{(l_1)}-u^{(l_2)}))|\leqslant c_3\|u^{(l_1)}$$
$$-u^{(l_2)}\|_{\mathscr{H}}\|w\|_{\mathscr{H}}.$$

取 $w=\sigma u^{(l_1)}-\sigma u^{(l_2)}$，则得到

$$\|\sigma u^{(\lambda_1)} - \sigma u^{(\lambda_2)}\|_{\mathscr{H}} \leqslant c_3\|u^{(\lambda_1)} - u^{(\lambda_2)}\|_{\mathscr{H}},$$

因此 σ 是连续算子．根据 Brouwer 定理，只要证明下列方程的一切可能解都是一致有界的，

$$u^{(\lambda)} + \lambda(u^{(\lambda)} - F) = 0, \quad \lambda \in \left[0, \frac{1}{\nu}\right].$$

事实上，若用 $u^{(\lambda)}$ 乘上式并求内积，则有

$$\|u^{(\lambda)}\|_{\mathscr{H}}^2 \leqslant \lambda\|u^{(\lambda)}\|_{\mathscr{H}}\|F\|_{\mathscr{H}},$$

这就完成了定理的证明．

下面来讨论稳定性．假定 u，p 和 f 的误差分别为 $\tilde{u}$，$\tilde{p}$ 和 $\tilde{f}$．记

$$R_e = \frac{2^{\frac{n}{2}} n m_0^{\frac{6-n}{4}}\|f\|}{\nu^2}, \quad m_0 = \sup_{v\in\mathscr{H}} \frac{\|v\|^2}{\|v\|_{\mathscr{H}}^2}.$$

定理 17.25 若 $\alpha = \frac{1}{2}$，$R_e < 1$，则 $\|\tilde{u}\|_{\mathscr{H}}^2 \leqslant c_4\|\tilde{f}\|^2$．

证明 误差方程是

$$\begin{cases} d^{(\frac{1}{2})}(\tilde{u}(x), u(x) + \tilde{u}(x)) + d^{(\frac{1}{2})}(u(x), \tilde{u}(x)) - \nu\Delta_h\tilde{u}(x) \\ \qquad\qquad + G(\tilde{p}(x)) = \tilde{f}(x), & x \in \Omega_h, \\ D(\tilde{u}(x)) = 0, & x \in \Omega_h, \\ \tilde{u}(x) = 0, & x \in \Gamma_h. \end{cases}$$

把上面的第一，二两式分别对 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{p}$ 求内积，于是由 (12.83)，(12.85) 和引理 4.10 得到

$$(\nu - \varepsilon\nu)\|\tilde{u}\|_{\mathscr{H}}^2 \leqslant |(\tilde{u}, d^{(\frac{1}{2})}(u, \tilde{u}))| + \frac{c_5}{\varepsilon}\|\tilde{f}\|^2. \quad (17.104)$$

由 (12.85) 和引理 4.6，4.7 得到

$$\begin{aligned} |(\tilde{u}, d^{\frac{1}{2}}(u, \tilde{u}))| &= |(u, d^{(\frac{1}{2})}(\tilde{u}, \tilde{u}))| \leqslant n\|\tilde{u}\|_{\mathscr{H}}\|u\tilde{u}\| \\ &\leqslant 2^{\frac{n}{2}} n\|\tilde{u}\|_{\mathscr{H}}\|\tilde{u}\|^{\frac{4-n}{4}}\|\tilde{u}\|_{\mathscr{H}}^{\frac{n}{4}}\|u\|^{\frac{4-n}{4}}\|u\|_{\mathscr{H}}^{\frac{n}{4}} \\ &\leqslant 2^{\frac{n}{2}} n m_0^{\frac{4-n}{8}}\|\tilde{u}\|_{\mathscr{H}}^2\|u\|^{\frac{4-n}{4}}\|u\|_{\mathscr{H}}^{\frac{n}{4}}. \end{aligned}$$

又把 (17.103) 的第一，二两式分别对 u 和 p 求内积，相加后得到

$$\nu\|u\|_{\mathscr{H}}^2 \leqslant \|u\|\|f\| \leqslant m_0^{\frac{1}{2}}\|f\|\|u\|_{\mathscr{H}},$$

所以

$$\|u\|^{\frac{4-n}{4}}\|u\|_{\mathscr{H}}^{n/4} \leqslant m_0^{\frac{4-n}{8}}\|u\|_{\mathscr{H}} \leqslant \frac{m_0^{\frac{8-n}{8}}}{\nu}\|f\|.$$

把上式代入 (17.104)，就得到

$$\nu(1-R_e-\varepsilon)\|\tilde{u}\|_{\mathscr{H}}^2 \leqslant \frac{c_5}{\varepsilon}\|\tilde{f}\|^2.$$

取 ε 适当小，即得所证的结论.

定理 17.25 表示格式 (17.103) 具有广义稳定性指标

$$s = -\infty,$$

并且它的解是唯一的. 如果 (17.103) 的第二式也有误差，那末稍微修改定理 17.25 的证明过程，也可以得到类似的结果，并根据 §3.1 中的理论，得到格式的收敛性.

还可以构造 (17.102) 的特征型格式和 Петров-Галеркин 格式.

我们可以用松弛迭代法计算 (17.103). 另一个途径是稳定化方法，它基于下面的结果:

定理 17.26 假设 $U(t)$ 和 U 分别是 (12.80) 和 (17.102) 的解，它们有共同的与 t 无关的右端项 f，且边值都为零. 那末，当 $\bar{R}_e < 1$ 时，

$$\|U(t)-U\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant e^{-at}\|U(0)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

其中

$$a = \frac{2\nu}{\bar{m}_0}(1-\bar{R}_e),$$

$$\bar{R}_e = \frac{2^{\frac{n}{2}} n \bar{m}_0^{\frac{6-n}{4}}\|f\|_{L^2(\Omega)}}{\nu^2},$$

$$\bar{m}_0 = \sup_{v\in\mathscr{F}}\frac{\|v\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|v\|_{H^1(\Omega)}^2},$$

$$\mathscr{F} = \{v/v\in H_0^1(\Omega),\ \nabla\cdot v = 0\}.$$

与定理 17.26 有关的结果还可见 Finn (1965a, b), Smith (1965), Finn, Smith (1967) 和 Heywood (1970) 的文章.

关于定常粘性流体问题的计算方法还可见 Roache (1972, 1976) 的书. 在该书中，还详细地讨论了边值处理方法.

附　　录

§18　偏微分方程反问题的数值方法

本节介绍偏微分方程反问题的一些数值方法.

18.1　反问题的一般概念

假设 $\mathfrak{B}_1$ 和 $\mathfrak{B}_2$ 是两个 Banach 空间，算子 L 的定义域 $D(L)\in\mathfrak{B}_1$，值域 $R(L)\in\mathfrak{B}_2$，$g\in\mathfrak{B}_2$，并考虑下列问题

$$LU=g,\tag{18.1}$$

那么，存在两类互反的问题．第一类问题是根据已知的 L 和 g 来确定 U，另一类则根据 g 和 L 的结构，以及某些附加条件来确定 U 和 L 的详细表达式．由于通常对第一类问题的研究比较完善，故一般把第二类问题称为反问题．对应于不同的 L，g 和不同的附加条件，就得到不同的反问题，这可参见 Тихонов, Арсенин(1974), Keller (1976) 的文章.

反问题的思想及其研究方法很早就提出了．例如 Heygens 曾在 1673 年设计了一种摆线，使得钟摆在此曲线上的运动周期与初始角无关．又例如 Abel (1826) 设计了一种等时曲线，即使得质点在重力作用下，从此曲线上任何一个位置运动到底部的时间都相等．由此提出的 Abel 变换已被成功地应用于地层结构分析．此外，Radon (1917) 变换也是求解反问题的有效工具．X 射线全信息照相技术的发明，原理上就是利用了它的逆变换．近来，由于大型电子计算机的发展和应用，克服了求解反问题所遇到的大批数据处理的困难，从而有力地推动了反问题数值方法的研究.

在实际问题中，经常遇到偏微分方程的反问题.

例 18.1　地球物理勘探，即利用人工测量得到的地震波来确

定地层结构．用 λ 和 μ 分别表示 Lamé 系数，U 和 ρ 分别表示位移向量和密度，于是它们满足下列方程

$$\rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot U)+\mu\Delta U+\nabla\lambda(\nabla\cdot U)+\nabla\mu\times(\nabla\times U)+2(\nabla\mu\cdot\nabla)U. \tag{18.2}$$

初始位移向量和速度是已知的，测量所得的数据是位移向量及其法向导数．此外，在地面下的边界上，假定满足某些条件，我们需要确定的是 λ 和 μ．这样就构成了一个二阶双曲型方程组的反问题．

例 18.2 海洋物理学，即从测量得到的表面声波，探测海洋的结构．假设海水是可压缩的无粘性流体，速度分布是层状的，海底平坦光滑且是刚性的，海洋深度是 H，P 是压力，U 是流体粒子的速度，ρ 是平衡密度，c 是绝热声速，$c^2(x)=(\rho(x)\kappa)^{-1}$，$\kappa$ 是可压缩系数，于是它们满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}=-\rho^{-1}(x)\dfrac{\partial P}{\partial x}, & 0<x<H,\ 0<t\leqslant T,\\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial t}=-\rho(x)c^2(x)\dfrac{\partial U}{\partial x}, & 0<x<H,\ 0<t\leqslant T,\\[2mm] U(H,t)=0, & 0<t\leqslant T,\\ P(0,t)=f(t), & 0<t\leqslant T,\\ U(x,0)=P(x,0)=0, & 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases} \tag{18.3}$$

其中 $f(t)$ 可由测量得到．此外还可测得 $\dfrac{\partial P}{\partial x}(0,t)$ 的值．需要确定的是 $\rho(x)$ 或 $c(x)$．这样就构成了一个一阶双曲型方程组的反问题．

例 18.3 应用微波测量决定电解质的非均匀性．用 $E(x,t)$ 和 $B(x,t)$ 表示电场与磁场强度，$\mu(x,t,B)$ 是导磁率，$\varepsilon(x,t,E)$ 是解电常数，它们满足下列 Maxwell 方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial(\mu E)}{\partial t}=-\nabla\times E, & x\in\Omega,\ 0<t\leqslant T,\\[2mm] \dfrac{\partial(\varepsilon B)}{\partial t}=\nabla\times B, & x\in\Omega,\ 0<t\leqslant T.\end{cases} \tag{18.4}$$

μ 和初始时刻的 E, B 是已知的. 测量所得的数据是入射和反射的 E 和 B. 需要确定的是 ε. 这也是一阶偏微分方程组的反问题.

例 18.4 确定非均匀材料内部的热传导性质. 用 U 表示温度, μ 是热传导系数, ρ 是密度, c 是比热,并考虑下列问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = \mu \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}, & 0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant T, \\ U(0, t) = g_0(t), & 0 < t \leqslant T, \\ U(1, t) = g_1(t), & 0 < t \leqslant T, \\ -\rho c \mu \dfrac{\partial U}{\partial x}(0, t) = h(t), & 0 < t \leqslant T, \end{cases} \tag{18.5}$$

其中 ρ, c, g_0, g_1 和 h 是已知的. 需要确定的是系数 $\mu(t)$. 这是一个抛物型方程的反问题.

有时把时间反演问题也称为反问题. 例如考虑下列问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = \mu \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}, & 0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant T, \\ U(0, t) = g_0(t), & 0 < t \leqslant T, \\ U(1, t) = g_1(t), & 0 < t \leqslant T, \end{cases} \tag{18.6}$$

其中 $\mu > 0$. $U(x, T)$ 是已知的. 需要确定的是 $U(x, 0)$. 经过适当的变量替换,可把这问题化为 § 10.7 中的反热传导问题.

在 Chen (1981) 中,还列举了许多实例.

关于反问题的数值方法已有许多结果. 一个好的算法大致应满足下列条件:

(i) 便于测量数据. 因为在求解反问题时, 需要在边界上测量充分的数据, 而不同的数据对应于不同的数值方法. 如果所需要的数据很难测量,则就会失去方法的实用意义.

(ii) 便于计算并且误差较小. 由于反问题的数值方法往往导致不适定的定解问题, 因此误差主要来源于不适定问题的数值解法.

(iii) 所提供的方法便于推广到多维问题和较复杂的区域.

在今后几节中我们将介绍一些常用的方法.

关于偏微分方程反问题及其数值方法的理论研究, 也有某些

结果。例如 Jones (1962), Douglas, Jones (1962) 研究了 (18.5), 证明了解的存在性,唯一性和数值解的收敛性. Suzaku, Murayama (1980) 和 Murayama (1981) 则证明了某一类抛物型方程反问题的解的唯一性. 关于其他类型反问题的理论研究也有一些结果, 例如 Гельфанд, Левитан (1951) 关于反散射问题的研究.

18.2 脉冲谱方法

Tsien, Chen (1974) 和 Chen, Tsien (1977) 在计算流体动力学的一类反问题时提出和发展了脉冲谱方法, 即 *PST* 方法. 后来, Tsien, Chen (1978) 和 Hatcher, Chen (1983) 分别把它应用于电磁波问题和声波问题. Chen (1979) 还证明, 在一定的条件下,这种算法具有二次收敛性.

PST 方法的主要步骤是:

(i) 在区域 Ω 的边界 Γ 上,输入脉冲 $U_{in}(x, t)$ 或 $\dfrac{\partial U_{in}}{\partial n}(x,t)$, 并测量传递或反射的输出脉冲 $U_{out}(x, t)$ 或 $\dfrac{\partial U_{out}}{\partial n}(x,t)$. 为了提高精度,一般在 Γ 的不同位置上进行这种实验.

(ii) 用关于变量 t 的 Laplace 变换或 Fourier 变换, 把上述数据转化为谱域上的数据 $U_{in}(x, s)$, $\dfrac{\partial U_{in}}{\partial n}(x, s)$, $U_{out}(x, s)$ 和 $\dfrac{\partial U_{out}}{\partial n}(x, s)$ 等,并对一系列 $\{s_j\}$ 进行采样. 在实际问题中, 测量所得的数据往往本身就是离散的,此时可应用离散 Laplace 变换或离散 Fourier 变换,把它们转化为谱域上的数据.

(iii) 对方程本身也进行相应的 Laplace 变换或 Fourier 变换,然后构造一种迭代方法,并应用差分方法或有限元方法, 以及上面采样得到的数据,近似地得到方程中需要确定的一些系数.

下面以线性偏微分方程组的反问题来说明 *PST* 方法. 设 $x=(x_1, \cdots, x_n)^*$, Ω 是 $\mathscr{R}^n$ 中的有界开域, Γ 是适当光滑的边界, $\bar{\Omega}=\Omega\cup\Gamma$. L_d 是线性偏微分算子, L_b 是相应的边界微分算子,它满足一定的正规性条件, L_i 是初值算子. 假设在 L_d 中含有系数

$c(x)$, L_d 对 $c(x)$ 是线性的. 今考虑下列问题

$$\begin{cases} L_d(c(x), t)U(x, t) = 0, & x \in \Omega,\ 0 < t \leqslant T, \\ L_b U(x, t) = g(t), & x \in \Gamma,\ 0 < t \leqslant T, \\ L_i U(x, 0) = \xi(x), & x \in \bar{\Omega}. \end{cases} \tag{18.7}$$

正问题是从已知的 c, g, ξ 来确定 U. 反问题则是根据 g, ξ 和 U 在 Γ' 上的某些数据 $\left(例如 U, \frac{\partial U}{\partial n}\right)$ 来确定 U 和 c, 其中 Γ' 是 Γ 的适当的非空子集.

把 (18.7) 在 t 方向进行 Laplace 变换或 Fourier 变换, 于是得到

$$\begin{cases} \hat{L}_d(c(x), s)\hat{U}(x, s) = \hat{f}(x, s), \\ \hat{L}_b \hat{U}(x, s) = \hat{g}(x, s), \end{cases} \tag{18.8}$$

其中 $\hat{U}(x, s)$ 是 $U(x, t)$ 的 Laplace 变换或 Fourier 变换, $\hat{L}_d$ 和 $\hat{L}_b$ 分别表示经变换得到的相应的关于 x 的微分算子和边界微分算子, s 是参数. 类似地, 把 Γ' 上的数据也转化为它的 Laplace 变换或 Fourier 变换.

在 (18.8) 中含有两个未知函数 $\hat{U}(x, s)$ 和 $c(x)$. 今用迭代法来计算它. 用 k 表示迭代次数, 并记

$$\begin{cases} \hat{U}_{k+1}(x, s) = \hat{U}_k(x, s) + \delta\hat{U}_k(x, s), \\ c_{k+1}(x) = c_k(x) + \delta c_k(x). \end{cases} \tag{18.9}$$

代入 (18.8) 并略去关于 $\delta\hat{U}_k(x, s)$ 和 $\delta c_k(x)$ 的高阶小量, 整理后得到

$$\begin{cases} \hat{L}_d(c_k(x), s)\hat{U}_k(x, s) = \hat{f}(x, s), & x \in \Omega, \\ \hat{L}_b \hat{U}_k(x, s) = \hat{g}(x, s), & x \in \Gamma, \end{cases} \tag{18.10}$$

和

$$\begin{cases} \hat{L}_d(c_k(x), s)\delta\hat{U}_k(x, s) = \hat{F}(x, s, \cdots), & x \in \Omega, \\ \hat{L}_b \delta\hat{U}_k(x, s) = 0, & x \in \Gamma, \end{cases} \tag{18.11}$$

其中 $\hat{F}$ 是关于 x, s, $\delta c_k(x)$, $\hat{U}_k(x, s)$ 以及 $\hat{U}_k(x, s)$ 对 x 的某些导数的函数.

因为 $\hat{L}_d$ 对 $c_k(x)$ 是线性的, 所以 $\hat{F}$ 对 $c_k(x)$ 也是线性的, 故

可应用关于微分算子 $\hat{L}_d$ 的 Green 函数 $G_k(x, y, s)$，把 (18.11) 化为关于 $c_k(x)$ 的第一类 Fredholm 积分方程，也就是说，对 $x \in \Gamma'$，有

$$\int_\Omega G_k(x, y, s)\hat{F}(y, s, \delta c_k(y), \cdots)dy = \hat{U}_{k+1}(x, s) - \hat{U}_k(x, s), \qquad (18.12)$$

或

$$\int_\Omega \frac{\partial G_k}{\partial n}(x, y, s)\hat{F}(y, s, \delta c_k(y), \cdots)dy = \frac{\partial \hat{U}_{k+1}}{\partial n}(x, s) - \frac{\partial \hat{U}_k}{\partial n}(x, s). \qquad (18.13)$$

为了加速收敛，应尽量利用测得的已知数据．例如当 $x \in \Gamma'$ 时，用下式代替 (18.12)

$$\int_\Omega G_k(x, y, s)\hat{F}(y, s, \delta c_k(y), \cdots)dy = \hat{U}(x, s) - \hat{U}_k(x, s). \qquad (18.14)$$

相应地，当 $x \in \Gamma'$ 时，用下式代替 (18.13)

$$\int_\Omega \frac{\partial G_k}{\partial n}(x, y, s)\hat{F}(y, s, \delta c_k(y), \cdots)dy = \frac{\partial \hat{U}}{\partial n}(x, s) - \frac{\partial \hat{U}_k}{\partial n}(x, s). \qquad (18.15)$$

在具体计算时，先选取 $c_0(x)$．假定 $c_k(x)$ 已经得到，则在一系列 $\{s_j\}$ 上，由 (18.10) 计算 $\hat{U}_k(x, s_j)$，并应用差分法计算 $\frac{\partial \hat{U}_k}{\partial n}(x, s_j)$．然后结合在 Γ' 上测得的数据的 Laplace 变换值或 Fourier 变换值 $\hat{U}(x, s_j)$，$\frac{\partial \hat{U}}{\partial n}(x, s_j)$，从 (18.14) 或 (18.15) 中解得 $\delta c_k(x)$．最后由 (18.9) 得到 $c_{k+1}(x)$．

假定 ε 是给定的迭代精度，$\|\cdot\|_c$ 是用来度量迭代误差的某种范数，那么，当 $\|c_{k+1} - c_k\|_c \leqslant \varepsilon$ 时，就把 $c_{k+1}(x)$ 作为 $c(x)$ 的近似解，否则重复上面的迭代过程．

下面举两个例子来说明上面的方法．为方便计，设 $n = 1$，并

把 $\frac{dw(x,s)}{dx}$ 简记为 $w'(x,s)$，等等.

例 18.5 (Chen, Tsien (1977)) 考虑问题 (18.3). 为方便计，设 $H=\kappa=1$. 应用 Fourier 变换得到

$$\begin{cases}(\rho^{-1}(x)\hat{P}'(x,s))'+s^2\hat{P}(x,s)=0, \quad 0<x<1,\\ \hat{P}(0,s)=\hat{g}(s),\\ \hat{P}'(1,s)=0.\end{cases} \tag{18.16}$$

相应地把 $P'(0,t)$ 变换为 $\hat{P}'(0,s)$. 假设

$$\hat{P}_{k+1}(x,s)=\hat{P}_k(x,s)+\delta\hat{P}_k(x,s),$$
$$\rho_{k+1}(x,s)=\rho_k(x)+\delta\rho_k(x).$$

把它们代入 (18.16) 后得到

$$\begin{cases}(\rho_k^{-1}(x)\hat{P}_k'(x,s))'+s^2\hat{P}_k(x,s)=0, \quad 0<x<1,\\ \hat{P}_k(0,s)=\hat{g}(s),\\ \hat{P}_k(1,s)=0,\end{cases} \tag{18.17}$$

和

$$\begin{cases}(\rho_k^{-1}(x)\delta\hat{P}_k'(x,s))'+s^2\delta\hat{P}_k(x,s)\\ \qquad =(\delta\rho_k(x)\rho_k^{-2}(x)\hat{P}_k'(x,s))', \quad 0<x<1,\\ \delta\hat{P}_k(0,s)=0,\\ \delta\hat{P}_k'(1,s)=0.\end{cases} \tag{18.18}$$

用 $G_k(x,y,s)$ 表示 (18.17) 第一式左端的微分算子的 Green 函数，并取 $x=0$，于是得到关于 $\delta\rho_k(x)$ 的第一类 Fredholm 积分方程

$$\int_0^1 G_k(0,y,s)(\delta\rho_k(y)\rho_k^{-2}(y)\hat{P}_k'(y,s))'dy$$
$$=\hat{P}(0,s)-\hat{P}_k(0,s), \tag{18.19}$$

或

$$\int_0^1 G_k'(0,y,s)(\delta\rho_k(y)\rho_k^{-2}(y)\hat{P}_k'(y,s))'dy$$
$$=\hat{P}'(0,s)-\hat{P}_k'(0,s). \tag{18.20}$$

下面来写出更具体的表达式. 例如，从 (18.20) 出发，应用分部积分公式和边界条件得到

$$-\int_0^1 \rho_k^{-2}(y)\frac{\partial^2 G_k}{\partial x\partial y}(0,y,s)\hat{p}_k'(y,s)\delta\rho_k(y)dy$$
$$=\hat{p}'(0,s)-\hat{p}_k'(0,s). \tag{18.21}$$

而 $G_k(x,y,s)$ 的表达式是

$$G_k(x,y,s)=\begin{cases}-M_k(y,s)N_k(x,s), & 0\leqslant x<y,\\ -M_k(x,s)N_k(y,s), & y<x\leqslant 1,\end{cases} \tag{18.22}$$

其中 M_k 和 N_k 分别满足下列方程组

$$\begin{cases}(\rho_k^{-1}M_k')'+s^2M_k=0, & 0<x<1,\\ M_k(0,s)=\hat{g}(s),\\ M_k'(1,s)=0,\end{cases} \tag{18.23}$$

和

$$\begin{cases}(\rho_k^{-1}N_k')'+s^2N_k=0, & 0<x<1,\\ N_k(0,s)=0,\\ N_k'(0,s)=\rho(0)\hat{g}^{-1}(s).\end{cases} \tag{18.24}$$

显然，M_k 和 N_k 是线性无关的. 不难验证在 $x=y$ 处，$G_k(x,y,s)$ 是连续的，并且还有（见 Chen (1981)）

$$\lim_{\substack{x\to y\\ x>y}}\frac{\partial}{\partial x}G_k(x,y,s)-\lim_{\substack{x\to y\\ x<y}}\frac{\partial}{\partial x}G_k(x,y,s)=\rho_k(y).$$

比较 (18.17) 和 (18.23)，即知 $M_k(y,s)=\hat{p}_k(y,s)$，因此

$$\frac{\partial G_k(0,y,s)}{\partial x}=-M_k(y,s)N_k'(0,s)$$
$$=-\rho(0)\hat{g}^{-1}(s)\hat{p}_k(y,s),$$
$$\frac{\partial^2 G_k(0,y,s)}{\partial x\partial y}=-\rho(0)\hat{g}^{-1}(s)\hat{p}_k'(y,s).$$

把以上两式代入 (18.21) 后得到

$$\int_0^1(\rho_k^{-1}(y)\hat{p}_k'(y,s))^2\delta_{\rho k}(y)dy=\rho^{-1}(0)\hat{g}(s)(\hat{p}'(0,s)$$
$$-\hat{p}_k'(0,s)). \tag{18.25}$$

在具体计算时，先选择 $\rho_0(x)$. 假定 $\rho_k(x)$ 已经得到，则取一系列 $\{s_i\}$，并由 (18.17) 解得 $\hat{p}_k(x,s_i)$. 再应用差分方法计算 $\hat{p}_k'(x,s_i)$ 的近似值，并结合测量数据 $\hat{p}'(0,s_i)$，由 (18.25) 计算得

到 $\delta\rho_k(x)$. 最后把 $\rho_k(x)$ 修正为 $\rho_{k+1}(x)$. 如此反复计算，直到达到给定的精度.

PST 方法也可应用于确定非均匀物体的热传导性质. Douglas, Jones (1962), Cannon (1963, 1964), Cannon, Duchateau (1973 a, b, 1978, 1980) 等都研究了抛物型方程反问题的数值方法,但他们的方法要求测量边界上的热流量,而这是很困难的. 此外，他们的方法也不易推广到多维问题和较复杂的区域. Chen, Liu (1981) 提出了另一种模式,并应用 *PST* 方法来计算，这就是下面的例子,它易于推广到三维问题.

例 18.6 假设 $c(x)$, $\rho(x)$, $g_0(t)$, $g_1(t)$ 和 $h(t)$ 是已知的，并需要根据下式来确定 $\mu(x)$,

$$\begin{cases} \rho c \dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)\dfrac{\partial U}{\partial x}\right), & 0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant T, \\ U(0,t) = g_0(t), & 0 < t \leqslant T, \\ U(1,t) = g_1(t), & 0 < t \leqslant T, \\ \dfrac{\partial U}{\partial x}(0,t) = h(t), & 0 < t \leqslant T, \\ U(x,0) = 0, & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{18.26}$$

由 Laplace 变换得到

$$\begin{cases} (\mu(x)\hat{U}'(x,s))' - \rho(x)c(x)s\hat{U}(x,s) = 0,\ 0 < x < 1, \\ \hat{U}(0,s) = \hat{g}_0(s), \\ \hat{U}(1,s) = \hat{g}_1(s), \\ \hat{U}'(0,s) = \hat{h}(s). \end{cases} \tag{18.27}$$

令

$$\begin{cases} \hat{U}_{k+1}(x,s) = \hat{U}_k(x,s) + \delta\hat{U}_k(x,s), \\ \mu_{k+1}(x) = \mu_k(x) + \delta\mu_k(x), \end{cases}$$

把它代入 (18.27), 并略去高阶小量,就可以得到关于 $\hat{U}_k(x,s)$ 和 $\delta\mu_k(x)$ 的两个方程式及其边界条件.由此导出的微分算子的 Green 函数为 $G_k(x,y,s)$,

$$G_k(x,y,s) = \begin{cases} -M_k(y,s)N_k(x,s), & 0 \leqslant x < y, \\ -M_k(x,s)N_k(y,s), & y < x \leqslant 1, \end{cases}$$

其中 M_k 和 N_k 是线性无关的,并分别满足下列方程组

$$\begin{cases}(\mu_k M_k')' - \rho c s M_k = 0, & 0 < x < 1, \\ M_k(0, s) = \hat{g}_0(s), \\ M_k(1, s) = 0,\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}(\mu_k N_k')' - \rho c s N_k = 0, & 0 < x < 1, \\ N_k(0, s) = 0, \\ N_k'(0, s) = \mu_k^{-1}(0)\hat{g}_0^{-1}(s).\end{cases}$$

不难验证,在 $x = y$ 处, $G_k(x, y, s)$ 是连续的, 而 $\frac{\partial G_k}{\partial x}$ 的跃度恰为 $\mu_k^{-1}(y)$. 又若 $\hat{g}_1(s) = 0$, 则 $M_k = \hat{U}_k$, 从而得到 PST 方法的三个基本方程

$$\begin{cases}(\mu_k \hat{U}_k'(x, s))' - \rho c s \hat{U}_k(x, s) = 0, & 0 < x < 1, \\ \hat{U}_k(0, s) = \hat{g}_0(s), \\ \hat{U}_k(1, s) = 0,\end{cases}$$

$$\int_0^1 (\hat{U}_k(y, s))^2 \delta\mu_k(y) dy = \mu_k(0)\hat{g}_0(s)(\hat{U}_k'(0, s) - \hat{h}(s)),$$

和

$$\mu_{k+1}(x) = \mu_k(x) + \delta\mu_k(x).$$

18.3 基于积分变换的其他方法

在 PST 方法中应用了 Green 函数,但也可以应用其他基本函数来计算,可见 Gray (1980), Hagin (1980,1981a, b) 和 Gray, Hagin (1982) 的文章. 例如考虑由 Fourier 变换得到的下列问题

$$\begin{cases}\hat{w}''(x, s) + \dfrac{s^2}{v^2(x)}\hat{w}(x, s) = 0, & 0 < x < H, \\ \hat{w}'(0, s) + \dfrac{is}{v(0)}\hat{w}(0, s) = 2is, \\ \hat{w}'(H, s) - \dfrac{is}{v(1)}\hat{w}(H, s) = 0.\end{cases} \tag{18.28}$$

假设 $\tau = \int_0^x \frac{ds}{v(s)}$, $U(\tau, s) = w(x, s)$, $c(\tau) = v(x)$, 于是把上

式化为

$$\begin{cases} \hat{U}''(\tau, s) - \dfrac{c'}{c}\hat{U}'(x, s) + s^2\hat{U}(\tau, s) = 0, \quad 0 < x < H_1, \\ \hat{U}'(0, s) + is\hat{U}(0, s) = 2isc(0), \\ \hat{U}'(H_1, s) - is\hat{U}(H_1, s) = 0. \end{cases}$$

为方便计，设 $H_l = c(0) = 1$，则得到

$$\begin{cases} \hat{L}\hat{U} = \left(\dfrac{\hat{U}'}{c}\right)' + \dfrac{s^2\hat{U}}{c} = 0, \qquad 0 < \tau < 1, \\ \hat{U}'(0, s) + is\hat{U}(0, s) = 2is, \\ \hat{U}'(1, s) - is\hat{U}(1, s) = 0. \end{cases} \tag{18.29}$$

设 $\hat{U}_l(\tau, s)$ 是 $\hat{U}(\tau, s)$ 的一次近似解，它和 $\hat{U}(\tau, s)$ 满足相同的边界条件。令 $\hat{W}_l = \hat{U} - \hat{U}_l$，则得到

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\hat{U}\hat{L}\hat{U}_l - \hat{U}_l\hat{L}\hat{U})d\tau &= \int_0^1 \hat{U}\hat{L}\hat{U}_l d\tau = \int_0^1 (\hat{U}_l + \hat{W}_l)\hat{L}\hat{U}_l d\tau \\ &= \frac{1}{c(1)}[\hat{U}(1, s)\hat{U}_l'(1, s) - \hat{U}'(1, s)\hat{U}_l(1, s)] \\ &\quad - \hat{U}(0, s)\hat{U}_l'(0, s) + \hat{U}'(0, s)\hat{U}_l(0, s) \\ &= -2is\hat{W}_l(0, s). \end{aligned} \tag{18.30}$$

如果 $\gamma = \dfrac{c'}{c}$ 适当小，则取 $\hat{U}_l(\tau, s) = e^{is\tau}$。记 $\hat{L}_0W(\tau, s) = W''(\tau, s) + s^2W(\tau, s)$，则 $\hat{L}_0\hat{U}_l = 0$，从而有

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\hat{U}_l\hat{L}_0\hat{U} - \hat{U}\hat{L}_0\hat{U}_l)d\tau &= \int_0^1 \hat{U}_l\hat{L}_0\hat{U}d\tau \\ &= \int_0^1 e^{is\tau}\left(\frac{c'}{c}\right)\hat{U}'d\tau = \int_0^1 e^{is\tau}\left(\frac{c'}{c}\right)[ise^{is\tau} + \hat{W}_l']d\tau \\ &= 2is\hat{W}_l(0, s). \end{aligned} \tag{18.31}$$

Gray (1980) 证明，如果 $\|\gamma\|_{L^1} = O(\epsilon) < 1$，则上式中包含 W_l' 的项大致为 $O(\epsilon^3)$，略去这一项后近似地得到

$$\int_0^1 e^{2is\tau}\gamma(\tau)d\tau = 2\hat{W}_l(0, s). \tag{18.32}$$

取 $s_k = \dfrac{k\pi}{2}$，则由上式得到

$$\int_0^1 \gamma(\tau)\sin k\pi\tau d\tau = 2\mathrm{Im}\,\hat{W}_l(0,s_k) = \frac{b_k}{2},$$

其中 $\mathrm{Im} z$ 表示 z 的虚部．因此

$$\gamma(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi\tau$$

$$= 4\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Im}\,\hat{W}_l(0,s_k)\sin k\pi\tau,$$

并由此推得

$$c(\tau) = \exp\left(4\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Im}\,\hat{W}_l(0,s_k)(1-\cos k\pi\tau)/k\pi\right).$$

Gray，Hagin (1982) 还证明，略去 $\hat{W}_l$ 所导致的误差大致为 $\frac{1}{4\pi}\|\gamma\|^3_{L^3(0,1)}$.

如果 W_l 很小，而 γ 不很小，那么宜取 $\hat{U}_l(s,\tau) = \sqrt{c(\tau)}\,e^{is\tau}$，(见 Hagin (1980, 1981 b))．在 (18.30) 中略去关于 $\hat{W}_l$ 的项后得到

$$\int_0^1 \hat{U}_l\hat{L}\hat{U}_l d\tau = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2is\tau}\left(\frac{c''}{c} - \frac{3}{2}\gamma^2\right)d\tau$$

$$= -2is\hat{W}_l(0,s).$$

令 $s_k = \frac{k\pi}{2}$，则有

$$\int_0^1\left(\frac{c''}{c} - \frac{3\gamma^2}{2}\right)\cos k\pi\tau d\tau = 2k\pi\mathrm{Im}\,\hat{W}_l(0,s_k) = \frac{a_k}{2},$$

所以

$$\gamma' - \frac{\gamma^2}{2} = \frac{c''}{c} - \frac{3}{2}\left(\frac{c'}{c}\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\cos k\pi\tau,$$

并由此得到

$$\int_0^1 \gamma'(\tau)\cos k\pi\tau d\tau = \frac{1}{2}\left(a_k + \int_0^1 \gamma^2(\tau)\cos k\pi\tau d\tau\right) = \frac{A_k}{2},$$

$$k = 1, 2, \cdots \tag{18.33}$$

和

$$A_0 = \int_0^1 \gamma'(\tau) d\tau = \gamma(1) - \gamma(0).$$

假定 $c'(0) = c'(1) = 0$, 则 $A_0 = 0$, 从而

$$\gamma'(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\pi\tau. \tag{18.34}$$

在具体计算时,先选取初始近似解 $\gamma_0'(\tau)$,

$$\gamma_0'(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\pi\tau,$$

并由此得到

$$\gamma_0(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k\pi} \sin k\pi\tau,$$

$$c_0(\tau) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^2\pi^2}(1 - \cos k\pi\tau)\right).$$

假定 $\gamma(\tau)$ 的某次迭代值已经得到,则由 (18.33) 更新 A_k 的值,然后由 (18.34) 计算 $\gamma'(\tau)$ 和 $\gamma(\tau)$ 的新的迭代值,如此反复计算,直到达到所给定的精度.

更一般的计算方法是直接从(18.30)出发,详见 Hagin (1981b) 的文章.

18.4 摄动方法

计算反问题的另一个重要途径是基于共轭解和泛函的摄动理论(可见 Марчук, Орлов (1961) 和 Марчук (1973)).

设 $\mathscr{B}$ 是实 Hilbert 空间,其内积为

$$(U, V) = \int_\Omega U(x)V(x)dx.$$

L 是从 $D(L) \in \mathscr{B}$ 到 $\mathscr{B}$ 的线性算子,并考虑下列问题

$$LU = g. \tag{18.35}$$

又设 $J_p(U)$ 是某个物理量, $J_p(U) = (U, p)$. 用 L^* 表示 L 的共轭算子,即 $(U, LV) = (V, L^*U)$, 而 U_p^* 是下列共轭方程的解

$$L^*U_p^* = p,$$

于是 $J_p(U) = (U_p^*, g)$.

设$\bar{L}$是已知算子，$L = \bar{L} + \delta L$，$\|\delta L\|$ 适当小，$\bar{U}$ 为下列方程的解

$$\bar{L}\bar{U} = (L - \delta L)\bar{U} = g.$$

相应地有 $J_p(U) = J_p(\bar{U}) + \delta J_p$.

用 $\bar{L}^*$ 表示 $\bar{L}$ 的共轭算子，$\bar{U}_p^*$ 表示 $\bar{U}$ 的共轭解，即

$$\bar{L}^*\bar{U}_p^* = p, \tag{18.36}$$

于是

$$(\bar{U}_p^*, LU) - (U, \bar{L}^*\bar{U}_p^*) = (\bar{U}_p^*, \delta LU). \tag{18.37}$$

另一方面又有

$$(\bar{U}_p^*, g) - (U, p) = J_p(\bar{U}) - J_p(U) = -\delta J_p, \tag{18.38}$$

所以

$$\delta J_p = -(\bar{U}_p^*, \delta LU), \tag{18.39}$$

因为 $\|\delta L\|$ 适当小，所以 $\bar{U}_p^* \approx U_p^*$，$\bar{U} \approx U$，故近似地有

$$\delta J_p = -(\bar{U}_p^*, \delta L\bar{U}). \tag{18.40}$$

下面考虑一种特殊情况，即设

$$L = \sum_{m=1}^{M} (\alpha_m(x)A_m + B_m(\beta_m(x)C_m)),$$

其中 A_m, B_m 是微分算子，积分算子或者是两者的组合，而 $\alpha_m(x)$ 和 $\beta_m(x)$ 是需要确定的系数，令

$$\begin{cases}\alpha_m = \bar{\alpha}_m + \delta\alpha_m, \\ \beta_m = \bar{\beta}_m + \delta\beta_m.\end{cases} \tag{18.41}$$

其中 $\bar{\alpha}_m(x)$ 和 $\bar{\beta}_m(x)$ 是已知的，于是 $L = \bar{L} + \delta L$，其中

$$\begin{cases}\bar{L} = \sum_{m=1}^{M} \bar{\alpha}_m A_m + B_m(\bar{\beta}_m C_m), \\ \delta L = \sum_{m=1}^{M} \delta\alpha_m A_m + B_m(\delta\beta_m C_m).\end{cases}$$

把上式代入 (18.39) 后得到

$$\delta J_p = -\sum_{m=1}^{M} [(\bar{U}_p^*, \delta\alpha_m A_m\bar{U}) + (B_m^*\bar{U}_p^*, \delta\beta_m C_m\bar{U})].$$

假定 J_{p_l} 是一组本质上不同的测量值，$1\leqslant l\leqslant N$，δJ_{p_l} 是可测量得到的。又设 $\{u_{m\mu}\}$ 和 $\{v_{m\mu}\}$ 是正交系，并令

$$\begin{cases}\delta\alpha_m=\sum_{\mu=1}^{N(m)}a_{m\mu}u_{m\mu},\\ \delta\beta_m=\sum_{\mu=1}^{N(m)}b_{m\mu}v_{m\mu},\end{cases}$$

于是有

$$\delta J_{p_l}=-\sum_{m=1}^{M}\sum_{\mu=1}^{N(m)}[a_{m\mu}(\bar{U}^*_{p_l},u_{m\mu}A_m\bar{U})+b_{m\mu}(B^*_m\bar{U}^*_{p_l},v_{m\mu}C_m\bar{U})].\tag{18.42}$$

此外，近似地有

$$\bar{L}\bar{U}=g.\tag{18.43}$$

在具体计算时，先由 (18.43) 得到 $\bar{U}$ 的近似解. 再由 (18.36) 得到 $\bar{U}^*_{p_l}$，然后由 (18.42) 计算 $a_{m\mu}$和 $b_{m\mu}$。 最后由 (18.41) 把 $\bar{\alpha}_m$ 和 $\bar{\beta}_m$ 修正为 α_m 和 β_m。如此反复计算，直到满足所给定的精度.

如果 $N=2MN(m)$，则在计算过程中，可由测量值 δJ_{p_l} 唯一地确定 $a_{m\mu}$ 和 $b_{m\mu}$。但一般说来，系数矩阵是病态的. 如果 $N>2MN(m)$，则可用最小二乘法计算 $a_{m\mu}$ 和 $b_{m\mu}$。

早期应用摄动方法进行研究的有 Fuchs (1949)，Кадомцев (1957)，Марчук，Орлов (1961) 等，他们研究了辐射理论中的计算问题. 在模式识别和最优化理论中，也应用这个方法，详见 Pontryagin，Boltianskii，Gamkrelidze，Mischenko (1962)，Balakrishnan，Neustadt (1964) 和 Lions，Magenes (1968) 的文章.

18.5 Backus-Gilbert 方法

由前面几节知道，利用解偏微分方程反问题的数值方法经常可以导出第一类 Fredholm 积分方程，例如

$$\int_0^1 K(x,y)w(y)dy=g(x),\tag{18.44}$$

其中 $K(x,y)$ 关于 x 是连续的，并在 $0\leqslant y\leqslant 1$ 上是有界的。一般

说来，这是一个不适定问题. Backus, Gilbert (1967, 1968, 1970) 提出了一种有效的计算方法.

假设 (18.44) 的近似解为

$$v(x)=\int_0^1 A(x,y)w(y)dy, \tag{18.45}$$

其中 $A(x,y)$ 被称为平均核函数. 如果 $A(x,y)=\delta(x-y)$, 则 $v(x)=w(x)$. 所以把原问题归结为构造 $A(x,y)$, 使得它尽量逼近 $\delta(x-y)$. Backus-Gilbert 方法就是根据 $\delta(x-y)$ 的性质来选择合适的 $A(x,y)$. 首先, 由于

$$\int_0^1 \delta(x-y)dy=1,$$

故要求

$$\int_0^1 A(x,y)dy=1. \tag{18.46}$$

其次, 在 $x=y$ 处, $\delta(x-y)$ 有尖峰, 所以 $A(x,y)$ 也应有类似的尖峰, 而且越尖越好, 为此令

$$J(x,A)=\alpha_Q\int_0^1 Q(x-y)A^2(x,y)dy, \tag{18.47}$$

其中 $Q(x-y)$ 是适当光滑的正值函数, 它是 $|x-y|$ 的增函数, 并且 $Q(0)=0$, α_Q 是规范化常数. 选择 $Q(x-y)$ 和 α_Q 的出发点是: $A(x,y)$ 的峰越尖, 则 $J(x,A)$ 的值越小. 这样, 就把原来的问题归结为在约束条件 (18.46) 下, 求 $J(x,A)$ 的极小值问题. 严格说来, 峰宽还不能完全描述 $A(x,y)$ 对 $\delta(x-y)$ 的逼近程度, 因为还涉及到尖峰的位置, 所以应考虑 $J_c(x,A)$ 的极小值 (可见 Chen (1981)), 其中

$$J_c(x,A)=\alpha_Q\int_0^1 Q(c(x)-y)A^2(x-y)dy,$$

$$c(x)=\frac{\int_0^1 yA^2(x,y)dy}{\int_0^1 A^2(x,y)dy}.$$

但是, 这会给计算带来许多困难. 又由于在实际问题中, 通常 $c(x)\approx x$, 所以一般只考虑 (18.47) 的极小值问题.

现在取一系列 $\{x_j\}$，则有

$$\int_0^1 K(x_j, y)w(y)dy = g(x_j), \qquad 1 \leqslant j \leqslant M. \tag{18.48}$$

另一方面，$v(x)$ 也是 $w(y)$ 的线性泛函，故有

$$v(x) = \sum_{j=1}^{M} a_j(x)g(x_j),$$

其中 $a_j(x)$ 是待定函数．把 (18.48) 代入上式，并与 (18.45) 相比较后得到

$$A(x, y) = \sum_{j=1}^{M} a_j(x)K(x_j, y), \tag{18.49}$$

从而

$$J(x, A) = \sum_{j=1}^{M}\sum_{m=1}^{M} a_j(x)a_m(x)k_{jm}(x), \tag{18.50}$$

其中

$$k_{jm} = k_{mj} = \alpha_0 \int_0^1 Q(x-y)K(x_j, y)K(x_m, y)dy.$$

而条件 (18.46) 则转化为

$$\sum_{j=1}^{M} a_j(x)b_j = 1, \tag{18.51}$$

其中

$$b_j = \int_0^1 K(x_j, y)dy.$$

记

$$\bar{K} = \begin{pmatrix} k_{11} \cdots k_{1M} \\ k_{M1} \cdots k_{MM} \end{pmatrix}, \quad a(x) = \begin{pmatrix} a_1(x) \\ \vdots \\ a_M(x) \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix},$$

则得

$$J(x, A) = a^*(x)\bar{K}(x)a(x), \tag{18.52}$$

$$a^*(x)b = 1. \tag{18.53}$$

由于 $J > 0$，因此把原问题化为在条件 (18.53) 下，求正定二次泛函的极小值问题．引入 Lagrange 乘子 λ，并记

$$J_\lambda(x, A) = a^*\bar{K}a + \lambda a^*b.$$

令

$$\frac{\partial J_\lambda(x, A)}{\partial a_i} = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant M,$$

则得到

$$a = \frac{-\lambda}{2} \bar{K}^{-1} b.$$

代入(18.53)后有

$$\lambda = \frac{-2}{b^* \bar{K}^{-1} b},$$

因此

$$a(x) = \frac{\bar{K}^{-1} b}{b^* \bar{K}^{-1} b}.$$

最后有

$$v(x) = a^*(x) g,$$

其中

$$g = (g(x_1), \cdots, g(x_M))^*.$$

18.6 正则化方法

计算(18.44)的另一个途径是正则化方法. Phillips(1962)和Тихонов(1963a, b)最早提出了求解不适定问题的正则化方法,并在 Тихонов, Арсенин(1974)中作了严谨而又完整的论述.

设 $\mathfrak{B}_1$ 和 $\mathfrak{B}_2$ 是两个 Banach 空间,其范数是 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$,

$$B_l(v, \delta) = \{w \mid w \in \mathfrak{B}_l, \|v - w\|_l \leqslant \delta\}.$$

L 是从 $\mathfrak{B}_1$ 到 $\mathfrak{B}_2$ 的算子,并考虑下列问题

$$LU = f. \tag{18.54}$$

又假设当 $f = g$ 时,它的解为 U_g.

定义 18.1 算子 $R(f,\delta)$ 被称为在 g 的邻域中,对方程(18.54)是正则的,如果它满足下列条件:

(i) 存在正数 δ_1, 使得对一切 $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_1$ 和 $f \in B_2(g, \delta)$, $R(f, \delta)$ 有定义.

(ii) 对任意的 $\varepsilon > 0$,都存在 $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, g) \leqslant \delta_1$,使得当 $f_\delta \in B_2(g, \delta)$, $\delta \leqslant \delta_0$ 时, $U_\delta \in B_1(U_g, \varepsilon)$, 其中 $U_\delta = R(f_\delta, \delta)$.

有时应用下面的定义更为方便, 前者被蕴含在其中.

定义 18.2 依赖于参数 α 的算子 $R(f, \alpha)$ 被称为它在 g 的邻

域内,对 (18.54) 是正则的,如果它满足下列条件:

(i) 存在正数 δ_1, 使得对一切 $\alpha > 0$, $\delta \leqslant \delta_1$ 和 $f \in B_2(g, \delta)$, $R(f, \alpha)$ 都有定义.

(ii) 存在这样的函数 $\alpha = \alpha(\delta)$, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta(\varepsilon) \leqslant \delta_1$, 使得当 $f_\delta \in B_2(g, \delta(\varepsilon))$ 时, $U_\alpha \in B_1(U_g, \varepsilon)$, 其中 $U_\alpha = R(f_\delta, \alpha(\delta))$.

我们把 U_α 称为 (18.54) 的正则解, α 被称为正则参数. 显然, 当 $f_\delta \in B_2(g, \delta)$ 时, 总可选择 $\alpha = \alpha(\delta)$, 使得当 $\delta \to 0$ 时, $\|U_\alpha - U_g\|_1 \to 0$.

下面的定理表明这样的正则算子是存在的.

定理 18.1 设 $R(f, \alpha)$ 对一切 $f \in \mathfrak{B}_2$ 和 $\alpha > 0$ 都有定义, 并且关于 f 是连续的, 又对一切 $U \in \mathfrak{B}_1$,

$$\lim_{\alpha \to 0} R(LU, \alpha) = U, \tag{18.55}$$

则 $R(f, \alpha)$ 一定是 (18.54) 的正则算子.

证明 只要验证定义 18.2 中的条件 (ii). 事实上, 对一切 $f_\delta \in B_2(g, \delta)$, 都有

$$\|R(f_\delta, \alpha) - U_g\|_1 \leqslant \|R(f_\delta, \alpha) - R(g, \alpha)\|_1 + \|R(g, \alpha) - U_g\|_1.$$

因为 $R(f, \alpha)$ 是连续的,故若 δ 足够小且 $f_\delta \in B_2(g, \delta)$, 则有

$$\|R(f_\delta, \alpha) - R(g, \alpha)\|_1 \leqslant \omega(\delta),$$

其中当 $\delta \to 0$ 时, $\omega(\delta) \to 0$. 又由 (18.55), 对任意的 $\delta > 0$, 存在 $\alpha = \alpha_1(\delta, U_g)$, 使得当 $\alpha \leqslant \alpha_1$ 时,

$$\|R(g, \alpha) - U_g\|_1 \leqslant \omega(\delta).$$

因此对任意的 $\varepsilon > 0$, 都可找得 $\delta(\varepsilon)$, 使得当 $\delta \leqslant \delta(\varepsilon) \leqslant \delta_1$ 和 $\alpha = \alpha_1(\delta, U_g)$ 时, $R(f_\delta, \alpha) \in B_1(U_g, \varepsilon)$, 由此即得所证.

在 Тихонов (1963a, b, 1964a, b, 1965), Тихонов, Гласко (1964) 和 Турчин, Нозик (1969) 的文章中, 还指出了正则算子的构造方法. 下面假定, 当 $f = g$ 时, (18.54) 有唯一解 U_g.

泛函 $J(U)$ 被称为是稳定的, 如果它满足下列条件:

(i) $J(U)$ 是连续且非负的, 其定义域 $D(J)$ 在 $\mathfrak{B}_1$ 中稠密.

(ii) $U_g \in D(J)$.

(iii) 对任意 d，集合 $E(J, d) = \{U \in \mathfrak{B}_1 | J(U) \leqslant d\}$ 是紧致的.

下面假设 $f_\delta \in B_2(g, \delta)$，并记

$$Q_\delta = \{U \in \mathfrak{B}_1 | LU \in B_2(f_\delta, \delta)\},$$

$$D_\delta = Q_\delta \cap D(J).$$

我们在 D_δ 上寻求 $J(U)$ 的极小化元素，并记为 U_δ. 于是 U_δ 可以视为与 δ 有关的算子 R 作用于 f_δ 的结果，即 $U_\delta = R(f_\delta, \delta)$. 下面证明，这样定义的 $R(f, \delta)$是 (18.54) 的正则算子，故可把 U_δ 作为 U_g 的近似解.

首先证明，算子 $R(f, \delta)$ 对一切 δ 和 $f_\delta \in B_2(g, \delta)$ 都有定义. 事实上，$J(U)$ 是非负泛函，所以存在 $J_0 = \inf\limits_{U \in D_\delta} J(U)$. 设 $\{U_l\}$ 是 $J(U)$ 的极小化序列，不妨设对一切 $l > 1$，都有

$$J(U_{l+1}) \leqslant J(U_l) \leqslant \cdots \leqslant J(U_1).$$

于是可从中选取子列 $\{U_{l_k}\}$，它收敛到 $U_\delta \in D(J)$，因此 $J(U)$ 对 U_δ 有定义.

又由 $J(U)$ 的连续性得到

$$J(U_\delta) = \lim_{l_k \to \infty} J(U_{l_k}).$$

另一方面有

$$J_0 = \lim_{l_k \to \infty} J(U_{l_k}),$$

所以

$$J_0 = J(U_\delta) = \inf_{U \in D_\delta} J(U).$$

这就证明了 $R(f, \delta)$ 满足正则算子的条件 (i).

其次，因为 $U_g \in D_\delta$，故 $J(U_\delta) \leqslant J(U_g)$. 记

$$\mathscr{F}_g = \{U | U \in D(J), J(U) \leqslant J(U_g)\},$$

因为 $J(U)$ 是稳定的，故 $\mathscr{F}_g$ 是紧致的，显然 $U_\delta \in \mathscr{F}_g$.

设 $\{\delta_l\}$ 是收敛到零的正数序列，$\{f_{\delta_l}\}$ 是这样的一个序列，它满足 $\|g - f_{\delta_l}\|_2 \leqslant \delta_l$. 对于每一个 δ_l，确定出集合 Q_{δ_l}，并记 $D_{\delta_l} = D(J) \cap Q_{\delta_l}$. 于是在每一个 D_{δ_l} 中，都有极小化元素 $U_{\delta_l} \in \mathscr{F}_g$，因此可从中选取子列 $\{U_{\delta_{l_k}}\}$，其极限元素记为 $\bar{U}$. 由于 $U_{\delta_l} \in D_{\delta_l} \subset$

Q_{δ_l}，故有

$$\|LU_{\delta_{l_k}} - f_{\delta_{l_k}}\|_2 \leqslant \delta_{l_k}.$$

让 $l_k \to \infty$，就得到

$$L\overline{U} = g,$$

因此 $\overline{U} = U_g$，即 $U_g = \lim\limits_{l_k \to \infty} U_{\delta_{l_k}}$.

因为对 $\{U_{\delta_l}\}$ 中的所有收敛子序列，上述结果都成立，所以，对任意收敛到零的正数序列 $\{\delta_l\}$，相应的 $\{U_{\delta_l}\}$ 都收敛到 U_g. 这样就满足了正则算子的条件 (ii).

注记 18.1　即使 U_g 不是唯一的，也可以用上述方法建立正则算子，而相应的 U_{δ_l} 收敛到其中的一个解.

根据上面的论述，就把求 (18.54) 的近似解问题转化为在 D_δ 中求 $J(U)$ 的极小值问题. 用 M_0 表示在 $D(J)$ 上使 $J(U) = J_0$ 的元素的集合. 为简单计，不妨假设 M_0 只包含一个元素 U_0. 如果 $M_0 \cap D_\delta$ 是非空的，则 U_0 就是 $J(U)$ 在 D_δ 上的极小值问题的解，否则，$LU_0 \notin B_2(f_\delta, \delta)$. 但是在很多情况下，又可把原问题转化为在 $D(J)$ 上求 $J(U)$ 的条件极小值问题.

泛函 $J(U)$ 被称为拟单调的，如果对于任意的元素 $U' \notin M_0$，在它的任何邻域中都可找到元素 $U'' \in D(J)$，使得 $J(U'') < J(U')$. 可以证明(见 Тихонов, Арсенин (1974))，如果 $J(U)$ 是拟单调的，$M_0 \cap D_\delta$ 为空集，而且 U' 使 $J(U)$ 达到下确界，那末一定有 $\|LU' - f_\delta\|_2 = \delta$.

根据上述结果，又把原问题转化为在条件 $\|LU - f_\delta\|_2 = \delta$ 下，求 $J(U)$ 在 $D(J)$ 上的极小值问题，并且可以用 Lagrange 乘子法来计算，也就是说原问题可转化为求泛函 $J^\alpha(U, f_\delta)$ 的极小值问题，其中

$$J^\alpha(U, f_\delta) = \|LU - f_\delta\|_2^2 + \alpha J(U).$$

我们也可以直接讨论泛函

$$J^\alpha(U, f) = \|LU - f\|_2^2 + \alpha J(U)$$

的极小值问题. 可以证明，如果 L 是连续算子，则对一切 $\alpha > 0$ 和

$f\in\mathfrak{B}_2$，都存在元素 $U_\alpha\in\mathfrak{B}_1$，使得

$$J^\alpha(U_\alpha, f) = \inf_{U\in D(J)} J^\alpha(U, f).$$

于是，对任意的 $f\in\mathfrak{B}_2$ 和 $\alpha>0$，都定义了正则算子 $R(f,\alpha)$，而 $U_\alpha = R(f,\alpha)$.

如果 $\Phi\in\mathfrak{B}_1$，并在 Φ 上定义了一种强范数，即对一切 U_1，$U_2\in\Phi$，

$$\|U_1 - U_2\|_1 \leqslant \|U_1 - U_2\|_\Phi,$$

那末，若集合 $\{U\mid \|U-U_0\|_\Phi\leqslant d\}$ 在 $\mathfrak{B}_1$ 中是紧致的，则存在下列泛函的极小化元素 $U_\alpha\in\Phi$，

$$J^\alpha(U, f) = \|LU - f\|_2^2 + \alpha\|U\|_\Phi^2.$$

如果 $U_g\in\Phi$，则对一切 $\alpha>0$ 和 $f\in\mathfrak{B}_2$，给出使得 $J^\alpha(U,f)$ 极小化的元素 U_α 的算子 $R(f,\alpha)$，就是一个正则算子.

下面举一个具体例子．设 $D=\{x\mid 0<x<1\}$，$\mathfrak{B}_1 = C(\overline{D})$，则可把 Φ 取为 Соболев 空间 Φ_q，其范数为

$$\|U\|_{\Phi_q} = \left(\int_0^1 \left(\sum_{r=0}^{p} q_r(x)\left(\frac{d^rU}{dx^r}\right)^2\right)dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $q_r(x)$ 是非负连续的权函数，$q_p(x)>0$，$q_0(x)>0$，而相应的正则解 $U_\alpha(x)$ 是下列稳定泛函的极小化元素，

$$J(U) = \int_0^1 \left(\sum_{r=0}^{p} q_r(x)\left(\frac{d^rU}{dx^r}\right)^2\right)dx, \tag{18.56}$$

其约束条件是

$$\|U - LU\|_{L^\infty(D)} = \delta,$$

或者等价于下列泛函的极小化元素

$$J^\alpha(U) = \|U - LU\|_{L^\infty(D)} + \alpha J(U).$$

通常把 (18.56) 称为 p 阶稳定子.

现在应用上述方法来计算 (18.44)．此时有 $U_c(x) = w(x)$，

$$LU(x) = \int_0^1 K(x,y)U(y)dy.$$

设 $g\in L^2(D)$，并采用 p 阶稳定子，则

$$J^\alpha(U,g) = \int_0^1\left[\int_0^1 K(x,y)U(y)dy - g(x)\right]^2 dx$$

$$+ \alpha \int_0^1 \left(\sum_{r=0}^{p} q_r(x) \left(\frac{d^r U}{dx^r} \right)^2 \right) dx$$

其 Euler 方程是

$$\int_0^1 \bar{K}(x, y) U(y) dy + \alpha \sum_{r=0}^{p} (-1)^r \frac{d^r}{dx^r} \left[q_r(x) \frac{d^r U}{dx^r} \right] = b(x),$$

其中

$$\bar{K}(x, y) = \int_0^1 K(\xi, x) K(\xi, y) d\xi,$$

$$b(x) = \int_0^1 K(\xi, x) g(\xi) d\xi.$$

当然，还要求 U 满足一定的边界条件，例如

$$\frac{d^r U(0)}{dx^r} = \frac{d^r U(1)}{dx^r} = 0, \qquad 0 \leqslant r \leqslant p - 1.$$

18.7 拟逆方法

计算不适定问题的另一个方法是拟逆方法。 Von Neuman, Richtmyer (1950)最早提出了这个方法.Олейник (1957) 和 Lattès, Lions (1969) 等系统地发展了这个方法。 该方法与正则化方法有某些类似的地方，下面来举例说明这个方法.

设 V 和 H 是可分的实 Hilbert 空间，它们的范数分别为 $\|\cdot\|_V$ 和 $\|\cdot\|_H$. 假设 $V \subset H$, 并在 H 中稠密. V' 表示 V 的共轭空间, $V \subset H \subset V'$. 若 $f \in V'$, $v \in V$, 则用 (f, V) 表示它们的内积. $a(u, v)$ 是 $V \times V$ 上的双线性连续泛函，并满足下列条件:

(i) 对一切 $u, v \in V$, $a(u, v) = a(v, u)$,

(ii) 存在正常数 c, 使得对一切 $u, v \in V$,

$$|a(u, v)| \leqslant c \|u\|_V \|v\|_V,$$

因此，对一切 $u \in V$, $v \to a(u, v)$是 V 上的线性连续泛函，从而存在线性算子 A, 使得 $a(u, v) = (Au, v)$.

(iii) 存在常数 λ 和 $\alpha > 0$, 使得对一切 $v \in V$,

$$a(v, v) + \lambda |v\|_H^2 \geqslant \alpha \|v\|_V^2.$$

设 ξ, $\chi \in H$, 并考虑下列问题,

$$\begin{cases}\dfrac{dU}{dt}+AU=0, & 0<t<T,\\ U(0)=\xi,\end{cases}\tag{18.57}$$

其中 $U\in L_2(0,T;V)$，$\dfrac{dU}{dt}\in L_2(0,T;V')$. 又记泛函

$$J(\xi)=\|U(x,T;\xi)-\chi\|_H^2.$$

可以证明，在上述假定下，

$$\inf_{\xi\in H}J(\xi)=0,$$

它等价于求解下列不适定问题

$$\begin{cases}\dfrac{dU}{dt}+AU=0, & 0\leqslant t<T,\\ U(T)=\chi.\end{cases}\tag{18.58}$$

记

$$D(A)=\{v\mid v\in V,\ Av\in H\},\ \|v\|_D=(\|v\|_V^2+\|Av\|_H^2)^{\frac{1}{2}},$$

$D(A)$ 在H中是稠密的，并且 $D(A)\subset H\subset[D(A)]'$. 用 A^* 表示 A 的共轭算子．所谓拟逆方法是先计算辅助问题

$$\begin{cases}\dfrac{dW^{(\varepsilon)}}{dt}+AW^{(\varepsilon)}-\varepsilon A^*AW^{(\varepsilon)}=0, & 0\leqslant t<T,\\ W^{(\varepsilon)}(T)=\chi,\end{cases}\tag{18.59}$$

其中 $W^{(\varepsilon)}\in L_2(0,T;D(A))$，$\dfrac{dW^{(\varepsilon)}}{dt}\in L_2(0,T;D(A))$，然后再计算下列问题

$$\begin{cases}\dfrac{dU^{(\varepsilon)}}{dt}+AU^{(\varepsilon)}=0, & 0<t\leqslant T,\\ U^{(\varepsilon)}(0)=W^{(\varepsilon)}(0),\end{cases}\tag{18.60}$$

其中 $U^{(\varepsilon)}\in L_2(0,T;V)$，$\dfrac{dU^{(\varepsilon)}}{dt}\in L_2(0,T;V')$.

Lattès, Lions (1969) 证明，问题 (18.59) 和 (18.60) 分别具有唯一解，并且当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\|U^{(\varepsilon)}(T)-\chi\|_H\to 0$. 此外，如果

$$(1-e^{-\varepsilon\lambda_0 T})\|\chi\|_H\leqslant\eta^{\frac{1}{2}},$$

其中 $\lambda_0=\inf\lambda$，λ 是算子 A 的谱，那末

$$\|U^{(\varepsilon)}(T)-\chi\|_H^2\leqslant\eta.$$

辅助问题的选择不是唯一的，例如可用 $(-1)^{m-1}(A^*A)^m$ 来代替(18.59)中的 A^*A.

拟逆方法也可应用于定常问题.例如设 Ω 是 $\mathscr{R}^n$ 中的开域，边界 Γ_0 和 Γ_1 充分光滑(见图 18.1). 于是问题

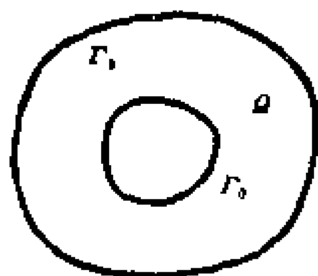


图 18.1

$$\begin{cases}-\Delta U(x)=0, & x\in\Omega,\\ U(x)=g_0(x),\ \dfrac{\partial U}{\partial n}(x)=g_1(x), & x\in\Gamma_0.\end{cases}\tag{18.61}$$

是不适定的，但只能有一个解.

把 $x\in\Omega$ 到 Γ_1 的距离记为 $d(x,\Gamma_1)$. 设 $\varepsilon_0>0$, $M_{\varepsilon_0}(x)$ 是 Ω 上的连续函数，$0\leqslant M_{\varepsilon_0}(x)\leqslant 1$，并且

$$M_{\varepsilon_0}(x)=\begin{cases}1, & 若\ d(x,\Gamma_1)\geqslant 2\varepsilon_0,\\ 0, & 若\ d(x,\Gamma_1)<\varepsilon_0,\end{cases}$$

$$\rho_{\varepsilon_0}(x)=\begin{cases}1, & 若\ d(x,\Gamma_1)\geqslant\varepsilon_0,\\ \dfrac{d(x,\Gamma_1)}{\varepsilon_0}, & 若\ d(x,\Gamma_1)<\varepsilon_0.\end{cases}$$

设 $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon=(\varepsilon_0,\varepsilon_1)$. 计算(18.61)的拟逆方法是

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\Delta(M_{\varepsilon_0}^2\Delta U^{(\varepsilon)})+\displaystyle\sum_{m=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_m}\left(\rho_{\varepsilon_0}^2\dfrac{\partial U^{(\varepsilon)}}{\partial x_m}\right)\\ \qquad =0, \quad x\in\Omega,\\ U^{(\varepsilon)}(x)=g_0(x),\quad \dfrac{\partial U^{(\varepsilon)}}{\partial n}(x)=g_1(x)\\ \qquad =0, \quad x\in\Gamma_0,\end{cases}\tag{18.62}$$

Lattès, Lions (1969) 证明，若 $g_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$， $g_1 \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$，并且（$g_0, g_1$）对 Laplace 算子 $-\Delta$ 是相容的，即 (18.61) 有唯一解，那末，问题 (18.62) 也具有唯一解，并且当 $\varepsilon \to 0$ 时，$\|U - U^{(\varepsilon)}\|_{L^2(\Omega)} \to 0$，$\left\|\rho_{\varepsilon_0} \frac{\partial U^{(\varepsilon)}}{\partial x_m} - \frac{\partial U}{\partial x_m}\right\|_{L^2(\Omega)} \to 0$，$\|M_{\varepsilon_0} \Delta U^{(\varepsilon)}\|_{L^2(\Omega)} = o(\varepsilon_1) \to 0$。

Lattès, Lions (1969) 系统地研究了拟逆方法，并把它应用于各种不适定问题，其中包括各种不同类型的偏微分方程的不适定问题，变系数问题和非线性问题，待求的函数可以是初值函数，也可以是边界条件，等等。

参 考 文 献

中 文 文 献

马驷良(1982),关于矩阵族稳定的(J)条件及其与 Buchanan 准则的关系,数学研究与评论,**2**,第1期,77—91.

马驷良,李欣凯(1982),三阶矩阵族的一致有界定理,吉林大学学报(自然科学版),**3**,39—48.

马驷良,李荣华(1983),关于矩阵族 $G^n(\theta, \Delta t)$ 一致有界性的局部(J)条件,数学学报,26,723—730.

王汝权,焦履琼(1980),简化 Navier-Stokes 方程组推进解法的数值分析,数值计算与计算机应用,**1**,53—61.

王烈衡,秦孟兆(1979),M类矩阵及差分格式稳定性条件,计算数学,**1**,279—287.

王能超(1965),一阶拟线性双曲型方程组不定边界问题的差分方法,复旦大学学报,**10**,33—48.

冯康(1965),基于变分原理的差分格式,应用数学与计算数学,**2**,238—262.

冯康(1975),单边变分原理,计算机应用与应用数学,第12期,1—8.

冯康(1980),论微分与积分方程以及有限与无限元,计算数学,**2**,100—105.

朱幼兰(1978),纯初值问题变系数差分格式的稳定性,计算数学,第1期,11—32.

朱幼兰(1979),一阶双曲型方程组初、边值问题的差分格式及其稳定性,计算数学,**1**,1—30.

朱幼兰,陈炳木,张作民,钟锡昌,覃伯良,张关泉(1977),双曲型方程组初、边值问题的一个数值计算方案及应用,应用数学学报,第3期,12—27.

朱幼兰,陈炳木,,张作民,钟锡昌,覃伯良,张关泉(1978),双曲型方程组初、边值问题的差分格式及应用实例,中国科学,125—138.

朱幼兰,钟锡昌,陈炳木,张作民(1980),初边值问题差分方法及绕流,科学出版社,北京.

刘海楼,马驷良(1982),色散分析的 Fourier 方法及差分格式的构造(I),高等学校计算数学学报,**4**,68—80.

许梦杰,沈玮熙,王尊正(1965),非对角型一阶拟线性双曲型方程组不定边界问题的差分方法,复旦大学学报,**10**,367—380.

李荣华(1963),关于二次方程根的分析及其在差分方法中的应用,吉林大学自然科学学报,第1期,1—12.

李荣华(1978),半线性椭圆微分方程的差分解法,高等学校计算数学学报,**1**,62—72.

李荣华(1982),两点边值问题的广义差分方法,吉林大学学报(自然科学版),第1期,26—40.

李荣华,周长林(1963),矩阵族 $G^n(\theta)$ 的一致有界性与差分格式稳定的条件(I),吉林大学自然科学学报,第2期,319—350.

李荣华,周长林(1964a),矩阵族 $G^n(\theta)$ 的一致有界性与差分格式稳定的条件(II),吉林大学自然科学学报,第2期,85—98.

李荣华,周长林(1964b),矩阵族 $G^n(\theta, \Delta t)$ 的一致有界性与差分格式稳定的条件

(III)，吉林大学自然科学学报，第3期，15—30.
李荣华，祝丕琦（1982），二阶椭圆偏微分方程的广义差分法（I）—三角网情形，高等学校计算数学学报，**4**，140—152.
苏煜城，吴启光（1980），椭圆抛物偏微分方程奇异摄动问题的差分解法，应用数学与力学，**1**，167—175.
谷超豪，陈恕行，陈光宇（1978），用差分法解拟线性方程组的不定边界问题，应用数学学报，**1**，250—265.
张关泉（1964），关于气动力学方程的一个差分格式，应用数学与计算数学，**1**，57—68.
张关泉（1965），不适定的初值问题及其差分格式，应用数学与计算数学，**2**，50—70.
林群，谢干权（1981），本征值问题的有限元方法的加速，科学通报，**26**，449—452.
林鹏程，刘发旺（1984），小参数椭圆-抛物偏微分方程一致收敛差分格式的充要条件，应用数学与力学，**5**，67—75.
周毓麟，李德元（1981），非定常流体力学数值方法的若干问题，数学进展，**10**，48—56，131—143.
郑家栋（1985），边界元素法对自由边界问题的应用，应用科学学报，**3**，92—94.
祝丕琦，李荣华（1982），二阶椭圆偏微分方程的广义差分法（II）—四边形网情形，高等学校计算数学学报，**4**，360—375.
祝家麟（1984），用边界积分方法解平面双调和方程的 Dirichlet 问题，计算数学，**6**，278—288.
祝家麟（1985），三维定常流 Stokes 问题的边界积分方程法，计算数学，**7**，40—49.
郭本瑜（1965a），粘性流体二维涡度方程的一类差分格式，上海科学技术大学资料，时见数学学报，**17**（1974），242—258.
郭本瑜（1965b），带有热传导的波动方程组的两类差分格式，上海科学技术大学资料，同时见数学学报，21（1978），270—272.
郭本瑜（1976），不可压缩粘性流问题的数值方法和误差估计，科学通报，**21**，127—131.
郭本瑜（1978），Soliton 的数值计算，科学通报，**23**，592—597.
郭本瑜（1979a），流体力学中的差分方法（I）—二维涡度方程的数值解，力学学报，**2**，129—147.
郭本瑜（1979b），大气环流闭合方程组的总能量守恒格式及全球预报误差的严格估计，中国科学，数学专辑（I），39—52.
郭本瑜（1980a），流体力学中的差分方法（IV）—低Mach数流动的数值解，高等学校计算数学学报，**2**，64—77.
郭本瑜（1980b），正压原始方程的差分格式，大气科学，**4**，120—128.
郭本瑜（1980c），流体力学中的差分方法（II）—三维涡度方程的数值解，计算数学，**2**，307—318.
郭本瑜（1981），Burgers 方程的数值解（I），高等学校计算数学学报，**3**，350—359.
郭本瑜（1982a），非线性波动方程的数值解，计算数学，**4**，46—56.
郭本瑜（1982b），Burgers 方程的数值解（II），高等学校计算数学学报，**4**，115—126.
郭本瑜（1982c），二维电磁流体方程组的数值解，自然，**5**，793—794.
郭本瑜（1984），论离散能量法（I），高等学校计算数学学报，6，327—344.
郭本瑜（1985），论离散能量法（II），高等学校计算数学学报，**7**，201—209.
郭本瑜，李德康（1976），不可压缩粘性流问题的修正逆风格式，数学学报，**19**，30—38.
郭本瑜，Mitchell A. R.（1983），传输扩散方程初、边值问题的 Petrov-Galerkin 方法的稳定性，数学学报，**26**，54—64.

郭本瑜，Vazquéz L. (1983)，非线性 Klein-Gordon 方程的数值解，应用科学学报，1，25—32.

高只明(1982)，变边界热传导方程差分格式的收敛性，计算数学，4，139—150.

徐国荣，于志鲁，廖振民，袁仙春，周振荣(1980)，多物质不可压缩流体力学的欧拉数值方法，数值计算与计算机应用，1，163—172.

秦孟兆(1980)，一个偏心的二步格式，计算数学，2，273—277.

秦孟兆(1982)，一类演化方程 $u_t = au^q + au_p$ 的差分格式，科学通报，**27**，261—263.

梅索夫斯基赫(Мысовских И. П.，1959)，用差分法解矩形区域的 Dirichlet 问题，吉林大学自然科学学报，第1期，39—45.

康立山(1979)，Schwarz 交替法的推广，武汉大学学报，自然科学版，第4期，11—23.

康立山(1982)，一类新型的异步并行算法，数学研究报告，14，武汉大学.

康立山，王德人(1959)，有限差分法，武汉大学.

康立山，孙乐林，陈毓屏(1985)，解数学物理问题的异步平行算法，科学出版社，北京.

常谦顺(1981)，一种非线性 Schrödinger 方程的守恒差分格式，科学通报，**26**，1094—1097.

常谦顺(1983)，广义非线性 Schrödinger 方程组的守恒型差分格式，中国科学，A辑，202—214.

符鸿源(1981)，正型差分解的收敛性，计算数学，3，22—34.

黄鸿慈(1964)，关于椭圆型方程 Neumann 问题的数值解法，应用数学与计算数学，1，121—130.

邬华谟(1964)，差分势及具有间断系数的一阶拟线性方程柯西问题差分解的误差估计，应用数学与计算数学，1，83—97.

邬华谟(1965)，守恒型双曲型方程组的广义解及差分解的误差估计，应用数学与计算数学，2，117—140.

邬华谟(1982)，进化型方程的差分格式(I)，计算数学，4，90—97.

邬华谟，杨明亮(1981)，Soms-可压缩完全 Navier-Stokes 方程的一种差分格式，数值计算与计算机应用，2，45—54.

邬华谟，郭本瑜(1983a)，K. D. V.-Burgers-R.L. W. 方程的高精度差分格式，计算数学，5，90—98.

邬华谟，郭本瑜(1983b)，非线性演化方程的一类三层差分格式，数值计算与计算机应用，4，16—25.

雷功炎(1982)，随机选取差分法及其对气体动力学问题的应用，高等学校计算数学学报，4，81—90.

西 文 文 献

Abadie J. ed. (1967), Nonlinear programming. North-Holland, Amsterdam.

Abarbanel S., Gottlieb D., Turkel E. (1975), Difference schemes with fourth order accuracy for hyperbolic equations, *SIAM J. Appl. Math.*, **29**, 329—351.

Abdulloev Kh. O., Bogolubsky I. L., Makhankov V. G. (1976), One more example of inelastic solution interaction, *Phys. Lett.*, **A56**, 427—433.

Abel N. H (1823), Oplösning af et par opgaver red hjelp af bestemte integraler. *Mag. Naturvidensk.* **2**, 55—68, 205—215.

Abel N H. (1826), Résolution d'un problème de mécanique. *J. Reine. Angew. Math.*, **1**, 13—18.

Ablowitz M. J., Kruskal M. D., Ladik J. F. (1979), Soliton Wave collisions, *SIAM J. Appl. Math.*, **36**, 428—437.

Ablowitz M. J., Ladik J. F. (1976), A nonlinear difference scheme and inverse scattering, *Studies in Appl. Math.*, **55**, 213—229.

Adini A., Clough R. W. (1961), Analysis of Plate bending by the finite element method, NSF. Report G. 7337.

Agmon S. (1965), Lectures on elliptic boundary value problems, Van Nostrand, Princeton, N. J., MR 31 2504.

Agmon S., Nirenberg, L. (1967), Lower bounds and uniqueness theorems for solutions of differential equations in a Hilbert space, *CPAM*, **20**, 207—229.

Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L. (1967), The theory of splines and their applications, Academic Press, New York.

Aitchison J. (1972), Numerical treatment of a singularity in a free boundary problem, *Proc. Roy. Soc. London*, A **330**, 573—580.

Albasing E. L. (1956), The solution of non-linear heat conduction problems on the pilot ACE, *Proc. Inst. Electr. Engrs*, B **103**, Suppl No1, 158—161.

Albrecht J. (1957), Zum differenzen Verfahren bei parabolischen differencialgleichungen, *Z. Angew. Math. Mech.*, **37**, 202—212.

Albrecht J. (1963), Iterations Verfahren bester strate gie zur Lösung linearer Gleichungssysteme mit positiv definiter Koeffizientenmatrix, *Z. Angew. Math. Mech.*, **43**, Sonderheft, 4—8.

Alexander M. E., Morris J. Ll. (1979), Galerkin methods applied to some model equation for non-linear dispersive waves, *J. Comp. Phys.*, **30**, 428—451.

Allen D. N. de. G., Southewell R. V. (1955), Relation methods applied to determine the motion, in two dimensions of a viscous fluid past a fixed cylinder, *Quart. J Mech. Appl. Math.*, **8**, 129—145.

Alvarez A., Carreras B. (1981), Interaction dynamics for the solitary waves of a nonlinear Dirac model, *Phys. Lett.*, A**86**, 327—332.

Alvarez A., Kuo Pen-yu, Vazquez L. (1983), The numerical study of a non-linear one dimensional Dirac equation, *AMC*, 13, 1—15.

Ames W. F. (1973), Some computation-sleeples in fluid mechanics, *SIAM Review*, 524—552.

Amsden A. A. (1966), The particle-in-cell method for calculation of the dynamics of compressible fluids, Los Alamos Report, LA-3466.

Amsden A. A., Harlow F. H. (1970), The SMAC method, Los Alamos Report, LA-4370.

Amsden A. A., Hirt C. W. (1973), YAQUI: An arbitrary Lagrangian-Eulerian computer program for fluid flow at all speeds, Los Alamos Report, LA-5100.

Anderson D. A. (1974), A comparison of numerical solutions to the inviscid equations of fluid motions, *J. Comp. Phys.*, **15**, 1—20.

Anderson R., Mitchell A. R. (1976), Petrov-Galerkin methods, Dundee University, Numerical analysis report 17.

Arakawa A. (1966), Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion, Two-dimensional incompressible flow, I, *J. Comp. Phys.*, **1**, 119—143.

Arakawa A. (1970), Numerical simulation of large-scale atmospheric motions, in ≪Numerical solution of field problems in continuum physics, SIAM-AMS proceedings II≫, ed. by Birkhoff G., Varga R. S., 24—40, AMS, Providence, Rhode Island.

Argyris J. H. (1954), Energy theorems and structural analysis, Part I, General Theory, *Aircraft Engineering*, **26**, 347—356, 383—387, 394.

Argyris J. H. (1955), Energy theorems and structural analysis, Part I, General theory, *Aircraft Engineering*, **27**, 42—58, 80—94, 125—134.

Aronson D. G. (1963a), On the stability of certain finite difference approximations to parabolic systems of differential equation, *Numer. Math.*, **5**, 118—137, 290.

Aronson D. G. (1963b), The stability of finite difference approximations to second order linear parabolic differential equations, *Duke. Math. J.*, **30**, 117—128.

Aronson D. G. (1965), Stability of implicit finite difference approximations for second order parabolic equations, Lecture at a symposium held at University of Maryland, May 3—8.

Aronson D. G., Weinberger H. G. (1975), Nonlinear diffusion in population genetics, Lecture notes in mathematics, 446, Springer-Verlag, Berlin.

Aronson D. G., Weinberger H. G. (1978), Multidimensional nonlinear diffusions arising in population genetics, *Advances in Maths.*, **30**, 33—76.

Atkinson K. E. (1967), The numerical solution of the eigenvalue problem for compact integral operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **129**, 458—465.

Atkinson K. E. (1973), The numerical evaluation of fixed points for completely continuous operators, *SIAM J. Numer. Anal.*, **10**, 799—807.

Atkinson K. E. (1975), Convergence rates for approximate eigenvalues of compact integral operators, *SIAM J. Numer. Anal.*, **12**, 213—222.

Atkinson K. E. (1977), The numerical solution of a bifurcations problem, *SIAM J. Numer. Anal.*, **14**, 584—599.

Aubin J. P. (1967), Behavior of the error of the approximates solutions of boundary value problems for linear elliptic operators by Galerkin's and finite difference methods, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **21**, 599—637.

Aubin J. P. (1968), Interpolation et approximations optimalls et spline functions, *J. Math. Anal.*, **24**, 1—24.

Aubin J. P. (1972), Approximation of elliptic boundary-value problems, Wiley-Interscience, New York.

Auzinger W., Stetter H. J. (1981), Extrapolation beim Multigrid Verfahren, Vorteg, GAMM-Tagung, Würzburg.

Auzinger W., Stetter H. J. (1982), Defect corrections and multigrid iterations, in ≪Multigrid methods≫, ed. by Hackbusch W., Trottenberg U., 327—351, Springer-Verlag, Berlin.

Aziz A. K. ed. (1972), The mathematical foundations of the finite element method

with application to partial differential equations, Academic Press, New York.

Aziz M., Hellums J. D. (1967), Numerical solution of the three dimensional equation of motion for laminar natural convection, *Phys. Fluid*, **10**, 314—324.

Babuška I. (1969a), Numerical solution of boundary value problems by the perturbed variational principle, Univ. of Maryland, Tech. Note, BN-624.

Babuška I. (1969b), Approximation by Hill functions, Univ. of Maryland, Tech. Note, BN-648.

Babuška I. (1972), A finite element scheme for domains with corners, *Numer. Math.*, **20**, 1—21.

Babuška I. (1974), Solution of problems with interfaces and singularities, in «Mathematical aspects of finite elements in partial differential equations», ed. by De Boor C., 213—277, Academic Press, New York.

Babuška I. (1976), Singularities problem in the finite element method, Univ. of Maryland, Tech. Note, BN-875.

Babuška I., Aziz A. K. (1972), Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method, in «The mathematical foundations of finite element method with applications to partial differential equations», ed. by Aziz A. K., 3-359, Academic Press New York.

Babuška I., Dorr M. R. (1981), Error estimates for the combined h and p versions of finite element method, *Numer. Math.*, **37**, 257—277.

Babuška I., Osborn J. E. (1978), Numerical treatment of eigenvalue problems for differential equations with discontinuous coefficient, *Math. Comput.*, **32**, 991—1023.

Backus G., Gilbert F. (1967), Numerical applications of a formulism for geophysical inverse problems, *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, **13**, 247—276.

Backus G., Gilbert F. (1968), The resolving power of gross earth data, *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, **16**, 169—205.

Backus G., Gilbert F. (1970), Uniqueness in the inversion of inaccurate gross earth data, *Philos. Trans., Roy. Soc.*, **A266**, 123—192.

Baiocchi C., Comincioli V., Magenes E., Pozzi G. A. (1973), Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media, Existence and uniqueness theorems, *Ann. Mat. Pura. Appl.*, XCVII, 1—82.

Balakrishnan A. V., Neustadt L. W. (1964), Computing methods in optimization problems, Academic Press, New York.

Ball, J. M. (1977), Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **63**, 337—403.

Barakat H. Z., Clark J. A. (1966), Analytical and experimental study of the transient laminar natural convection flows in partially filled liquid contaiviers, in «Proceedings of the third international heat transfer conference II», Chicago.

Barnhill R. E., Whiteman J. R. (1973), Error analysis of finite element methods with triangle for elliptic boundary value problems, in «The mathematics of finite elements and applications», ed. by Whiteman J. R., 83—112, Academic Press, London.

Barret K. E. (1971), The numerical solutions of singular perturbation boundary value

problems, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **27**, 57—68.

Barrodale I., Young A. (1970), Computational experience in solving linear operator equations using the Chebyshev norm, Numerical approximation to functions and data, Athlone Press, London.

Barta J. (1937), Sur la vibration fondamentale d'une membrane, *C. R. Acad. Sci., Paris*, **204**, 472—473.

Batschelet E. (1952), Über die numerische Auflösung von Randwertproblemen bei elliptischen partiellen Differentialgleichungen, *Z. Angew., Math. Physik.*, **3**, 165—193.

Beale J. T., Majda A. (1982a), Vortex methods I, Convergence in three dimensions, *Math. Comput.*, **39**, 1—27.

Beale J. T., Majda A. (1982b), Vortex method II, Higher order accuracy in two and three dimensions, *Math. Comput.*, **39**, 29—52.

Bellman R. (1964), New methods in nonlinear mechanics in ≪Nonlinear problems of engineering≫, ed. by Ames W. F., 1—11, Academic Press, New York.

Benjamin T. B., Bona J. L., Mahony J. J. (1972), Model equations for long waves in nonlinear dispertive systems, *Philos. Trans. Roy. Soc. London., Ser. A*, **272**, 47—48.

Berger M. S. (1977), Nonlinearity and functional analysis, Academic Press, New York

Bernstein D. L. (1950), Existence theorems in partial differential equations, Annals of mathematics studies, ed. by Artin E., Morse M., 23, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J.,

Bers L. (1953), On mildly nonlinear partial difference equations of elliptic type, *Journ. Res. Nat. Bur. Standards*, **51**, 229—236.

Bers L., John F., Schechter M. (1957), Partial differential equations, Lectures in applied mathematics, 3, New York.

Birkhoff G., De Boor C., Swartz B., Wendroff B. (1966), Rayleigh Ritz approximation by piecewise cubic polynomials, *SIAM J. Num. Anal.*, **13**, 188—203.

Birkhoff G., Fix G. (1971), Accurate eigenvalue computations for elliptic problems, in ≪Numerical solution of field problems in continuum physics, SIAM-AMS proceedings II≫, ed. by Birkhoff G., Varga R. S., 111—151, AMS, Providence, Rhode Island.

Birkhoff G., Gulati S. (1974), Optimal few point discretization of linear source problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, **11**, 700—728.

Birkhoff G., Schultz M. H., Varga R. S. (1968), Piecewise Hermite interpolation in one and two variables with applications to partial differential equations, *Numer. Math.*, **11**, 232—256.

Bogner F. K., Fox R. L., Schmit L. A. (1965), The generation of interelement, compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulas, in ≪Matrix methods in structural mechanics≫, ed. by Przemieniecki J. S., Bader R. M., Bozich W. F., Johnson J. R., Mykytow W. J., 397—444, Wright Patterson, A. F. B., Dayton Ohio.

Bonnerot R., Jamet P. (1979), A third order accurate discontinuous finite element method for the one-dimensional Stefan problem, *J. Comp. Phys.*, **32**, 145—167.

Boris J. P., Book D. L. (1973), Flux-corrected transport, I, Shasta, A fluid transport algorithm that works, *J. Comp. Phys.*, **11**, 38—**69**.

Brakhage H. (1961), Zur Fehlerabschätzung fur die numerische Eigenwertbestimmung bei Integralgleichungen, *Numer. Math.*, **3**, 174—179.

Bram Von- Leer. (1974), Towards the ultimate conservative difference scheme, II, Monotonicity and conservative combined in a second order scheme, *J. Comp. Phys.*, **14**, 361—370.

Bramble, J. H. (1963), Fourth-order finite difference analogues of the Dirichlet problem for Poisson's equation in three and four dimensions, *Math. Comp.*, **17**, 217—222.

Bramble J. H. (1966a), A second order finite difference analogue of the first biharmonic boundary value problem, *Numer. Math.*, **9**, 236—249.

Bramble J. H. ed. (1966b), Numerical solution of partial differential equations, Academic Press, New York.

Bramble J. H. (1966c), Error estimates for difference methods in forced vibration problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, **3**, 1—12.

Bramble J. H. (1968a), A second order finite difference analog of the first biharmonic boundary value problem, *Numer. Math.*, **12**, 236—249.

Bramble J. H. (1968b), Error estimates in elliptic boundary value problems, Numerical analysis of partial differential equations, Edizioni cremonese, Rome, 69—107.

Bramble J. H. (1969), On the convergence of difference approximations to weak solutions of Dirichlet's problem, *Numer. Math.*, **13**, 101—111.

Bramble J. H., Hilbert S. R. (1970), Estimation of linear functional on Sobolev spaces with application to Fourier transforms and spline interpolation, *SIAM J. Numer. Anal.*, **7**, 113—124.

Bramble J. H., Hilbert S. R. (1971), Bounds for a class of linear functionals with applications to Hermite interpolation, *Numer. Math.*, **10**, 362—369.

Bramble J. H., Hubbard B. E. (1962), On the formulation of finite difference analogues of the Dirichlet problem for Poisson's equation, *Numer. Math.*, **4**, 313—327.

Bramble J. H., Hubbard B. E. (1963a), A priori bounds on the discretization error in the numerical solution of the Dirichlet problem, in ≪Contributions to differential equation 2≫, ed. by Lasalle J. P., Diaz J. B., 229—252, Interscience, New York.

Bramble J. H., Hubbard B. E. (1963b), A theorem on error estimation for finite difference analogues of the Dirichlet problem for elliptic equations, in ≪Contributions to differential equations 2≫, ed. by Lasalle J. P., Diaz J. B., 319—340, Interscience, New York.

Bramble J. H., Hubbard B. E. (1964a), New monotone type approximations for elliptic problems, *Math. Comp.*, **18**, 349—367.

Bramble J. H., Hubbard B. E. (1964b), On a finite difference analogue of an elliptic boundary problem which is neither diagonally dominant nor of non-negative type, *J. Math. Phys.*, 43, 117—132.

Bramble J. H., Hubbard B. E. (1964c), Approximation of derivatives by finite dif-

ference methods in elliptic boundary value problems, in ≪Contributions to *differential equations 3*≫, ed. by Lasalle J. P., Diaz J. B., 399—410, Interscience, New York.

Bramble J. H., Hubbard B. E. (1968), Effects of boundary regularity on the discretization error in the fixed membrance eigenvalue problem, *SIAM J. Numer. Anal.*, **5**, 835—863.

Bramble J. H., Hubbard B. E., Thomée V. C. (1969), Convergence estimates for essentially positive type discrete Dirichlet problems, *Math. Comp.*, **23**, 695—709.

Bramble J. H., Hubbard B. E., Zlamal M. (1968), Discrete analogues of the Dirichlet problem with isolated singularities, *SIAM J. Numer. Anal.*, **5**, 1—25.

Bramble J. H., Osborn J. (1972), Rate of convergence estimates for non selfadjoint eigenvalue approximations, MRC Tech. Rept. 1232, Univ. of Wisconsin.

Bramble J. H., Schatz A. H. (1971), On the numerical solution of elliptic boundary value problems by least squares approximation of the data, in ≪Numerical solution of partial differential equations *II*≫, ed. by Hubbard B., 107—132. Academic Press, New York.

Bramble J. H., Schatz A. H. (1974), Higher local accuracy by averaging in the finite element method, in ≪Mathematical aspects of finite elements in partial differential equations≫, ed. by De Boor C., 1—14, Academic Press, New York.

Bramble J. H., Thomée V. C. (1974), Interior maximum norm estimates for some simple finite element methods, Rev. Fr. Auto. Inform. Rech. Oper., R-2, 5—18.

Brandt A. (1982), Guide to multigrid development, in ≪Multigrid methods≫, ed. by Hackbusch W., Trottenberg U., 220—312, Springer-Verlag, Berlin.

Brandt A., Dinar N. (1979), Multigrid solutions to elliptic flow problems, ICASE Report 79—15, July.

Brant A. (1966), Estimates for difference quotients of solutions of Poisson type difference equations, *Math. Comp.*, **20**, 473—499.

Brebbia C. A. (1978), The boundary element methods for engineering, Pentech Press, London.

Brebbia C. A. ed. (1980), New developments in boundary element methods, Butterworths London, Southampton.

Brebbia C. A. ed. (1983), Progress in boundary element method, Vol. 2, Pentech Press, London.

Brezis H. (1972), Unilater problems, *Jour. Math. Pure. Appl.*, **54**, 1—168.

Brezis H., Duvaut G. (1973), Ecoulement avec sillage autour d'un profil symétrique sans incidence, *C. R. Acad. Sci., Paris*, Serie A, **276**, 875—878.

Brezis H., Stampacchia G. (1968), Sur la régularité de la solution d'inéqualitions elliptiques, *Bull. Soc. Math. Fr.*, **96**, 153—180.

Brezis H., Stampacchia G. (1973), Une nouvele méthode pour l'é tude d'écoulements stationaires, *C. R. Acad. Sci., Paris*, Serie A, **276**, 129—132.

Brezzi F., Rapparz J., Raviart P. A. (1981), Finite dimensional approximation of nonlinear problems, Part III, Simple bifurcation points, *Numer. Math.*, **38**, 1—30.

Brian P. L. I. (1961), An infinite difference method of high order of accuracy for the solution of three-dimensional heat conduction problems, *A. I. Ch. E. J.*, 7, 367—370.

Browne P. L. (1966), Rezone, A proposal for accomplishing Rezoning in two-dimensional Lagrangian hydrodynamics problems, Los Alomos Report, LA-3455.

Buchanan M. L. (1963a), A necessary and sufficient condition for stability of difference schemes for second order initial value problems, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 11, 474—501.

Buchanan M. L. (1963b), A necessary and sufficient condition for stability of difference scheme for initial value problems, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 11, 919—935.

Bückner H. (1950), Konvergenzuntersuchungen bei einem algebraischen Verfahren zur näherungsweisen Lösung von Integralgleichungen, *Math. Nachr.*, 3, 358—372.

Bui An Ton (1977), Initial boundary-value problems for the Korteweg-de Vries equation, *J. of differential equations*, 25, 288—309.

Bullough R. K., Caudrey P. J. (1980), The soliton and its history in «solitons», ed. by Bullough R. K., Caudrey P. J., Springer-Verlag, Berlin.

Burgers J. M. (1948), A Mathematical model illustrating the theory of turbulence, in «Advances in applied mechanics I», ed. by Lon Mises R., Von Karman T., 171—199, Academic Press, New York.

Burstein S. Z., Mirin A. A. (1970), Third-order difference methods for hyperbolic equation. *J. Comp. Phys.*, 5, 547—571.

Campbell N. G. (1970), Stability analysis of a difference scheme for the Navier-Stokes equations, *Numer. Math.*, 14, 435—447.

Cannon J. R. (1963), Determining of an unknown coefficient in a parabolic differential equation, *Duke Math. J.*, 30, 313—323.

Cannon J. R. (1964), Determination of certain parameters in heat conduction problems, *JMAA*, 8, 188—201.

Cannon J. R., Duchateau P. (1973a), Determining unknown coefficients in a nonlinear heat condection problem, *SIAM J. Appl. Math.*, 24, 298—314.

Cannon J. R., Duchateau P. (1973b), Determination of unknown physical properties in heat conduction problems, *Int. J. Eng. Sci.*, 11, 783—794.

Cannon J. R., Duchateau P. (1978), Determination of unknown coefficients in parabolic operator from over specified initial boundary data, *J. Heat Transfer*, 160, 503—507.

Cannon J. R., Duchateau P (1980), An inverse problem for a nonlinear diffusion equation, *SIAM J. Appl. Math.*, 39, 272—289.

Carnahan B., Luther H. A., Wilkes J. (1969), Applied numerical method, John Wiley and Sons, INC, New York.

Cavendish J. C. (1972), Collocation methods for elliptic boundary value problems. Ph. D. thesis, Univ. of Pittsburg.

Céa J. (1964), Approximation variationelle des problèmes aux limites, *Ann. Inst. Fourier*, 14, 345—444.

Charney J. G., Phillips N. A. (1953), Numerical integration of the quasigeostrophic

equations for barotropic and simple baroclinic flows, *J. Metheorol.* **10**, 71—99.

Chatelin F. (1973), Convergence of approximation methods to compute eigenelements of linear operators, *SIAM J. Numer. Anal.*, **10**, 939—948.

Chatelin F. (1981), The spectral approximation of linear operators with applications to the computation of eigenelements of differential and integral operators, *SIAM Rev.*, **23**, 495—522.

Chen Sui-yang, Guo Ben-yu (1984), The asymptotic behavior and the convergence of the solution of a reaction-diffusion difference scheme in a circular region, to appear.

Chen Sui-yang, Guo Ben-yu (1985), A discrete model of budworm with predator in a circular region, to appear.

Chen Y. M. (1979), Numerical methods for solving a class of inverse matrix problems in active remote sensing, in ≪Proc. Int. Sym. ill — posed problem: Theory and practice≫, Univ. of Delawave, October, New York.

Chen Y. M. (1981), Inverse problems of partial differential equations, It's numerical solutions and practical applications, Lecture notes, State Univ. of New York at Stony Brook.

Chen Y. M., Liu J. Q. (1981), A numerical algorithm for remote sensing of thermal conductivity, *J. Comp. Phys.*, **43**, 315—326.

Chen Y. M., Surmont J. (1974), Iterative algorithms for constructing approximate solutions of nonlinear problems from erroneous inadequate data, *JMAA*, 46, 275—288.

Chen Y. M., Surmont J. (1976), Iterative algorithms for nonlinear problems in remote sensing, *Appl. Math. Comp.*, 2, 197—228.

Chen Y. M., Tsien D. S. (1977), A numerical algorithm for remote sensing of density profiles of a simple ocean model by aeoustu pulses, *J. Comp. Phys.*, 25, 366—385.

Cheng S. I. (1968), Accuracy of difference formulation of Navier-Stokes equations, AMS department, Princeton University, Princeton, N. J..

Cheng S. I. (1970), Numerical integration of Navier-Stokes equations, *AIAA. J.*, 8, 2115—2122.

Chin hsien Li (1983), A finite element front tracking method for Stefan problems, *IMAJNA*, **3**, 87—107.

Chorin A. J. (1967a), Numerical study of thermal convection, *J. Comp. Phys.*, **2**, 12—26.

Chorin A. J. (1967b), The numerical solution of the Navier-Stokes equations for an incompressible fluid, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 928—931.

Chorin A. J. (1968), Numerical solution of Navier-Stokes equation, *Math. Comp.*, 22, 745—762.

Chorin A. J. (1973), Numerical study of slightly viscous flow, *J. Fluid Mech.*, 57, 785—796.

Chorin A. J. (1976), Random choice solution of hyperbolic systems, *J. Comp. Phys.*, **22**, 517—533.

Christie I., Griffiths D. F., Mitchell A. R., Zienkiewicz O. C. (1976), Finite element

methods for second order differential equations with significant first derivatives. *International journal for numerical methods in engineering*, **10**, 1389—1396.

Christie I., Mitchell A. R. (1978), Upwinding of high order Galerkin methods in conduction-convection problems, *International journal for numerical methods in engineering*, 12, 1746—1771.

Chu C. K., Xiang L. W., Baransky Y. (1983), Solitary waves induced by boundary motion, *CPAM*, **36**, 495—504.

Chueh K. N., Conley C. C., Smoller J. A. (1977), Positively invariant region for systems of nonlinear diffusion equations, *Indiana J. Math.*, **26**, 373—392.

Ciarlet P. G. (1974), Sur l'element de Clough et Tocher, Revue francaise d'automatique, informatique, recherche operationelle, R-2, 19-27.

Ciarlet P. G. (1978), The finite element method for elliptic problems, North-Holland, Amsterdam.

Ciarlet P. G., Raviart P. A. (1972), Interpolation theory over curved elements with applications to finite element methods, *Comp. Methods in Appl. Mech. Eng.*, **1**, 217—249.

Ciarlet P. G., Raviart P. A. (1973), The combined effect of curved boundaries and numerical integration in isoperimetric finite element methods, in ≪Mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations≫, ed. by Aziz A. K., 404—473, Academic Press, New York.

Ciarlet P. G., Schultz, M. H., Varga R. S. (1967), Numerical methods of highorder accuracy for nonlinear boundary value problems I: One dimensional problems, *Numer. Math.*, **9**, 394—430.

Ciarlet P. G., Schultz M. H., Varga R. S. (1969), Numerical methods of high-order accuracy for nonlinear boundary value problems V: Monotone operator theory, *Numer. Math.*, **13**, 51—77.

Ciavaldini J. F., Nédélec J. C. (1974), Sur l'élément de Fraeijs De Veubeke et Sander, Revue francaise d'automatique, informatique, rechêrche operationelle, R-2, 29—46.

Ciment M., Leventhal S. H. (1975), Higher order compact implicit schemes for the wave equation, *Math. Comp.*, **29**, 985—994.

Clough R. W. (1960), The finite element methods in plane stress analysis, in ≪Proceedings of the second ASCE conference on electronic computation≫, 345—378, American society of civil engineers, Pittsburgh. Pd..

Clough R. W., Tocher J. L. (1965), Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending, in ≪Proceedings of the conference on matrix methods in structural mechanics≫, Wright Patterson 1, A. F. B., Ohio.

Collatz L. (1933), Bemerkungen zur Fehlerabschätzung für das Differenzenverfahren bei partiellen Differentialgleichungen, *Z. Angew. Math. Mech.*, **13**, 56—57.

Collatz L. (1938), Konvergenz des Differenzenverfahrens bei Eigenwertproblemen partieller Differentialgleichungen, *Deutche Math.*, 3, 200—212.

Collatz L. (1949), Eigenwertaufgaben mit technische Anwerdungen, Akad Dverlag,

Leipzig.

Collatz L. (1955), Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, 2'nd ed., Springer-Verlag, Berlin.

Collatz L. (1960), The numerical treatment of differential equations, 3'rd ed., Springer-Verlag, Berlin.

Conway E., Hoff D., Smoller I. (1978), Large time behavior of solutions of systems of nonlinear reaction-diffusion equations, *SIAM J. Appl. Math.*, **35**, 1—16.

Courant R. (1943), Variational methods for the solutions of problems of equailibrium and vibration, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49**, 1—23.

Courant R., Friedrichs K. O. (1948), *Supersonic flow and shock waves*, Interscience New York.

Courant R., Friedrichs K. O., Lewy H (1928), Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik, *Math. Ann.*, **100**, 32—74.

Courant R., Hilbert D. (1953), Methods of mathematical physics, I, Interscience, New York.

Courant R., Hilbert D. (1962), Methods of mathematical physics, II, Interscience, New York.

Courant R., Isaacson E., Rees M. (1952), On the solution of non-linear hyperbolic differential equations by finite differences, *CPAM*, **5**, 243—255.

Cowper G. R., Kosko E., Lindberg G. M., Olson M. D. (1969), Static and dynamic applications of a high-precision triangular plate bending element, AIAA. J. 7, 1957—1965.

Crandall S. H. (1957), An optimum recurrence formulas for a forth order parabolic partial difference equation, *J. Assoc. Comput. Machinery*, **4**, 467—471.

Crandall M. G., Rabinowitz P. H. (1980), Mathematical theory of bifurcation, in "Bifurcation phenomena in mathematical physics and related topics, proceedings of the NATO advanced study institute", ed. by Bardos C., Bessis P., 3—46, D. Reidel publishing company, Dordrecht.

Crank J., Nicolson P. (1947), A practical method for the numerical evaluvation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **43**, 50—67.

Curtis J. H. (1936), A note on the degree of polynomial approximation, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **42**, 873—878.

Dahlquist G. (1954), Convergence and stability for a hyperbolic difference equation with analytic initial-values, *Math. Scand.*, **2**, 91—102.

Dahlquist G. (1956), Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations, *Math. Scand.*, **4**, 33—53.

Davis P. J. (1963), Interpolation and approximation, Blaisdell, New York.

Davis P. J., Rabinowitz P. (1969), Advances in orthonormalizing computations, *Advances in computers*, **2**, 55—133.

Davis R. T. (1972), Numerical solution of the Navier-Stokes equations for symmetric laminar incompressible flow past a parabola, *J. Fluid Mech.*, **51**, 417—433.

De Boor C. (1969), On the approximation by γ-polynomials, in ≪Approximations with special emphasis on spline functions≫, ed. by Schoenberg I. J., 157—

183, Academic Press, New York.

De Boor C., Swartz, D. (1972), Collocation at Gaussian points, Los Alamos Report, 12—65, also see *SIAM J. Numer. Anal.*, **10** (1973), 582—606.

Defour M., Fortin M., Payne G. (1981), Finite difference solutions of a nonlinear Schrödinger equation, *J. Comp. Phys.*, **44**, 277—288.

Diaz J. B., Roberts R. C. (1952), On the numerical solution of the Dirichlet problem for Laplace's difference equation, *Quart. Appl. Math.*, **4**, 355—360.

Di guglielmo F. (1969), Construction d'approximations des espaces de Sobolev sur des rêseaux en simplexes, *Calcolo*, **6**, 279—331.

Dinh R. V., Glowinski R., Periaux J. (1980), Applications of domain decomposition techniques to the numerical solution of the Navier-Stokes equations, GAMNI. Dec., INF-LAB, 80012.

Diperna R. J. (1973), Global solutions to a class of nonlinear hyperbolic systems of equations, *CPAM*, **26**, 1—28.

Diperna R. J. (1982), Finite difference schemes for conservation laws, *CPAM*, **35**, 379—450.

Diperna R. J. (1983a), Convergence of approximate solution to conservation laws, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **82**, 27—70.

Diperna R. J. (1983b), Convergence of the viscousity method for isentropic gas dynamics, *Comm. Math. Phys.*, **91**, 1—30.

Doolan E. P., Miller J. H., Schilders W. H. A. ed. (1980), Uniform numerical methods for problems with initial and boundary layers, Bool Press, Dublin.

Dorodnichn A. A. (1972), Review of methods for solving the Navier-Stokes equations, in ≪Proceeding of the third international conference on numerical methods in fluid mechanics, Lecture notes in physics, 19≫, ed. by Cabannes H., Teman R., 1——11, Springer-Verlag, Berlin.

Douglas J. (1955), On the numerical integration of $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = \partial u/\partial t$ by implicit methods, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, **3**, March, 42—65.

Douglas J. (1956a), On the relation between stability and convergence in the numerical solution of linear parabolic and hyperbolic differential equations, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, **4**, 20—37.

Douglas J. (1956b), On the numerical integration of quasi-linear parabolic differential equations, *Pacific. J. Math.*, **6**, 34—42.

Douglas J. (1961), Survey of numerical methods for parabolic differential equations, Advances in computers, II, 1—54, Academic Press, New York.

Douglas J. (1962), Alternating direction methods for three space variables. *Numer. Math.*, **4**, 41—63.

Douglas J., Dupont T. (1971), Galerkin methods for parabolic equations, in ≪Numerical solution of partial differential equations II, SYNS-PADE 70≫, ed. by Hubbard B., 133—214, Academic Press, New York.

Douglas J., Dupont T. (1972), A super convergence result for the approximate solution of the heat equation by a collocation method, in ≪Mathematical foundations of finite element method with application to partial differential equa-

tions≫, ed. by Aziz A. K., 475 490, Academic Press, New York.

Douglas J., Dupont T. (1973), A finite element collocation method for quasilinear parabolic equations, *Math. Comp.*, **27**, 17—28.

Douglas J., Dupont T. (1974), Collocation methods for parabolic equations in a single space variable (based on C^1-piecewisepolynomail spaces), Lecture notes in Math., 385, Springer-Verlag, Berlin.

Douglas J., Dupont T. (1975), A Galerkin method for a nonlinear Dirichlet problem, *Math. Comp.*, **29**, 689—696.

Douglas J., Gunn J. E. (1964), A general formulation of alternating direction methods, Part I, parabolic and hyperbolic problems, *Numer Math.*, **6**, 428—453.

Douglas J., Jones B. F. (1962), The determination of a coefficient in a parabolic differential equation, Part II. Numerical approximation, *J. Math. Mech.*, **11**, 919—926.

Douglas J., Rachford H. H. (1956), On the numerical solution of heat conduction in two and three space variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **82**, 421—439.

Douglas N. A., Douglas J., Thomée V. (1981), Super convergence of a finite element approximation to the solution of a Sobolev equation in a single space variable, *Math. Comp.*, **36**, 55—63.

Douglis A., Nirenberg L. (1955), Interior estimates for elliptic systems of partial differential qeuation, *CPAM*. **8**, 503—538.

Duffin R. J. (1947), Lower bounds for eigenvalues, *Phys. Rev.* **(2)**, **71**, 827—828.

Duffy D. J. (1980), Uniformly convergent difference scheme for the convectiondiffusion equation, in ≪Boundary and interior layers computational and asymptotic methods≫, ed. by Miller J. H., 265—269, Boole Press, Dublin.

Du Fort E. C., Frankel S. P. (1953), Stability conditions in the numerical treatment of parabolic differential equations, *Math. tables and other aids to computation*, **7**, 135—152.

Dushane T. E. (1973), Convergence for a vortex method for solving Euler's equation, *Math. Comp.*, **27**, 719—728.

Duvaut G., Lions J. L. (1972), Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, Paris.

Eilbeck J. C., McGuire G. R. (1975), Numerical study of the regularized long wave equation II, Interaction of solitary waves, *J. Comp. Phys.*, **19**, 43—57.

Eilbeck J. C., McGuire G. R. (1977), Numerical study of the regularised longwave equation II, Interaction of solitary waves, *J. Comp. Phys.*, **23**, 63—73.

Emmons H. W. (1949), The numerical solution of the turbulence problem, in ≪Proceedings of symposia in applied mathematics I≫, ed. by Eric R., William P., Stoker J. J., 67—71. AMS, New York.

Engeli M., Ginsburg T., Rutishauser H., Stiefel E. (1954), Refined iterative methods for computation of the solution and the eigenvalue of self-adjoint boundary value problems, Mitteilungen aus de Insititut für angewandte Mathematik, 8, Birkhauser, Basel.

Engquist. B., Osher S. (1980), Stable and entropy-satisfying approximations for transonic flow calculations, *Math. Comp.*, **34**, 45—75.

Engquist B., Osher S. (1981), One sided difference approximations for nonlinear conservations laws, *Math. Comp.*, **36**, 321—353.

Falk R. S. (1974), Error estimates for the approximation of a class of variational inequalities, *Math. Comp.*, **28**, 963—971.

Falk R. S. (1975), Approximation of an elliptic boundary value problem with unilateral constraints, Revue française automat. informat. recherche opérationeelle, *Sér rouge, Anal. Numér.* R-2, 5—12.

Feng Kang (1982), Canonical boundary reduction and finite element method, in «Proceedings of symposium on finite element method», 330—352, Science Press, Beijing.

Feng Kang, Yu De-hao (1983), Canonical integral equations of elliptic boundary-value problems and their numerical solutions, in «Proceedings of the China-France symposium on finite element methods», ed. by Feng Kang, Lions J. L., 211—252, Science Press, Beijing.

Ferri A. (1954), The method of characteristics, in «General theory of high speed aerodynamics, Princeton series VI», ed. by Sears W. R., 583—669, Princeton Uni. Press, Princeton, N. J..

Fife P. C., Mcleod J. B. (1977), The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to travelling front solutions, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **65**, 335—361.

Fife P. C. Mcleod J. B. (1979), A phase plane discussion of convergence to travelling fronts for nonlinear diffusion, M. R. C., Technical summary report, 1986.

Fichera G. (1964), Problemi elastostatici con vincoli unilaterali problema di signorini con ambigue condizioni al contorno, *Mem. Acc. Naz. Lincei.*, S. VIII, 7, fasc 5, 91—140.

Fichera G. (1972a), Existence theorems in elasticity in «Encyclopedia of physics VIa/2: Mechanics of solids II», ed. by Truesdell C., 347—384., Springer-Verlag, Berlin.

Fichera G. (1972b), Boundary value problems of elasticity with unilateral constrains, in «Encyclopedia of physics VIa/2: Mechanics of solids II» by Truesdell C., 390—424, Springer-Verlag, Berlin.

Finn R. (1965a), On the exterior stationary problem for the N-S equations and associated perturbation problems, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **19**, 363—406.

Finn R. (1965b), Stationary solutions of the N-S equations *Proc. Symp. Appl. Mathe.*, 19, Amer. Math. Soc..

Finn R., Smith D. R. (1967), On the stationary solution of the N-S equations in two dimensions. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **25**, 26—39.

Fisher R. A. (1937), The advance of advantageous genes, *Ann of Eugenics*, **7**, 355—369.

Fitzhugh R. (1961), Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membranes, *J. Biophys.*, **1**, 445—466.

Fix G. (1968), Bounds and approximations for eigenvalues of selfadjoint boundary value problem, ONR Report, Harvard University.

Fix G., Strang G. (1969), Fourier analysis of the finite element method in Ritz-Galerkin theory, *Studies in Appl. Math.*, **48**, 265—273.

Fornberg, B. (1969) A study of the instability of the leap-frog approximation of a nonlinear differential equation, Report NR 22, Department of computersciences, Uppsala University.

Fornberg B. (1973), On the instability of leap-frog and Crank-Nicolson approximations of a nonlinear partial differential equation, *Math. Comp.*, 27, 45—57.

Forsythe G. E. (1954), Asymptotic lower bounds for the frequencies of polygonal membranes, *Pacific J. Math.*, 4, 467—480.

Forsythe G. E. (1955), Asymptotic lower bounds for the fundamental frequency of convex membrane *Pacific J. Math.*, 5, 691—702.

Forsythe G. E. (1956), Difference Methods on a digital computer for Laplacian boundary value and eigenvalue problems, *CPAM*, 9, 425—434.

Forsythe G. E., Wasow W. R. (1960), Finite difference methods for partial differential equations John Wiley, New York.

Fox L. (1967), Romberg integration for a class of singular integrands, *Comp. J.*, 10, 87—93.

Fox L. (1971), Some experiments with singularities in linear elliptic partial differential equations, *Proc. Roy. Soc.* A 323, 179—190.

Fox L. (1977), Finite difference methods for elliptic boundary value problems, in ≪The state of the art in numerical analysis≫, ed. by Jacobs D., 799—881, Academic Press New York.

Fox L., Henrici P., Moler C. (1967a), Approximations and bounds for eigenvalues *Advances in computers*, 2, 55—133.

Fox L., Henrici P., Moler C. (1967b), Approximations and bounds for eigenvalues of elliptic operator, *SIAM J. Numer. Anal.*, 4, 89—102.

Fox L., Sankar R. (1969), Boundary singularities in linear elliptic differential equations, *J. IMA* 5, 340—350.

Fraeijs De Veubeke B. (1965), Bending and stretching of plate, in ≪Matrix methods in structural mechanics≫, ed. by Przemieniecki J. S., Bader R. M., Bozich W. F., Hohnson J. R., Mykytow W. J., 863—886. Wright Patterson A. F. B., Dayton, Ohio.

Fraeijs De Veubeke B. (1968), A conforming finite element for plate bending, *J. solids and structures*, 4, 95—108.

Frankel S. P. (1950), Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations, *Math. tables and other aids to computation*, 4 65—75.

Fredholm I. (1903), Sur une classe d'équations fonctionelle, *Acta Math.*, 27 365—390.

Friedman A. (1964), Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall Englewood, Cliffs, N. J.

Friedman A. (1968), The Stefan problem in several space variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 133, 51—87.

Friedman M. B., Shaw R. P. (1962) Diffraction of a plane shock wave by an arbitrary rigid cylindrical obstacle, *J. Appl. Mech.*, 29, 40—46.

Friedrichs K. O. (1953), On the differentiability of solutions of linear elliptic differential equatons, *CPAM*, 6, 299—326.

Friedrichs K. O. (1954), Symmetric hyperbolic linear differential equations, *CPAM*,

7, 345—392.

Friedrichs K. O., Keller H. B. (1966), A finite difference scheme for generalized Neumann problems, in «Numerical solutions of partial differential equations», ed. by Bramble J. H., 1—19, Academic Press New York.

Fritts M. J., Boris J. P. (1979), The Lagrangian solution of transient problems in hydrodynamics using a triangular mesh, *J. Comp. Phys.*, **31**, 173—215.

Fromm J. E. (1963), A method for computing nonsteady incompressible viscous fluid flows, Los Alamos Report, 2190.

Fuchs K. (1949), Perturbation theory in neutron multiplication problems, *Proc. Phys. Soc.*, **62**, 791—799.

Fujita H. (1969), On the nonlinear equations

$\Delta u + e^u = 0$ and $\partial v/\partial t = \Delta v + e^v$, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75**, 132—135.

Gabor T. H., Abrahom N. (1977), Fast image reconstruction based on a radon inversion formula appropriate for rapidly collected data, *SIAM J. Appl. Math.*, **33**, 511—533.

Garabedian P. (1963), Partial differential equations, John Wiley New York.

Garabedian H. J. ed. (1965), Approximation of functions, Elsevier, Amsterdam.

Gårding L. (1953), Dirichlet problem for linear elliptic partial differential equations, Math. Scand, 1, 55—72.

Gary A. S. (1978), Review: A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws, *J. Comp. Phys.*, **27**, 1—31.

Gates W. L. (1967), A numerical study of transient Rossby waves in a wind-driver homogeneous ocean, Rand. Corp. Report March.

Gentry R. A., Martin R. E., Daly B. J. (1966), An Eulerian differencing method for unsteady compressible flow problems, *J. Comp. Phys.*, **1**, 87—118.

Gerschgorin S. (1930), Felherabachätzung für das differenzenverfahren zur Lösung partieller differentialgleichungen, *Z. Angew. Math. Mech.* **10**, 373—382.

Gerschgorin S. (1931), Über die Abgrenzung der eigenwerte einer matrix, *Извести академии НАУК СССР, Отделение математических и естественных НАУК*, **7**, 749—754.

Giese J. H. (1958), On the truncation error in a numerical solution of the Neumann problem for a rectangle, *J. Math. Phys.*, **37**, 169—177.

Girault V. (1974), Theory of a finite difference method on irregular networks *SIAM J. Numer. Anal.*, **1**, 260—282.

Girault V. (1976), Nonelliptic approximation of a class of partial differential equation with Neumann boundary condition, *Math. Comp.*, **30**, 68—91.

Glimm J. (1965), Solution in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations, *CPAM*, **18**, 697—715.

Glowinski R., Lions J. L., Trémolières R. (1974), Résolution numériques des inéquations de la mécanique et de le physique, Paris.

Goldberg M., Abarbanel S. (1974), Stable approximations for hyperbolic systems with moving internal boundary conditions, *Math. Comp.*, **28**, 413—447.

Gottlieb D., Orszag S. A. (1977), Numerical analysis of spectral method: theory and application, *Soc. Indus. Appl. Mathe.*, Philadelphia.

Gould S. H. (1957) Variational methods for eigenvalue problems, An introduction to the methods of Rayleigh-Ritz, Weinstein and Aronszajn, Univ. of Toronto Press, Toronto.

Gould S. H. (1966), Variational methods for eigenvalue problems, Univ. of Toronto Press, Toronto.

Gourlay A. R. (1970a), Hopscotch: A fast second order partial differential equation solver, *J. Inst. Maths. Appl.*, **6**, 375—390.

Gourlay A. R. (1970b), Time dependent problems, Report 0002, IBM scientific centre, Peterlee, County Durham, England.

Gourlay A. R. (1971) Some recent methods for the numerical solution to time-dependent partial differential equations, *Proc. Roy. Soc. London.*, A323, 219—235.

Gourlay A. R. Mckee S. (1971). On a numerical comparision of hopscotch with A. D. I. and L. O. D. methods for parabolic and elliptic equations in two space dimensions with a mixed derivative, IBM Ltd, Peterlee, County Durham, England.

Gourlay, A. R., Mitchell A. R. (1969), The equivalence of certain alternating direction and locally one dimensional difference methods, *SIAM J. Numer. Anal.*, **6**, 37—46.

Gourlay A. R., Mitchell J. L. (1968), Finite-difference methods for nonlinear hyperbolic systems, *Math. Comp.*, **22**, 28—39.

Gourlay A. R., Morris J. L. (1971), Hopscotch methods for non-linear hyperbolic systems, IBM Ltd, Peterlee, County Durham, England.

Gray S. (1980), A second order procedure for one-dimensional velocity inversion, *SIAM J. Appl. Math.*, **39**, 456—462.

Gray S., Hagin F. (1982), Toward precise solution of one-dimensional velocity inverse problems, *SIAM J. Appl. Math.*, **42**, 346—355.

Green M. W., Sleeman B. D. (1974), On Fitzhugn's nerve axon equation, *J. Math. Biol.*, **1**, 153—163.

Greenspan D. (1969), Numerical studies of prototype Lavity flow problems, *J. Comp.*, appear.

Greenspan D. (1974), Discrete numerical methods in physics and engineering, Academic Press, New York.

Greig I. S., Morris J. L. (1976), A hopscotch method for the Korteweg-de Vries equation, *J. Comp. Phys.*, **20**, 64—80.

Greville T. N. E. (1969), Theory and applications of spline functions, Academic Press New York.

Griffiths D. F. (1982), The stability of difference approximation to nonlinear partial differential equation, *Bull. of IMA*, 18, December 210—215.

Griffiths D. F., Lorenz J. (1977), An analysis of the Petrov-Galerkin finite element method applied to a model problem, Research Paper 334, Department of mathematics and statistics, Univ. of Calgary.

Griffiths D. F., Mitchell A. R. (1979), On generating upwind finite element methods,

Report NA/38, Univ. of Dundee.

Griffiths D. F., Mitchell A. R., Morris J. L. (1982), A numerical study of the nonlinear Schrödinger equation, Report NA/52, Univ. of Dundee.

Growley W. P. (1970), FLAG, A free-Lagrangian method for numerically simulating hydrodynamic flows in two dimensions, in «Proceedings of the 2'nd international conference on numerical methods in fluid dynamics, Lecture notes in physics, 8», ed. by Holt M. 37—43.

Guo Ben-qi, Babuska I. (1985), The h-p version of the finite element method, Technical note, BN-1043, Lab. of numer. Anal., Univ. of Maryland.

Guo Ben-yu (1981), Difference method for fluid dynamics-numerical solution of primitive equations, *Scientia Sinica*, **24**, 297—312.

Guo Ben-yu (1982), On stability of discretization, *Scientia Sinica*, **25**, series A, 702—715.

Guo Ben-yu (1983a), Strict error estimation of numerical solution of compressible flow in two dimensional space, *Scientia Sinica*, **26**, Series A, 482—498.

Guo Ben-yu (1983b), Numerical solution of ideal fluid, Kexue Tongbao, Special issue, 83—86.

Guo Ben-yu (1983c), On weak stability of discretization for operator equation, to appear.

Guo Ben-yu (1984a), The conservation, stability and convergence of prediction-correction method for a nonlinear equation, in «Proc. of BAIL III», ed. by Miller J. H., 31—39, Boole Press, Dublin.

Guo Ben-yu (1986), The convergence of numerical method of nonlinear Schrödinger equation, *JCM*, 4, 121—130.

Guo Ben-yu (1985a), Numerical approximation of isolated solutions, in «Proc. of 1984 Beijing symposium on differential geometry and differential equations», ed. by Feng Kang, 194—205, Science Press, Beijing.

Guo Ben-yu (1985b), Numerical solution of reaction diffusion equation, *JCM*, 3, 298—314.

Guo Ben-yu (1985c), Numerical solution of an initial-boundary value problem of the Korteweg-de Vries equation, *Acta Mathematica Scientia*, 5, 337—348.

Guo Ben-yu, Chen Sui-yang (1984), On nonlinear reaction-diffusion difference equation. Northersten Mathe. J., 2, 431—448.

Guo Ben-yu, Mitchell A. R. (1984), Analysis of a nonlinear difference equation in reaction-diffusion, Numer. Math., 49, 511—527.

Guo Ben-yu Pedro J. Pascual, Maria J. Rodriguez, Luis Vazquez (1985), Numerical solution of the sine-Gordon equation, AMC, 18, 1—14.

Guo Ben-yu Weideman J. A. C. (1985), Solitary solution of an initial boundary value problem of the Korteweg-de Vries equation, in «Proc. of international conference on nonlinear mechanics», ed. by Clien Wei-Zang, Guo Zhong-heng, Yeh kaiyuan, 696—702, Science Press, Beijing.

Gustafsson. B., Kreiss, H. O., Sundstrom. A. (1972), Stability theory of difference approximations for mixed initial boundary value problems II, *Math. Comp.*, **26**, 649—686.

Hackbusch W. (1979), Bemerkungen zur iterierten Defektkorrektur und zuihrer Kombination mit mehrgitterverfahren, Report 79-13, Angew Math., Univ. Köln, Septenber.

Hackbusch W. (1982), Introduction to multigrid methods for numerical solution of boundary value problem, in ≪Computational methods for turbulent, Transonic, and viscous flow≫, ed. by Essers J. A., Hernisphers Publ. Corpo.

Hagin F. (1980), On the construction of well-conditioned systems for Fredholm I problems by mesh adapting, *J. Comp. Phys.*, **36**, 154—169.

Hagin F. (1981a), A stable approach to solving one-dimensional inverse problems, *SIAM J. Appl. Math.*, **40**, 439—452.

Hagin F. (1981b), Some numerical approaches to solving one-dimensional inverse problems, *J. Comp. Phys.*, **43**, 16—30.

Hald O. H. (1979), The convergence of vortex methods II, *SIAM J. Numer. Math.*, **16**, 726—755.

Haltiner G. J. (1971), Numerical weather prediction, John Wiley, New York.

Hardy G. H., Littlewood J. E., Pölya G. (1952), Inequalities, 2'nd ed., Cambridge University Press.

Harlow F. H. (1964), The particle-in-cell computing method for fluid dynamics, in ≪Methods in computational physics≫, ed. by Alder B., Fernbach S., Rotenberg M., **3**. 319—343, Academic Press, New York.

Harlow F. H. Amsden A. A. (1971), A numerical fluid dynamics calculation method for all flow speeds, *J. Comp. Phys.*, **8**, 197—213.

Harlow F. H., Amsden A. A. (1974), Multifluid flow calculation at all Mach numbers, *J. Comp. Phys.*, **16**, 1—19.

Harlow F. H., Evans M. W. (1955), Machine calculation method for hydrodynamic problems, Los Alamos Report 1956.

Harlow F. H., Fromm J. E. (1965), Computer experiments in fluid dynamics, *Scientific American*, **212**, 104—110.

Harlow F. H., Welch I. E. (1965), Numerical calculation method of time dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, *Phys. Fluids*, **8**, 2182—2189.

Harten A. (1974), The method of artifical compression I, Shocks and contact discontinuity, AEC research and development report-Coo-3077-50. Courant Inst. mathematical science, New York University.

Harten A. (1977), The artificial compression method for computation of schocks and contact discontinuities I, Simple conservation laws, *CPAM*, **30**, 611—638.

Harten A. (1978), The artificial compression method for computation of shocks and contact discontinuities, II, self-adjusting hybrid schemes, *Math. Comp.*, **32**, 363—389.

Harten A., Hyman J. M., Lax P. D., Keyfitz B. (1976), On finite difference approximations and entropy conditions for shocks, *CPAM*, **29**, 297—322.

Harten A., Tal-Fzer H. (1981), On a fourth order accurate implicit finite difference scheme for hyperbolic conservation laws: I, Nonstiff strongly dynamic problems, *Math. Comp.*, **36**, 353—373.

Harten A., Zwas G. (1972), Self-adjusting hybrid schemes for shock computation, *J. Comp. Phys.*, **9**, 568—583.

Hatcher R. P., Chen Y. M. (1983), An iterative method for solving inverse problems of a nonlinear wave equation, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, **4**, 149—163.

Heinrich J. C., Huyakorn P. S., Mitchell A. R., Zienkiewicz O. C. (1977), An upwind finite element scheme for two dimensional convective transport equations. *International journal for numerical method in engineering*, 11, 131—143.

Helmholtz H. (1859), Théorie der luftscheringungen in Rohren mit offenten ender, Crelle vii-1.

Harsch J. (1955), Équations differentielles et fonctions de cellules, *C. R. Acad. Sci., Paris*, **240**, 1602—1604.

Hersch J. (1963), Lower bounds for all eigenfunctions by cell functions, *Arch. Rat. Mech. Annl.*, **12**, 361—366.

Hersch J., Pfluger A., Schopf A. (1956), Über ein simultanes Differenzenverfahren zur abschätzung des Torsionssteifigkeit und der kapazität nach beiden Seiten, *Z. Angew. Math. Physik*, 7, 89—113.

Heywood J. G. (1970), On stationary solutions of the Navier-Stokes equations as limits of nonstationary solutions, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **37**, 48—60.

Hilbert S. (1969), Numerical methods for elliptic boundary problems, Ph. D. thesis, Univ. of Maryland.

Hilbert S. (1973), A molifier useful for approximations in Sobolev spaces and applications to approximating solutions of differential equations, *Math. Comp.*, **27**, 81—89.

Hirota R. (1971), Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons, *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 1192—1194 .

Hirsh R. S. (1975), Problems by a compact differencing technique, Higher order accurate difference solutions of fluid mechanics, *J. Comp. Phys.*, **19**, 90—109.

Hirt C. W. (1968), Heuristic stability theory for finite-difference equations, *J. Comp. Phys.*, **2**, 339—355.

Hirt C. W., Amsden A. A. (1974), An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds, *J. Comp. Phys.*, 14, 227—253.

Hobby C. R., Rice J. R. (1967), Approximation from a curve of functions, *Arch. Rat. Mech. Annl.*, **24**, 91—106.

Hockney R. W. (1970), The potential calculation and some application, in «Methods of computional physics», ed. by Alder B., Fernback S., Rotenberg. M., 9, 136—210, Academic Press, New York.

Hodgkin A. L., Huxley A. F. (1952), A qualitative description of membrance current and its application to conduction and excitation in nerves, *J. Physiol.*, 117, 500—544.

Hodgkins W. R. (1967), On the relation between dynamics relaxation and semi-iterative, Matrix Method, *Numer. Math.*, **9**, 446—451.

Hoff D. (1978), Stability and convergence of finite difference methods for systems of nonlinear reaction-diffusion equation, *SIAM J. Numer. Anal.*, **15**, 1161—

1177.

Heude Han (1982), The finite element method in a family of improperly posed problems, *Math. Comp.*, **38**, 55—65.

Householder A. S. (1964), The theory of matrices in numerical analysis, Blaisdell, New York.

Houstis E. N. (1977), Application of method of collocation on lines for solving nonlinear hyperbolic problems, *Math Comp.*, **31**, 443—456.

Hsiao G. C., Kopp P., Wendland W. L. (1980), A Galerkin collocation method for some integral equations of the first kind, *Computing*, **25**, 89—130.

Hsiao G. C., Maccamy R. C. (1973), Solutions of boundary value problems by integral equations of the first kind, *SIAM Review*, **15**, 687—705.

Hsiao G. C., Wendl and W. L. (1977), A finite element method for an integral equation of the first kind, *J. Math. Anal. Appl.*, **58**, 449—481.

Hubbard B. (1961), Bounds for eigenvalues of the free and fixed membrance by finite difference methods, *Pacific J. Math.*, **11**, 559—590.

Hubbard B. (1962), Eigenvalues of the non-homogeneous rectangular membrance by finite difference methods, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **9**, 121—133.

Hubbard B. (1966), Remarks on the order of convergence in the discrete Dirichlet problem, in ≪Numerical solution of partial differential equations≫, ed. by Bramble J. H., 21—34. Academic Press, New York.

Hung T. K., Macagno E. O. (1966), Laminar eddies in a two-dimensional conduit expansion, *La Houille Blanche*, **21**, 391—400.

Inoue M. (1954), Discrete Neumann problem, *J. Inst. polytech., Osaka City Univ.* Ser. A, **5**, 101—109.

Irons B. M., Razzaque A. (1972), Experience with the patch test for convergence of finite elements, in ≪The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations≫, ed. by Aziz A., 557—587, Academic Press, New York.

Isaacson E., Keller H. B. (1966), Analysis of numerical methods, John Wiley, New York.

Ito F. A. (1972), A collocation method for boundary value problems using spline functions, Ph. D. thesis, Univ. of Brown.

Jamet P. (1976), Estimations d'erreur pour des éléments finis droits presque dégénèvès, Rev. française automat, informat. rechèrche opérationelle, *Sér Rouge, Anal. Numer.*, **10**, 43—61.

Jamet P. (1978), Galerkin-type approximations which are discontinuous in time for parabolic equations in a variable domain, *SIAM J. Numer. Anal.*, **15**, 912—928.

Janssen E. (1956), An analog method for solving the hydrodynamic equations for two dimensional viscous flow II, Application of the method to the case of flow past a flat plate, Dissertation, Univ. of California, Los Angeles, 81.

Jaswon M. A. (1963), Integral equation methods in potential theory, I. *Proc. Roy. Soc.*, Ser. A, **275**, 23—32.

Jaswon M. A., Synn G. T. (1977), Integral equation methods in potential theory and

elastostatics, Academic Press, New York.

Jennings G. (1974), Discrete shocks, *CPAM*, **27**, 25—37.

John F. (1952), On integration of parabolic equations by difference methods, I, Linear and quasilinear equations for the infinite interval, *CPAM*, 5, 155—211.

John F. (1955a), Numerical solution of the equation of heat conduction for proceeding times, Annali di matemat pura ed Applicata, Serie 4, 40.

John F. (1955b), Differential equations with approximare and improper data. Lectures, New York University.

Jones B. J. (1962), The determination of a coefficient in a parabolic differential equation, Part I, Existence and uniqueness, *J. Math. Mech.*, **11**, 907—918.

Joseph D. D. (1965), Nonlinear heat generation and stability of the temperature distribution in conduction solids, *Int. J. Heat. Mass. Transfer*, **8**, 281—288.

Joseph D. D., Sparrow E. M. (1970), Nonlinear diffusion induced by nonlinear sources, *Quart. Appl. Math.*, 28, 327—342.

Kang Lishan (1981), The Schwarz algorithm, *Wuhan university journal, Natural Science edition*, Special issue of mathematics, 1, 77—88.

Katsanis T. (1968), Numerical solution of symmetric positive differential equations, *Math. Comp.*, 22, 763—783.

Kaup D. J., Hansen P. J. (1985), The forced nonlinear Schrödinger equation NSF-ITP-85-22, Univ. of California, Santa Barbara.

Keller H. B. (1965), On the accuracy of finite difference approximations to the eigenvalues of differential and integral operators, *Numer. Math.*, **7**, 412—419.

Keller H. B. (1968), Numerical methods for two-point boundary problems, Ginn Walthan, Mass.

Keller H. B. (1969a), Accurate difference methods for linear ordinary differential systems subject to linear constraints, *SIAM. J. Numer. Anal.*, **6**, 8—30.

Keller H. B. (1969b), Elliptic boundary value problems suggested by nonlinear diffusion processes, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **35**, 363—381.

Keller H. B. (1970), Newton's method under mild differentiability conditions, *J. Comput. System*, Sci. 4, 15—28.

Keller H. B. (1971), A new difference scheme for parabolic problems, in «Numerical solution of partial differential equation II», ed. by Hubbard. B., Academic Press, New York.

Keller H. B. (1975), Approximation methods for nonlinear problems with application to two-point boundary value problems, *Math. Comp.*, 29, 464—476.

Keller H. B. (1977), Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems, in «Applications of bifurcation theory», ed. by Rabinowitz P. H., 359—384, Academic Press, New York.

Keller H. B., Cohen D. S. (1967), Some positone problems suggested by nonlinear heat generation, *J. Math. Mech.*, **16**, 1361—1376.

Keller H. B., Thomée V. (1962), Unconditionally stable difference methods for mixed problems for quasilinear hyperbolic systems in two dimensions, *CPAM*, **15**, 63—73.

Keller J. B. (1976), Inverse problems, *Amer. Math. Monthly*, 83, 107—118.

Keller J. B., Antman S. (1969), Bifurcation theory and nonlinear eigenvalue problems, Benjamin, New York.

Keller J. B., Rubinow S. I. (1960), Asymptotic solution of eigenvalue problems, *Ann. Phys.*, 24—75.

Kellogg O. D. (1929), Foundations of Potential theory, Dover Publ., New York.

Kellogg R. B. (1966), An error estimate for elliptic difference equations on a convex polygon, *SIAM J. Numer. Anal.*, **8**, 79—90.

Kellogg R. B. (1969), A nonlinear alternating direction method, *Math. Comp.*, **23**, 23—27.

Kellogg R. B. (1970), On the Poisson equation with interseting interfaces, Tech. Note., BN—643, Univ. of Maryland.

Kellogg R. B. (1971), Singularities in interface problems, in ≪Numerical solution of partial differential equation II≫, ed. by Hubbard B. Academic Press, New York.

Kellogg R. B., Tsan T. (1978), Analysis of some difference approximation for a singular perturbation problem without turning points, *Math. Comp.*, **32**, 1025—1039.

Kirchhoff G. (1882), Zur theorie der Lichsttrahlen, *Berl. Ber.*, 641.

Kleinman R. E., Angell T. S. (1982), Boundary integral equations for the Helmholtz equation, The third boundary value problem, *Mathematical methods in the applied sciences*, **4**, 164—193.

Kleinman R. E., Roach G. F. (1974), Boundary integral equation for the three dimensional Helmholtz equation, *SIAM Review*, **16**, 214—236.

Kolsky H. G. (1955), A method for the numerical solution of transient hydrodynamic shock problems in two space dimensions, Los Alamos Report 1867.

Korteweg D. J., de Vries G. (1895), On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves, *Phil. Mag.*, **39**, 422—443.

Krasnosel'skii M. A. (1964), Positive solutions of operator equations, P. Noordnolf, Groningen, The Netherlands.

Krasnosel'skii M. A., Stechenko V. JA (1966), Some nonlinear problems with many solutions, *Amer. Math. Soc. Transl.* (2), **54**, 29—48.

Kreiss H. O. (1960), Über die Lösung von Anfangswertaufgaben für partielle Differentialgleichungen mit hilfe von Differenzengleichungen, Trans. Roy. Inst. Tech., Stockholm, 166.

Kreiss H. O. (1962), Über die Stabilitäts Definition für Differenzengleichungen die partielle differentialgleichungen Approximeren, *Nordisk Tidokr, Informations Behandling*, **2**, 153—181.

Kreiss H. O. (1963), Über implizite Differenzenmethoden für partielle Differentialgleichungen, *Numer. Math.*, 5, 24—47.

Kreiss H. O. (1964), On difference approximations of the dissipative type for hyperbolic differential equations, *CPAM*, **17**, 335—353.

Kreiss H. O. (1965), On difference approximation, in ≪Symposium on numerical solution of partial differential equations≫, Univ. of Maryland, May, 51—58.

Kreiss H. O. (1966), Difference approximation for initial boundary value problem for hyperbolic differential equations, in ≪Numerical solution of nonlinear differential equations≫, 141—160, John Wiley, New York.

Kreiss H. O. (1968), Stability theory for difference approximations of mixed initial boundary value problems (1), *Math. Comp.*, 22, 703—714.

Kreiss H. O. (1969), Numerical solution of ordinary differential equations, Lecture notes, Computer Sci. Dept., Univ. of Uppsala, Uppsala, Sweden.

Kreiss H. O. (1971a), Initial boundary value problems for partial differential and difference equations in one space dimension, in ≪Numerical solution of PDE-II≫, ed. by Hubbard B., 401—416, Academic Press, New York.

Kreiss H. O. (1971b), Difference approximations for initial boundary value problems, *Proc. Roy. Soc. London*, Ser. A, **323**, 255—261.

Kreiss H. O. (1976), The numerical methods for singular perturbation problems, in ≪SIAM-AMS proceedings, 10≫ ed. by O'Malley R. E., 73—86, AMS, Providence, Rhode Island.

Kuo Pen-yu (1977), Numerical methods for incompressible viscous flow, *Scientia Sinica*, **20**, 287—304.

Kuo Pen-yu, (1980), Résolution numérique de fluide compressible, *C. R. Acad. Sc.. Paris*, Série A, **291**, 167—170.

Kuo Pen-yu (1981), Weak stability of nonlinear discretization, The talk in mathematical society of Japan, October, Tokyo, also see Kexue Tongbao, **30**(1985), 143—147.

Kuo Pen-yu (1983), Numerical solution of an initial value problem for a semiconductor device, COMPEL, **2**, 57—75.

Kuo Pen-yu (1984), Finite difference solution of a nonlinear elliptic equation, *JCM*, **2**, 272—278.

Kuo Pen-yu (1985), A survey of numerical method for solitary waves, *J. of mathematical research and exposition*, **5**, 151—157.

Kuo Pen-yu, Sanz-Serna J. M. (1981), Convergence of methods for the numerical solution of Korteweg-de Vries equation, *IMA JNA*, **1**, 215—221.

Kuo Pen-yu, Vazquez L. (1982), Numerical solution of an ordinary differential equation, *Anales de fisica*, Serie B, **78**, 270—272.

Kuo Pen-yu, Wu Hua-mo (1981), Numerical solution of K. D. V. equation, *JMAA*, **81**, 334—345.

Kutler P., Lomax, H., Warning R. F. (1972), Computation of space shuttle flow fields using noncentral finite-difference schemes, AIAA Paper, 72—193.

Kuttler J. R. (1967), Finite difference approximation for eigenvalues of uniformly elliptic operators, Tech. Note, BN-507. Institute for fluid dynamics, Univ. of Maryland.

Kuttler J. R. (1970), Finite difference approximations for eigenvalues of uniformly elliptic operators, *SIAM J. Numer. Anal.*, **7**, 206—232.

Kuwahara K., Takami H. (1973), Numerical studies of a two dimensional vortex motion by a system of point vortices, *J. Phys. Soc. Japan*, **34**, 247—253.

Laasonen P. (1957), On the degree of convergence of discrete approximations for the

solutions of the Dirichlet problem, *Ann. Acad. Sci. Fenn. A. I.*, **246**, 1—19.

Laetsch T. I (1969), A note on a paper of Keller and Cohen, *J. Math. Mech.*, **18**, 1094—1107.

Lanczos C. (1938), Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions, *J. Math. Phys.*, **17**, 123—199.

Lanczos C. (1956), Applied analysis, Prentice Hall, New Jersey.

Lapidus A. (1967), A detached shock calculation by second-order finite difference, *J. Comp. Phys.*, **2**, 154—178.

Larkin B. K. (1964), Some stable explicit difference approximations to the diffusion equation, *Math. Comp.*, **18**, 196—202.

Lattès R., Lions J. L. (1969), The method of quasi-reversibility applications to partial differential equations, American Elsevier Publishing Company, INC., New York.

Lavrentiev M. M. (1971), Numerical solution of conditionally properly posed problem, in ≪Numerical solutions of partial differential equations II, SYNSPADE 1970≫, ed. by Hubbard B., 417—432, Academic Press, New York.

Lax P. D. (1954), Weak solution of non-linear hyperbolic equations and their numerical computation, *CPAM*, **7**, 159—193.

Lax P. D. (1957), Hyperbolic systems of conservation laws II, *CPAM*, **10**, 537—566.

Lax P. D. (1961), On the stability of difference approximations to solutions of hyperbolic equations with variable coefficients, *CPAM*, **14**, 497—520.

Lax P. D. (1964), Nonlinear-partial differential equations and computing, *SIAM Review*, **11**, 7—19.

Lax P. D. (1971), Shock waves and entropy, in ≪Nonlinear functional analysis≫, 603—634, Academic Press, New York.

Lax P. D. (1976), Almost periodic solutions of the K. D. V. equation, *SIAM, Review*, **18**, 351—375.

Lax P. D., Milgram A. N. (1954), Parabolic equations, Annals of mathematics studies, **33**, 167—190, Princeton University Press, Princeton, N. J..

Lax P. D., Nirenberg, L. (1966), On stability for differences, A sharp form of Garding's inequality, *CPAM*, 19, 473—492.

Lax P. D., Richtmyer R. D. (1956), Survey of the stability of linear finite difference equations, *CPAM*, **9**, 267—293.

Lax P. D., Wendroff B. (1960), Systems of conservation laws, *CPAM*, **13**, 217—237.

Lax P. D., Wendroff B. (1962a), On the stability of difference schemes, *CPAM*, **15**, 363—371.

Lax P. D., Wendroff B. (1962b), Difference schemes with high order of accuracy for solving hyperbolic equations. NYU report 9759, Courant Inst. of Math. Sci., Univ. of New York.

Lax P. D., Wendroff B. (1964), Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy, *CPAM*, 17, 381—398.

Lehman R. S. (1959), Developments at an analytic corner of solutions of partial differential equation, *J. Math. Mech.*, 8, 727—760.

Leonard A. (1980), Vortex method for flow simulation, *J. Comp. Phys.*, **37**, 289—

Le Roux A. Y. (1977a), A numerical conception of entropy for quasilinearequations, *Math. Comp.*, **31**, 848—872.

Le Roux A. Y. (1977b), Problème aux limites pour une équation quasi linéraire du premier ordre, Journées éléments finis, RENNES.

Lesaint P. (1976), On the convergence of Wilson's non conforming element for solving the elastic problem, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **7**, 1—16.

Less M. (1959), Approximate solution of parabolic equations, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, **7**, 167—183.

Less M. (1960a), A priori estimate for the solution of difference approximations to parabolic partial differential equations, *Duke, Math. J.*, 297—311.

Less M. (1960b), Energy inequalities for the solution of differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **94**, 58—73.

Less M. (1961a), The solution of positive-symmetric hyperbolic systems by difference method, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **12**, 195—204.

Less M. (1961b), Alternating direction and semi-explicit difference methods for parabolic differential equations, *Numer. Math.*, **3**, 398—412.

Less M. (1962), Alternating direction methods for hyperbolic differential equations, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, **10**, 610—616.

Levinson N. (1962), Positive eigenfunctions for

$\Delta u + \lambda f(u) = 0$, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **11**, 258—272.

Lilly D. K. (1965), On the computational stability of numerical solutions of time-dependent non-linear geophysical fluid dynamics problems, *Monthly Weather Rev.*, **33**, 11—26.

Lin Qun, Liu Jia-uan (1983), Defect corrections of finite element approximation for singular problem in ≪Proc. of China-France Symposion on finite element method≫, ed. by Feng Kang., Lions J. L., 361—368, Science Press, Beijing.

Lin Qun, Lu Tao (1984), The combination of approximate solutions for accelerating the convergence, *RAIRO. Numer. Anal.*, 18, 153—160.

Lindberg G. M., Olson M. D. (1970), Convergence studies of eigenvalue solutions using two finite plate bending elements, *Inter. J. Numer. Math. in Eng.*, 2, 99—166.

Lindstedt A. (1982), Über die integrationeiner für die störungstheorie wichtigen differentialgleichung, *Astron. Nach.*, **103**, 211—220.

Lions J. L. (1962), Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles, Les presses de l'universitaire de Montréal.

Lions J. L. (1969), Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéares, Dunod, Paris.

Lions J. L. (1970), On the numerical approximation of some equations arising in hydrodynamics, in ≪Numercal solution of field problems in continuum physics, SIAM-AMS proceedings II≫, ed. by Birkhoff G. Varga R. S., 11—23, AMS, Providence, Rhode Island.

Lions J. L., Magenes E. (1968), Problèmes aux limites non homogènes et applications,

1, Dunod, Paris.

Lions J. L., Raviart P. A. (1966). Remarque sur la résolution et l'approximation d'évolution couplées, *Icc. Bull.*, **5**, 1—20.

Lions J. L., Stampacchia G. (1967), Variational inequalities, *CPAM*, **20**, 493—519.

Lions P. L. (1978), Interpretation stochastique de la méthode alternée de Schwarz, *C. R. Acad. Sci., Paris*, **286**, 325—328.

Lorenz E. N. (1963), The predictability of hydrodynamic flow. *Trans. N. Y. Acad. Sci.*, Ser. II, **25**, 409—432

Lotkin M. (1958), The numerical integration of heat conduction equations, *J. Math. Phys.*, **37**, 178—187.

Macagno E. O. (1965), Some new aspects of similarity in hydraulics, *La Houille Blanche*, **20**, 751—759.

Maccormack R. W. (1969), The effect of viscosity hypervelocity impact cratering. AIAA Paper, 69—354.

Maccormack R. W. (1972), Computational efficiency achieved by time splitting of finite difference operators, AIAA Paper, 72—154.

Macneal R. H. (1953), An asymmetrical finite difference network, *Quart. Appl. Math.*, **11**, 295—310.

Majda A., Osher S. (1979), Numerical viscosity and the entropy condition, *CPAM*, **32**, 797—838.

Manoranjan V. S., Mitchell A. R., Sleeman B. D., Kuo Pen-yu (1984). Bifurcation studies in reaction-diffusion, *J. C. A. M.*, **11**, 27—37.

Marchioro C., Provirenti M. (1984), Vortex method in two-dimensional fluid dynamics, Lecture note in physics, 203, Springer-Verlag, Berlin.

Marchuk G. I., Yanenko N. N. (1965), Applications of the method of splitting (tractional steps) to the solution of problems of physics, IFIP Congress, New York.

Massau J. (1899), Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles, F. Meyer-Van Loo, Ghent 144.

Mathon R. (1972), On the approximation of elliptic boundary-value problems by fundamental solutions, Ph. D. thesis, Univ. of Toronto.

Mathon R., Johnston R. L. (1977), The approximate solution of elliptic boundary-value problems by fundamental solutions, *SIAM J. Numer. Anal.*, **14**, 638—650.

Mcallister G. T. (1969), Dirichlet problems for mildly nonlinear elliptic difference equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **27**, 338—366.

Mccrea, W. H., Whipple F. J. W. (1940), Random paths in two and three dimensions, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, Sect. A, **6**, 281—298.

Mckee S. (1973), High accuracy A. D. I. methods for hyperbolic equations with variable coefficients, *JIAM*, **11**, 105—109.

Mckee S., Mitchell A. R. (1970), Alternating direction methods for parabolic equations in two space dimensions with a mixed derivative. *Comp. J.*, **13**, 81—86.

Medeiros L. A., Menzala G. P. (1977), Existence and uniqueness for periodic solution of the Benjamin-Boha-Mahony equation, *SIAM J. Math. Anal.*, **8**, 792—799.

Meiring A., Mitchell A. R., Sleeman B. D. (1980), Numerical studies of reaction-diffusion, Report NA/39, Univ. of Dundee.

Menzel R., Schwetlick H. (1978), Zur Lösung parameterabhängiger nichtlinearer Gleichungen mit singulären Jacobimatrizen, *Numer. Math.*, **30**, 65—79.

Meyer R. E. (1971), Introduction to mathematical fluid dynamics, John Wiley, New York.

Meyer-spasche R. (1975), Numerische behandlung von elliptischen randwertproblemen mit mehreren lösungen und von magneto-hydrodynamischen gleichgewichtsproblememen, Dotoral thesis, Hamburg, Report Ipp6/141.

Meyer-spasche, R. (1979), A note on the approximation of mildly nonlinear Dirichlet problems by finite differences, *Numer. Math.*, **33**, 303—313.

Michelli C. A., Miranker W. L. (1973), Optimal difference schemes for linear initial value problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, **10**, 983—1009.

Miller K. (1964), Three circle theorems in partial differential equation and applications to improperly posed problem, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **16**, 126—154.

Miller K. (1965), Numerical analogs to the Schwarz alternating procedure, *Numer. Math.*, **7**, 91—103.

Miller J. J. H. (1979), On the convergence, uniformly in ε, of difference schemes for a two-point boundary singular perturbation problem, in ≪Numerical analysis of singular perturbation problem≫, ed. by Hemker P. W., Miller J. J. H., 467—474, Academic Press, New York.

Miller J. J. H., Strang W. G. (1965), Matrix theorems for partial differential and difference equations, Stanford University, Tech. Report CSC 28, Stanford.

Miranda M. M. (1975), Weak solutions of a modified K. D. V. equation, *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, **6**, 57—63.

Mitchell A. R., Griffiths D. F. (1979), Upwinding by Petrov-Galerkin methods in convection-diffusion problems, Report NA/36, Univ. of Dundee.

Mitchell A. R., Griffiths D. F. (1980), The finite difference methods in partial differential equations, John Wiley and Sons New York.

Mitchell A. R., Griffiths D. F., Kuo Pen-yu (1982), The stability of Petrov-Galerkin method for solving periodic problem of convection diffusion equation, *Mathematica numerica sinica*, **4**, 220—228.

Mitchell A. R., Pearce R. P. (1962), High accuracy difference formulae for the numerical solution of the heat conduction equation, *Comp. J.*, **15**, 142—146.

Mitchell A. R., Thomson J. V. (1958), Finite difference methods of solution of the Von Mises boundary layer equation with special reference to conditions near a singularity, *Z. Angew. Math. Phys.*, **9**, 26—37.

Mitchell A. R., Wait R. (1977), The finite element method in partial differential equations, John Wiley & Sons, New York.

Mittelmann H. D., Weber H. (1980), Numerical methods for bifurcation problems-A survey and classification, Ergebnisbericht, Nr. 45, Univ. of Dortmund.

Moler C. (1965), Finite difference methods for the eigenvalues of Laplace's operator, Tech. Rep. CS22, Computer science Dept., Stanford University, Stanford.

Mooney J. W., Voss H., Werner B. C. (1979), The dependence of critical parameter

bounds on the monotonicity of a Newton sequence, *Numer. Math.*, **33**, 291—302.

Moore G. (1980), The numerical treatment of non-trival bifurcation points, Technical Report, NA 6, Univ. of Bath.

Moore G., Spence A. (1980a), The calculation of turning points of nonlinear equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 17, 567—576.

Moore G., Spence A. (1980b), The convergence of approximations to nonlinear equations at simple turning points, in «Verzweigungsprobleme une ihre aumerische behandlung», Birkhäuser Verlag, Basel.

Moore G., Spence A. (1981), The convergence of operator approximations at turning points, *IMAJNA*, **1**, 23—38.

Moore R. H. (1966), Differentiability and convergence for compact nonlinear operator, *JMAA*, **16**, 65—72.

Moretti G. (1968), The importance of boundary conditions in the numerical treatment of hyperbolic equations, Polytechnic institute of Brooklyn, PIBAL. Rept., 68—84.

Morrey C. B., Nirenberg, L. (1957), On the analyticity of linear elliptic systems of partial differential equations, *CPAM*, 10, 271—290.

Morton K. W. (1964a), On a matrix theorem due to H. O. Kreiss, *CPAM*, **17**, 375—379.

Morton K. W. (1964b), Finite amplitude compression waves in a collisionfreeplasma, *Physics of fluids*, **7**, 1800—1825.

Morton K. W. (1970), The design of difference schemes for evolutionary problems, in «Numerical solution of field problems in continuum physics, SIAM-AMS proceedings II», ed. by Birkhoff G., Varga R. S., 1—10, SIAM, Providence Rhode Island.

Morton K. W. (1979), Stability of finite diffetence approximations to a diffusion convection equation, Numerical analysis report, 3/79, Univ. of Reading.

Morton K. W., Parrott A. K. (1980), Generalized Galerkin method for first order hyperbolic equations, *J. Comp. Phys.*, **36**, 249—270.

Morton K. W., Schechter S. (1965), On the stability of finite difference matrices, *J. Soc. Indust. Appl. Math., Numer. Anal.*, Ser B **2**, 119—128.

Mosko U., Strang G. (1974), One-sided approximation and variational inequalities, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **80**, 308—312.

Mosco U., Scarpini F. (1975), Complementarity systems and approximations of variational inequalities, Rev. francaise automat. informat. recherche operationelle, Ser rouge, Anal. Numér., R-1, 5—8.

Motz H. (1946), The treatment of singularities of partial relaxation methods, *Quart. Appl. Math.*, **4**, 371—377.

Murayama R. (1981), The Gel'fand-Leviten theory and certain inverse problem for parabolic equation, *J. Faculty of science, Univ. of Tokyo*, IA., **28**, 317—330.

Murat F. (1978), Compacité par compensation, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, **5**, 489—507.

Murat F. (1979), Compacité par compensation II, in «Proc. of the international me-

eting on recent meth in nonlin anal.», ed. by De Giorgi E., Magenes E., Mosco U., 245—256, Bologna.

Murat F. (1981), Compacité par compensation: Condition nécéssaire et suffisante de continuité faible sous une hypothése de rang constant, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, 8, 69—102.

Nadai A. (1931), Plasticity, McGraw-Hill, New York.

Nagumo J., Asimoto S., Yoshizawa S. (1962), An active pulse transmissionline simulating Nerve Axon, *Proc. Inst. Radio Engrs.*, **50**, 2061—2070.

Nečas J. (1967), Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Masson, Paris.

Nedelec J. C. (1977), Approximation des équations intégrales en mécanique et en physique, Centre de mathématiques appliquées-Ecole polytechnique, Rapport interné.

Nedelec J. C. (1982), Integral equations with nonlinear kernels, *Integral equation and operator theory*, **5**, 562—572.

Nedelec J. C., Planchard J. (1973), Une méthode variationelle d'éléments finis pour la résolution numérique d'un problèm extérieur dans R^3, Rev. francaise automat. informt. rechèrche operationonelle, Ser. rouge, Anal. Numér., R-3, 105—120.

Nemat-nasser S. (1972), General variational methods for elastic waves in compositer, *J. Elasticity*, **2**, 73—90.

Nemat-nasser S. (1974), General variational principles in nonlinear and linear elasticity with applications. Mechanics Today, 1, ed. by Nemat-nasser, 214—261, Pergamon Press, New York.

Von Neumann J. (1963), Collected works, 1, 361—379, Oxford.

Von Neumann J., Goldstine H. H. (1947), Numerical inverting of matrices of high order, *Bull Amer. Math. Soc.*, **53**, 1021—1099.

Von Neumann J., Richtmyer R. D. (1950), A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks, *J. Appl. Phys.*, **21**, 232—237.

Newman D. J. (1960), Numerical method for solution of an elliptic Cauchy problem, *J. Math. Physics*, **39**, 72—75.

Nicolaides R. A. (1972), On a class of finite elements generated by Lagrange interpolation, *SIAM J. Numer. Anal.*, 9, 435—445.

Nirenberg L. (1974). Topics in nonlinear functional analysis, Courant institute lecture note, Courant institute of mathematical science.

Nishida T., Smoller J. A. (1973), Solution in the large for some nonlinear hyperbolic conservation laws. *CPAM*, **26**, 183—200.

Nishida T., Smoller J. A. (1977), Mixed problems for nonlinear conservation laws, *J. Differential equation*, **23**, 244—269.

Nishimura T. (1954), A numerical solution of one-dimensional heat conduction problems, termal conductivity being, function of temperature and situation, *Mem. Fac. Engng. Nagoya Univ.*, **6**, 30—33.

Nitsche J. A. (1968), Ein Kriterium für die quasi-optimalitat des Ritzchen Verfarens, *Numer. Math.*, **11**, 346—348.

Nitsche J. A. (1976), Der Einfluss von Randsingularitäten beim Ritzschen Verfahren,

Numer. Math., **5**, 263—278.

Nitsche J. A. (1977), L_∞ convergence of finite element approximations, in 《Mathematical aspects of finite element methods, Lecture notes in mathematics 606》, ed. by Dold A., Eckmann B., 261—274, Springer-Verlag, Berlin.

Nyström E. J. (1930), Über die praktische auflösung von integralgleichungen mit anwendungen auf randwertaufgaben, *Acta Math.*, **54**, 185—204.

O'Brien G., Hyman M., Kaplan S. (1951), A study of the numerical solution of partial differential equations, *J. Math. Phys.*, **29**, 223—251.

Oden J. T., Reddy J. N. (1976), An introduction to the mathematical theory of finite elements, Wiley-interscience, New York.

Oliger J. (1974), Fourth order difference methods for the initial boundary value problem for hyperbolic equations, *Math. Comp.*, **28**, 15—25.

Olver F. W. J. (1974), Asymptotics and special functions, Academic Press, New York.

Olver P. J. (1979), Euler operators and conservation laws of the BBM equation, *Math Proc. Camb. Phil. Sco.*, **85**, 143—160.

O'Riordan E. (1984), Singularly perturbed finite methods, *Numer. Math.*, **44**, 425—434.

Orszag S. A., Irraeli M. (1974), Numerical simulation of viscous incompressible flow, *Annual reulew of fluid mechanics*, **6**, 281—318.

Ortega J. M., Rheinboldt W. C. (1970), Iterative solution of nonlinear equations in several variables, Academic Press, New York.

Osher S. (1969), Stability of differences approximations of dissipative type for mixed initial boundary value problems I, *Math. Comp.*, **23**, 335—350.

Osher S., Solomon F. (1982), Upwind difference schemes for hyperbolic systems of conservation laws, *Math. Comp.*, **38**, 339—374.

Ostrowski A. M. (1937), Über die determinaten mit überwiegender hauptdiagonale, *Comment. Math. Helv.*, **10**, 69—96.

Ostrowski A. M. (1955), Determinaten mit überwiegender Hauptdiagonale und die absolute konvergenz von linearen iterationsprozessen, *Comment. Math. Helv.*, **30**, 175—210.

Ostrowski A. M. (1961), On some metrical properties of operator matrices and matrices partitioned into blocks, *J. Math. Anal. Appl.*, **2**, 161—209.

Otter Jr. H. (1965), Computations for prestressed concrete reactor pressure vessels using dynamics relaxation, *Nuclear structural engineering*, **1**, 61—75.

Parlett B. N. (1966), Accuracy and dissipation in difference schemes, *CPAM*, **19**, 111—123.

Parter S. V. (1965), Mildly nonlinear elliptic partial differential equations and their numerical solution, *J. Numer. Math.*, **7**, 113—128.

Parter S. V. (1966), Maximal solutions of mildly nonlinear elliptic equations, in 《Numerical solution of nonlinear differential equations》, ed. by Greenspan D., 213—238, John Wiley, New York.

Payne L. E. (1975), Improperly posed problems in partial differential equations, Regional conference, Series in Appl. Math., SIAM, Philadelphia, Pennsylvania.

Peaceman D. W., Rachford H. H. (1955), The numerical solution of parabolic and

elliptic differential equations, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 3, 28—41.

Pearson C. E. (1968), On a differential equation of boundary layer type, *J. Math. Phys.*, 47, 134—154.

Peregrine D. H. (1966), Calculations of the development of an undular bore, *J. Fluid. Mech.*, 25, 321—330

Perring J. K., Skyrme T. H. R. (1962), A model unified field equation, *Nucl. Phys.*, 31, 550—555.

Phillips D. L. (1962), A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind, *J. Assoc. Comput. Math.*, 9, 84—97.

Phillips N. A. (1959), An example of nonlinear computational instability, in 《The atmosphere and the sea in motion》, ed. by Bolin B., 501—504. Rockefeller Institute, New York.

Piacsek S. A., Williams G. (1970), Conservation properties of convection difference schemes, *J. Comp. Phys.*, 6, 393—405.

Picard E. (1890), Mémoire sur la théorie des équations aux dérivees partielles et la méthods des approximations successives, *J. Math. Pures et Appl.*, Ser. 4, 6. 145—210.

Pini F. (1974), Approximation by finite element functions using global regularization, Département de mathématique, Ecole Polytechnique Federable de Lausanne.

Poincaré H. (1886), Sur les intégrales des équations linéaires, *Acta Math.*, 8, 295—344.

Poincaré H. (1890), Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique, *Amer. J. Math.*, 12, 211—294.

Pólya G. (1954), Estimates for eigenvalues studies in mathematics and mechanics presented to Richard Von Mises, 200—207, Academic Press, New York.

Pólya G., Szegö G. (1951), Isoperimetric inequalities in mathematical physics, Princeton University Press, Princeton, 279. N. J..

Pontryagin L. S., Boltianskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mischenko E. F. (1962), Mathematical theory of optimal processes, Interscience, New York.

Prandtl L. (1905), Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung, Verh. Int. Math. Kongr, 3'rd., Heidelberg, 1904, S. 484—491, Leipzig: Teubner.

Prandtl L., Buseman A. (1929), Näherungsverfahren zur zeichnerischen Ermittlung von ebenen Strömungen mit Überschallgenschwindigkeit, Festschrift zum 70, Geburtstag von stodola A., 499—509, Zürich. Füßli.

Prenter P. M. (1975), Splines and variational methods, John Wiley, New York.

Protter M. H. (1958), Lower bounds for the first eigenvalue of elliptic equations and related topics, Mimeographed technical report, Dept. of Math., Univ. of California, Berkeley, 25.

Protter M. H. (1959), Vibration of a nonhomogeneous membrane, *Pacific J. Math.*, 1249—1255.

Proudman J. (1925), A theorem in tidal dynamics, *Philo. Mag.*, 49, 570—573.

Pujol A. (1971), Numerical experiments on the stability of poisemille flows of non-Newtonnian fluids, Doctoral thesis, Univ. of Iowa, Iowa City.

Quon D., Dranchuk P. M., Allada S. R., Leung P. K. (1966), Application of the

alternating direction explicit procedure to two-dimensional natural gas reser voirs, *Society of Petroleum Engineers J.*, June, 137—142.

Rabinowitz P. H. (1968), Existence and nonuniqueness of rectangular solutions of the B'enard problem, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **24**, 32—57.

Rabinowitz P. H. (1971), Some global results for nonlinear eigenvalue problems, *J Funct. Anal.*, **7**, 487—513.

Rabinowitz P. H. (1974), Applications of bifurcation theory, Academic Press, New York.

Rabinowitz P. H. (1976), Survey of bifurcation theory, in 《Dynamical systems, An international symposiym, Vol. 1》, ed. by Hale J. K., Lasalle J. P., 83—96. Academic Press, New York.

Radon J. (1917), Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre integralwerte länge gewisser Mannigfaltigkeiten, *Berichte saechsische akademie der wissenschaften*, **69**, 262—277.

Rauch J., Smoller J. (1978), Qualitative theory of the Fitzhugh-Nagumo equation. *Adv. in Math.*, **21**, 12—44.

Raviart P. A. (1985), Particle approximation of first-order system, in 《Proceedings of the 1984 Beijing Symposium on differential geometry and differential equations》, ed. by Feng Kang, 69—77, Science Press, Beijing.

Rayleigh L. (1887), Theory of sound, Dover. Publ., New York.

Redheffer R. M. (1957), On pairs of harmonic functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8**, 450—457.

Rellich F. (1953), Perturbation theory of eigenvalue problems, Mimeographed notes 164, Institute of mathematical science, New York University.

Richards C. G. (1970), A numerical study of the flow in the vortex angular-rate sensor, paper 70-wa/FE-5, American society of mechanical engineers, Winter annual meeting, New York, November 29-December 3.

Richardson R. G. P. (1917), A new method in boundary problems for differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **18**, 498—518.

Richtmyer R. D. (1957), Difference methods for initial value problems, Interscience Publishers Inc., New York.

Richtmyer R. D. (1962), A survey of difference methods for non-steady fluid dynamics, NCAR technical note, 63-2, 16-17. National center for atmospheric research, Boulder, Colorado.

Richtmyer R. D., Morton K. W. (1967), Finite difference methods for initial-value problem, 2'nd edition, Interscience, New York.

Riesz F., Nagy B. Sz. (1955), Functional analysis, 2'nd edition, Transl. by Boron L. F., Ungar, New York.

Rinzel J. (1977), Repetitive nerve impulse propagation, Numerical results and methods, in 《Nonlinear diffusion》, ed. by Fitzgibbon W. E., Walker H. F., Research notes in Mathematics Pitman, London.

Rinzel J. (1978), Repetitive activity and Hopf bifurcation under point stimulation for a simple Fitzhugh-Nagumo nerve conduction model, *J. Math. Biol.*, **5**, 363—382.

Rinzel J., Keller J. B. (1973), Travelling wave solutions of a nerve conduction equation, *Biophys. J.*, **13**, 1313—1337.

Roache P. J. (1972), Computational fluid dynamics, Hermosa Publishers, Albuquerque.

Roache P. J. (1976), Computational fluid dynamics, 2'nd edition, Hermosa Publishers, Albuquerque.

Roberts K. V., Potter D. E. (1970), Magnetohydrodynamic calculations, in ≪Method in computational physics≫, ed. by Alder B., Fernbach S., Rotenberg M., 9, 339—421. Academic Press, New York.

Roe P. L. (1980), The use of the Riemann problem in finite difference schemes, in ≪Proc. of 6'th international conference on numerical methods in fluid dynamics, Lecture note in physics, 145≫, ed. by Reynolds W. L., Maccormack R. W., 354—359, Springer-Verlag, Berlin.

Rose M. (1956), On the integration of nonlinear parabolic equations by implicit difference methods, *Quart. Appl. Math.*, 14, 237—248.

Rosen J. B. (1970), Approximate solution and error bounds for quasilinear elliptic boundary value problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, **7**, 80—103.

Rosenhead L. (1931), The formation of vortices from a surface of discontinuity, *Proc. Roy. Soc. London*, A **134**, 170—192.

Rosinger E. E. (1980a), Stability and convergence for nonlinear difference scheme are equivalent, *J. Inst. Maths. Applics*, **26**, 143—149.

Rosinger E. E. (1980b), Stability characterization for the convergence of general nonlinear difference schemes, NRIMS, Technical Report, TWISK 179.

Rubin E. L., Khosla P. K. (1970), A time-dependent method for the solution of one-dimensional radiating flow., *Z. Angew. Math. Phys.*, **21**, 962—977.

Rubin S. G., Khosla P. K. (1977), Polynomial interpolation methods for viscous flow calculation, *J. Comp. Phys.*, **124**, 217—244.

Rubinstein L. (1971), The Stefan problem, AMS, 27.

Rusanov V. V. (1969), Difference schemes of third order accuracy for across-computation of discontinuous solutions, *Fluid Dyn. Trans.*, 4, 285, Warsow.

Rusanov V. V. (1970), On difference schemes of third order accuracy for nonlinear hyperbolic system, *J. Comp. Phys.*, 5, 507—516.

Russell J. S. (1844), Report on waves, in ≪14'th meeting of the British Assoc. for the advancement of science≫, 311—390, John Murray, London.

Saltzer C. (1958), Discrete potential theory for two-dimensional Laplace and Poisson difference equation, NACA Tech. Note, 4086, 60.

Sander G. (1964), Bornes supérieures et inférieures dans l'analyse matricielle des plaques en flexion torsion, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liege*, **33**, 456—494.

Sanz-Serna J. M. (1982), An explicit finite-difference scheme with exact conservation properties, *J. Comp. Phys.*, **47**, 199—210.

Sattinger D. H. (1973), Topics in stability and bifurcation theory, Lecture notes in math., 309, Springer-Verlag, Berlin.

Sauer R. (1952), Anfang swertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen, Springer-Verlag, Berlin.

Saulev V. K. (1958), On the solution of the problem of eigenvalues by the method

of finite differences, *Amer. Math. Soc. Transl* (2), **8**, 257—287.

Scala S. M., Gordon P. (1966), Reflection of a shock wave at a surface, *The physics of fluids*, **9**, 1158—1166.

Schatz A. H., Wahlbin L. B. (1977), Interior maximum norm estimates for finite element methods, *Math. Comp.*, **31**, 414—442.

Schlichting H. (1968), Boundary Layer theory, 6'th edition, McGrawHill Book Co. Inc., New York.

Schultz M. H. (1969), Multivariate spline functions and elliptic problems, *SIAM Numer. Anal.*, **6**, 523—538.

Schultz M. H. (1973), Spline analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J..

Schwarz H. A. (1890), Über einen Grenzübergang durch alternirendes verfahren ges, *Math. Abhandlungen*, **1**, 133—143.

Schwartz J. T. (1969), Nonlinear functional analysis, Gordon and Breach Science Publishers Inc., New York.

Scott A. C., Chu F. Y. F., Mclaughlin D. W. (1973), The soliton, A new concept in applied science, *Proc. I. E. E. E.*, **61**, 1443—1483.

Scott R. (1973), Finite element techniques for curved boundaries, Ph. D. dissertation, M. I. T..

Seeger R. J. (1948), On computational techniques for certain problems in fluid dynamics, in ≪Proceeding of a symposium on large scale digital computing Machinery≫, 157—168, Harvard University.

Seydel R. (1979), Numerical computation of branch points in nonlinear equations, *Numer. Math.*, **33**, 339—352.

Shaw R. P., Friedman M. B. (1962), Diffraction of a plane shock wave by a free cylindrical obstacle at a free surface in ≪Proc. of 46'th U. S. Nat. Cong. of Appl. Mech.≫, ed. by Rosenberg R. M., 371—379, Pergamon, Oxford.

Sheldon J. W. (1962), Iterative methods for the solution of elliptic partial differential equations, in ≪Mathematical methods for digital computers≫, ed. by Ralston A., Wilf H. S., 144—156, John Wiley and Sons, New York.

Shortley G. H., Weller, R. (1938), The numerical solution of Laplace's equation, *J. Appl. Phys.*, 9, 334—348.

Shuman F. G. (1962), Numerical experiments with the primitive equations, in ≪Proc. Intern. Symp. Numerical weather prediction≫, Meteorological society of Japan, **85—107**, Tokyo.

Simpson R. B. (1971), Finite difference methods for mildly nonlinear eigenvalue problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 8, 190—211.

Simpson R. B. (1972), Existence and error estimates for solutions of discrete analog of nonlinear eigenvalue problems, *Math. Comp.*, **26**, 359—375.

Simpson R. B. (1975), A method for the numerical determination of bifurcation states of nonlinear systems of equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **12**, 439—451.

Simpson R. B., Cohen P. S. (1970), Positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems, *J. Math. Mech.*, 19, 895—910.

Smith D. R. (1965), Estimates at infinity for stationary solutions of the N-S equations in two-dimensions, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **20**, 341—372.

Southwell R. V. (1946), Relaxation methods in theoretical physics, Oxford University Press, New York.

Spanier J. (1968), Alternating direction methods applied to heat conduction problems, in «Mathematical methods for digital computers, II», ed. by Ralston A., Wilf H., 215—246, John Wiley, New York.

Spence A., Moore G. (1980), A convergence analysis for turning points of nonlinear compact operator equations, in «Numerische Behandlung von integralgleichungen», ed. by Collatz L., Albrecht J., Birkhäuser Verlag, Basel.

Sprekels J. (1980), Exact bounds for the solution branches of nonlinear eigenvalue problems, *Numer. Math.*, **34**, 29—40.

Stakgold I. (1971), Branching of solutions of nonlinear equations, *SIAM Review*, **13**, 289—332.

Steger J. L., Warming R. F. (1981), Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite difference methods, *J. Comp. Phys.*, **40**, 263—293.

Stetter H. J. (1965), Asymptotic expansions for the order of discretization algorithms for nonlinear functional equation, *Numer. Math.*, **7**, 18—31.

Stetter H. J. (1966), Stability of nonlinear discretization algorithms, in «Numerical solutions of partial differential equations», ed. by Bramble J., 111—123, Academic Press, New York.

Stetter H. J. (1968), Instability and non-monotonicity phenomena in discretizations to boundary-value problems, *Numer. Math.*, **12**, 139—145.

Stetter H. J. (1973), Analysis of discretization method for ordinary differential equations, Springer-Verlag, Berlin.

Stetter H. J. (1978), The defect correction principle and discretization method, *Numer. Math.*, **29**, 435—443.

Steutemyer D. R. (1973), Numerical implementation of the Schwatz iterating procedure for elliptic partial differential equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **10**, 308—326.

Strang G. (1960), Difference methods for mixed boundary-value problems, *Duke Math. J.*, **27**, 221—230.

Strang G. (1963), Accurate partial difference methods I, Linear Cauchy problems, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **12**, 392—402.

Strang G. (1964a), Accurate partial difference methods II, Non-linear problems, *Numer. Math.*, **6**, 37—46.

Strang G. (1964b), Wiener-Hopf difference equations, *J. Math. Mech.*, **13**, 85—96.

Strang G. (1965), Necessary and insufficient conditions for well-posed Cauchy problems, *J. of differential equations*, **2**, 107—114.

Strang G. (1966), Implicit difference methods for initial-boundary value problems, *J. Math. Anal. Appl.*, **16**, 188—198.

Strang G. (1971), The finite element method and approximation theory, in «Numerical solution of partial differential equations II», ed. by Hubbard B, 547—584, Academic Press, New York.

Strang G. (1972a), Approximation in the finite element method, *Numer. Math.*, **19**,

81—96.

Strang G. (1972b), Variational crimes in the finite element method, in ≪The mathematical foundations of the finite element method with application to partial differential equations≫, ed. by Aziz A. K., 689—710, Academic Press, New York.

Strang G. Fix G. J. (1973), An analysis of the finite element, Englewood, Cliffs, N. J.

Strauss W., Vazquez L. (1978), Numerical solution of a nonlinear Klein-Gordon equation, *J. Comp. Phys.*, **28**, 271—278.

Stüben K., Trottenberg U. (1982), Multigrid methods: Fundamental algorithms, Model problem analysis and application, in ≪Multigrid methods≫, ed. by Hackbusch W., Trottenberg U., 1—176, Springer-Verlag, Berlin.

Stummel F. (1967), Elliptische Differenzenoperatoren under Dirichletrandbedingungen, *Math. Z.*, **97**, 169—211.

Surmont J., Chen Y. M. (1973), Numerical solutions of a nonlinear radiation transfer equation with inadequate data, *J. Comp. Phys.*, **13**, 288—302.

Suzaku T., Murayama R. (1980), A uniqueness theorem in identification problems for coefficient of parabolic equations, *Proc. Japan Acad.*, Ser. A, **56**, 259—263.

Swartz B., Wendroff B. (1969), Generalized finite-difference schemes, *Math. Comp.*, **23**, 37—50.

Symm G. T. (1963), Integral equation method in potential theory II, *Proc. Roy. Soc.*, A, **275**, 33—46.

Synge J. L. (1951), Approximations in boundary value problems by the method of the hypercircle in function space, *Rend Cirs. Mat. Palermo* (5), **10**, 24—47.

Synge J. L. (1957), The hypercircle in mathematical physics, Cambridge Univ. Press.

Tai- Ping Liu (1975), The Riemann problem for general systems of conservation laws. *J. of differential equations* 18, 218—234.

Tai-Ping Liu (1977), Solution in the large for the equations of nonisentropic gas dynamics, *Indians university mathematics journal*, **26**, 147—177.

Tamarkin J. D., Feller W. (1941), Partial differential equations, Mimeographed, Brown University, Providence, 268.

Tani Atusi (1976), The existence and uniqueness of the solution of equations describing compressible viscous fluid flow in a domain, *Japan Acad.*, **52**, 334—337.

Tartar L. (1977), Une nouvelle méthode de résolution déquations aux dérivées partielles nonlinéarires, in ≪Journées d'analyse nonlinéaire, Lecture notes in Math., 665≫, ed. by Bénilan P., Robert J., 228—241. Springer-Verlag, Berlin.

Tartar L. (1978), Compensated compactness, Heriot-Watt symposium, 4, Pitman, London.

Taylor A. E. (1958), Introduction to functional analysis, John Wiley, New York.

Taylor T. D., Ndefo, E., Masson B. S. (1972), A study of numerical methods for solving viscous and inviscid flow problems, *J. Comp. Phys.*, **9**, 99—119.

Téman R. (1968), Une méthode d'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes, *Bull. Soc. Math. France*, **96**, 115—159.

Téman R. (1970), Analyse numérique, Presses universitaires de France, Paris.

Téman R. (1977), Navier-Stokes equations, North-Holland, Amsterdam.

Thom A., Apelt C. J. (1961), Field computations in engineering and physics, Van. Nostrand Company, Princeton.

Thomée V. (1961), Difference methods for two-dimensional mixed problems for hyperbolic first order systems, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 8, 68—88.

Thomée V. (1962), A stable difference scheme for the mixed boundary problem for a hyperbolic first order system in two dimensions, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, **10**, 229—245.

Thomée V. (1964), Elliptic difference operators and Dirichlet's problem, in ≪Contributions to differential equations 3≫, ed. by Lasalle J. P., Diaz J. B., 301—324, Interscience, New York.

Thomée V. (1968), Discrete interior Schauder estimates for elliptic difference operators, *SIAM J. Numer. Anal.*, **5**, 626—645.

Thomée V. (1970), On the convergence of difference quotients in elliptic problems, in ≪Numerical solution of field problems in continuum physics, SIAM-AMS Proceedings II≫, ed. by Birkhoff G., Varga R., 186--200, AMS Providence, Rhode Island.

Thomée V. (1971), Some convergence results in elliptic difference equations, *Proc. Roy. Soc.*, A **323**, 191—199.

Thomée V., Westergren B. (1968), Elliptic difference equations and interior regularity, *Numer. Math.*, 11, 196--210.

Tompkins C. B. (1956), Methods of steep descent, 446—479, Beckenbach.

Treves F. (1975), Basic linear partial differential equations, Academic Press, New York.

Tsien D. S., Chen Y. M. (1974), A numerical method for nonlinear inverse problems in fluid dynamics, in ≪Computational methods in nonlinear mechanics≫, 935—943.

Tsien D. S., Chen Y. M. (1978), A pulse spectrum technique for remote sensing of strafied media, *Radio science*, **13**, 775—783.

Tsimis E. (1977), On the inverse problem by means of the integral equation of the first kind, Ph. D. thesis, Dept. Appl. Math. Stat., State Univ. of New York at Stong Brook.

Turner M. J., Clough R. W., Martin H. C., Topp L. J. (1965), Stiffness and deflection analysis of complex structures, *J. Aero. Sci.*, **23**, 805—823.

Turner R. E. (1966), Eigenfunction expansions in Banach space, U. S. Army. Math. Research Center, Tech. Report 600, Madison, Wisconsin.

Uhlmann N. (1958), Differenzenverfanren für die 1, Randwertaufgabe mit krummflächigen Rädern nei $\Delta u(x, y, z)=\gamma(x, y, z, u)$, *Z. Angew. Math. Mech.*, **38**, 130—139.

Van leer Bram (1982), Flux-vector splitting for the Euler equations, in ≪Lecture notes in physics, 170≫, ed. by Krause E., 507--512. Springer-Verlag, Berlin.

Varga R. S. (1962), Matrix iterative analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffis, N. J.,

Varga R. S. (1966), Hermite interpolation-type Ritz methods for twopoint boundary value problems, in ≪Numerical solution of partial differential equations≫, ed. by Bramble J. H., 365—373, Academic Press, New York.

Vliegenthart A. C. (1971), On finite difference methods for the Kortewegde Vries equation, *Journal of Engineering Mathematics*, **5**, 137—155.

Warming R. F., Beam R. M. (1976), Upwind second-order difference schemes and applications in aerodynamic flow, *AIAA*, **14**, 1241—1249.

Wasow W. R. (1957), The accuracy of difference approximations to plane Dirichlet problems with piecewise analytic boundary values, *Quart. Appl. Math.*, **15**, 53—63.

Weinberger H. F. (1956), Upper and lower bounds for eigenvalues by finite difference methods, *CPAM*, **9**, 613—623.

Weinberger H. F. (1958), Lower bounds for higher eigenvalues by finite difference methods, *Pacific J.Math.*, **8**, 339—368.

Weinberger H. F. (1978), Asymptotic behavior of a model in population genetics, in ≪Nonlinear differential equation and application, Lecture note in Math 648≫, ed. by Chadam J., 47—98. Springer-Verlag, New York.

Weinberger H. F. (1982), Long time behaviour of a class of biological models, *SIAM Math. Anal.*, **13**, 353—396.

Weinberger H. F. (1972), On optimal numerical solution of partial differential equation, *SIAM J. Numer. Anal.*, **9**, 182—198

Weiss R. (1974), On the approximation of fixed points of nonlinear compact operators, *SIAM Numer. Anal.*, **11**, 550—553.

Weiss R. (1975), Bifurcation in difference approximations to twopoint boundary value problems, *Math. Comp.*, **29**, 746—760.

Welch J. E., Harlow F. H., Shannon J. P., Daly B. J. (1966), The MAC method, Los Alamos, Report 3425.

Wendland W. L. (1981), Asymptotic accuracy and convergence, in ≪Progress in boundary element methods I≫, ed. by Brebbia C. A., 289—313. Pentech Press, London.

Wendroff B. (1960), On centered difference equations for hyperbolic systems, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, **8**, 549—555.

Wendroff B. (1965), Bounds for eigenvalues by the Rayleigh-Ritz method, *Math. Comp.*, **19**, 218—224.

Wendroff B. (1973), The Riemann problem for materials with nonconvex equations of state, Part II, General flow, *J. of Math. Analysis and Applic.*, **38**, 640—658.

White J. W. (1973), A new form of artificial viscosity, *J. Comp. Phys.*, **11**, 573—590.

Widlund O. B. (1965), On the stability of parabolic difference scheme, *Math. Comp.*, **19**, 1—13.

Widlund O. B. (1966), Stability of parabolic difference scheme in the maximum norm, *Numer. Math.*, **8**, 186—202.

Widlund O. B. (1967), On difference methods for parabolic equation and alternating direction implicit method for elliptic equation, *IBM J.*, March, 239—243.

Widlund O. B. (1970), On the rate of convergence for parabolic difference schemes I, in ≪Numerical solution of field problems in continuum physics. SIAM

AMS Proceedings II≫, ed. by Birkhoff, G., Varga. R. S., 66—73, AMS, Providence, Rhode Island.

Wilkes J. O. (1963), The finite difference computation of natural convection in an enclosed rectangular cavity, Doctoral thesis, Univ. of Michigan, Ann Arbor.

Wilks S. S. (1943), Mathematical statistics, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J..

Williams G. P. (1969), Numerical integration of the three-dimension Navier-Stokes equations for incompressible flow, *J. Fluid Mech.*, **37**, Part 44, 727—750.

Wilson E. L., Taylor R. L. (1971), Incompatible displacement models, Symposium on numerical and computer methods in structural engineering, O. N. R., Univ. of Illinois, September.

Wolf F. (1926), Über die angenäherte numerische Berechnung harmonischer und biharmonischer funktionen, *Z. Angew. Math. Mech.*, **6**, 118—150.

Woods L. C. (1953), The relaxation treatment of singular points in Poisson's equation, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **6**, 163—185.

Yee H. C., Warming R. F., Harten A. C. (1982), A high resolution numerical techuique for imiscid gasdynamic problem with weak solutions, in ≪Proc. of 8'th international conference on numerical methods in fluid dynamics, Lecture notes in Physics, 170,≫, ed. by Krause E., 546—552, Springer-Verlag, Berlin.

Ying Long-an (1978), The infinite similar element method for calculating stress intensity factors, *Scientia Sinica*, **21**, 19—43.

Ying Long-an (1983), The in finite similar element, in ≪Proc. of China-France symposium on finite element methods≫, ed. by Feng Kang, Lions J. L., 487—565, Science Press, Beijing.

Young D. M. (1973), A survey of modern numerical analysis, *SIAM Review*, **15**, 503—523.

Yu De-hao (1982), Canonical integral equations of biharmonic elliptic boundary value problems, *Math. Numer. Sinica*, **4**, 330—336.

Yu De-hao (1983), Numerical solutions of harmonic and biharmonic canonical integral equations in interior or exterior unit circlar domains, *JCM*, **1**, 52—62.

Yu De-hao (1985), Error estimations for the canonical boundary element method, in ≪Proc. of 1984 Beijing symposium on differential geometry and differential equations≫, ed. by Feng Kang, 343—348, Science Press, Beijing.

Yu S. P., Kooyers G. P. (1965), Time-dependent computer analysis of electron-wave interaction in crossed fields, *J. Appl. Phys.*, **136**, 2550—2559.

Yuen H. C., Ferguson W. E. Jr. (1978), Relationship between Benjamin-Feir instability and recurrence in the nonlinear Schrödinger equation, *Phys. Fluids*, **21**, 1275—1278.

Yuen H. C., Lake B. M. (1975), Nonlinear deep water waves, Theory and experiment, *Phys. Fluids*, **18**, 956—960.

Yuen H. C., Lake B. M. (1980), Instabilites of waves on deep water, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **12**, 303—334.

Zabusky N. J., Kruskal M. D. (1965), Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Phys. Rev. Lett.*, **15**, 240—243.

Zhong Ci Shi (1984a), An explicit analysis of stummel's patch test examples, *Inter. J.*

Numer. Methods in Eng., **20**, 1233—1246.

Zhong Ci Shi (1984b), A convergence condition for the quadrilateral Wilson element, *Numer. Math.*, **44**, 349—361.

Zhu You-lan, Chen Bing-mu (1980), A numerical method with high accuracy for calculating the interactions between discontinuties in three independent variables, *Scientia Sinica*, **23**, 1491—1501.

Zhu You-lan (1982), Stability and convergence of difference schemes for linear initial boundary value problems, *Mathematica Numerica Sinica*, **4**, 98—108.

Zhu You-lan (1983), Implicite difference scheme for the generalized non-linear Schrödinger system, *JCM*, **1**, 116—129.

Zienkiewicz O. L. (1971), The finite element method in engineering science, McGraw-Hill, New York.

Zienkiewicz O. L., Kelly R. W., Bettess P. (1977), The coupling of the finite element method and boundary solution procedures, *Inter. J. Numer. Methods Engng.*, **11**, 355—375.

Zlámal M. (1968), On the finite element method, *Numer. Math.*, **12**, 394—409.

Zwas G., Abarbanel S. (1971), Third and fourth order accurate schemes for hyperbolic equations of conservation law form, *Math. Comp.*, **25**, 229—236.

俄 文 文 献

Абрамов А.А. (1950), Об одном способе ускорения итерационных процессов, *ДАН СССР*, **74**, 1051—1052.

Абрамов А. А. (1953), О влиянии ошибок округления при решении уравнения Лапласа, *Вычисл. матем. и вычисл. техн.*, Вып. 1,37—40.

Андреев В. Б. (1965), Итерационные схемы переменных направлений для численного решения третьей краевой задачи в Р-мерном параллелепипеде, *ЖВМ и МФ*, **5**, 626—637.

Андреев В.Б. (1966), О равномерной сходимости некоторых разностных схем,*ЖВМ и МФ*, **6**, 238—250.

Андреев В. Б. (1967a), Об одном методе численного решения третьей краевой задачи для уравнения параболического типа в Р-мерном параллелепипеде, сб. «Вычисл. методы и программирование», изд-во МГУ, Вып. 6, 64—75.

Андреев В. Б. (1967b), О разностных схемах с расщепляющимся оператором для общих Р-мерных параболических уравнений второго порядка со смешанными производными, *ЖВМ и МФ*, **7**, 312—321.

Андреев В. Б. (1968), О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений, *ЖВМ и МФ*, **8**, 1218—1231.

Андреев В. Б. (1969a), О сходимости разностных схем с расщепляющимся оператором, аппроксимирующих третью краевую задачу для параболического уравнения, *ЖВМ и МФ*, **9**, 337—349.

Андреев В. Б. (1969b), О равномерной сходимости разностных схем для

задачи Неймана, *ЖВМ и МФ*, **9**, 1285—1298.

Бабенко К. И., Воскресенский Г. П., Любимов А. Н., Русанов В. В. (1964), Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом. М., Наука, Москва.

Багриновский К. А., Годунов С. К. (1957), Разностные схемы для многомерных задач, *ДАН СССР*, **115**, 431—433.

Байокки К., Мадженес Э. (1974), О задачах со свободной границей, связанных с течением жидкости через пористые материалы, *УМН*, **29**, 50—69.

Белан Н.В., Мантылев Н. А., Шушлянин Л. В. (1974), Полностью консервативные разностные схемы для двумерных уравнений магнитной гидродинамики. *ЖВМ и МФ*, **14**, 792—797.

Белоцерковский О. М., Гущин В. А., Щенников В. В. (1975), Метод расщепления в применений к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости, *ЖВМ и МФ*, **15**, 197—207.

Белухина И. Г. (1968), Разностные схемы для решения некоторых статистических задач теории упругости, *ЖВМ и МФ*, **8**, 808—823.

Белухина И. Г. (1969), Разностные схемы для решения плоской динамической задачи теории упругости со смешанными краевыми условиями, *ЖВМ и МФ*, **9**, 362—372.

Березин И.С., Жидков Н. П. (1959), Методы вычислений, ФИЗМАТГИЗ, Москва.

Бояринцев Ю. Е. (1966), О сходимости разностных схем для уравнений с переменными коэффициентами, *ТР. МИАН СССР*, **74**, 16—37.

Вайникко Г. М. (1964), Асимптотические оценки погрешности проекционных методов в проблеме собственных значений, *ЖВМ и МФ*, **4**, 405—425.

Вайникко Г. М. (1967), О быстроте сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений, *ЖВМ и МФ*, **7**. 977—987.

Введенская Н. Д. (1961), Пример неединственности обобщённого решения квазилинейной системы уравнений, *ДАН СССР*, **136**, 532—533.

Вишик М.И., Люстерник Л. А. (1957), Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, *УМН*, **12**, Вып. 5, 3—122.

Волков Е. А. (1962), О решении краевых задач для уравнения пуассона, *ДАН СССР*, **147**, 13—16.

Гельфанд И. М. (1959), Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений, *УМН*, **14**, 87—158.

Гельфанд И. М., Левитан Б. М. (1951), Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции, *ДАН СССР*, **77**, 557—560.

Годунов С.К. (1959), О Разностный метод расчета разрывных решений уравнений гидродинамики, *Мат. сборн.*, **47**, 271—306.

Годунов С. К. (1960), О понятии обобщённого решения, *ДАН СССР*, **134**, 1279—1282.

Годунов С. К. (1979), Уравнения математической физики. Наука, Москва.

Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Д., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. (1976), Численное решение много мерных задач газовой динамики, Наука, Москва.

Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П. (1961), Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной, *ЖВМ и МФ*, **1**, 1020—1050.

Годунов С. К., Рябенький, В. С. (1962), Введение в теорию разностных схем, ФИЗМАТГИЗ, Москва.

Годунов С. К., Рябенький В. С. (1963a), Канонические виды систем линейных обыкновенных разностных уравнений с постоянными коэффициентами, *ЖВМ и МФ*, **3**, 211—222.

Годунов С. К., Рябенький В. С. (1963b), Спектральные признаки устойчивости краевых задач для несамосопряженных разностных уравнений, *УМН*, **18**, Вып.3, 3—14.

Дьяконов Е. Г. (1962a), О некоторых разностных схемах для решения краевых задач, *ЖВМ и МФ*, **2**, 57—79.

Дьяконов Е. Г. (1962b), Разностные схемы с расщепляющимся оператором для многомерных нестационарных задач, *ЖВМ и МФ*, **2**, 549—568.

Дьяконов Е. Г. (1964), Разностные схемы второго порядка точности с расщепляющимся оператором для параболических уравнений без смешанных производных, *ЖВМ и МФ*, **4**, 935—941.

Дьяконов Е. Г. (1965), Разностные схемы второго порядка точности с расщепляющимся оператором для многомерных параболических уравнений с переменными коэффициентами, Сб. «Вычисл. методы и программирование», Изд-во МГУ. Вып.3, 163 - 190.

Дьяконов Е. Г. (1967), Экономичные разностные методы, основанные на расщеплении разностного оператора, для некоторых систем уравнений в частных производных, Сб. «Вычисл. методы и программирование», Изд-во МГУ, Вып. 6, 76—120.

Дьяконов Е. Г. (1971—1972), Разностные методы решения краевых задач, Изд-во МГУ, Вып. 1, 2.

Дьяченко В. ф. (1961), О задачи Коши для квазилинейных систем, *ДАН СССР*, **136**. 16—17.

Емельянов К. В. (1978), О разностной схеме для обыкновенного дифференциального уравнения с малым параметром, *ЖВМ и МФ*, **18**, 1146—1153.

Ефименко В. А. (1938), О приближенном вычислении собственных значений и собственных функций краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных, *Известия АН СССР, Серия Математическая*, 613—623.

Жуков А. И. (1960), Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики, Издательство Академии Наук СССР, Москва.

Захаров В. Е. (1968), Устойчивость периодических волн конечной

амплитуды на поверхность глубокой жидкости, *ПМТФ*, **2**, 86—94.

Иванов В. К. (1963), О некорректно поставленных задачах, Матем. сборник, 61, 211—223.

Иванов М. Я., Крайко, А. Н. (1972), Метод сквозного счета для двумерных и пространственных сверхзвуковым течений 2, *ЖВМ и МФ*, **12**, 805—813.

Иванов М.Я., Крайко А. Н., Михайлов Н. В. (1972), Метод сквозного счета для двумерных и пространственных сверхзвуковым течений 1, *ЖВМ и МФ*, **12**, 441—463.

Ильин А. М.(1969), Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной, Матем. заметки, Т. 6, Вып. 2, 237—248.

Ильин А. М., Калащников А. С., Олейник О. А. (1962), Линейные уравнения второго порядка параболического типа, *УМН*, **17**, Вып. 3, 3—146.

Кадомцев Б. Б. (1957), О функции влияния в теории пучистой энергии, *ДНА СССР*, **113**, 541—543.

Каменомостская С. Л. (1961), О задаче стефана, математический сборник, 53, 489—514.

Канторович Л. В. (1934), Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных, *ДАН СССР*, **2**, 532—536.

Канторович Л. В. (1948), функциональный анализ и прикладная математика, *УМН*, **3**, 89—185.

Канторович Л. В., Крылов В. И. (1962), Приближенные методы высшего анализа, Изд. 5—ое, Гостехиздат, Москва.

Карпиловская Э. Б. (1963), О сходимости метод коллокации для некоторых граничных задач математической физики, *Сибирский математический журнал*, **4**, 632—640.

Карпиловская Э. Б. (1970), О методе коллокации для интегродифференциальных уравнений с бигармонической главной частью, *ЖВМ и МФ*, **10**, 1537—1541.

Кживидкий А., Ладыженская О. А. (1966), Метод сеток для нестакионарних уравнений навье-стокса краевые задачи, *Математической Физики*, **4**, 93—99.

Кибель И. А. (1957), Введение в гидродинамические методы краткосрочного протноза погоды, ГИТТЛ, Москва.

Коновалов А. Н. (1964), Применение метод расщепления к численномуих решению динамических задач теории упругости, *ЖВМ и МФ*, **4**, 760—764.

Коновалов А. Н. (1968), Численное решение задач теории упругости, Изд-во НГУ.

Коновалов А. Н. (1969);О численном решении сме...ной задачи теории упругости, *ЖВМ и МФ*, **9**,469—474.

Копачек И. (1964), Явная разностная схема для решения смешанной задачи для общего. Гиперболического уравнения второго порядка, *ЖВМ и МФ*, **4**, 826—834.

Коновальцев И. В. (1965), Пример разностной схемы, неустойчивой в классе непрерывных коэффициентов, *ЖВМ и МФ*, **5**, 132—135.

Коновальцев И. В. (1968), Устойчивость В. С. И в л, двухслойных разностных схем для параболических уравнений с переменными коэффициентами, *ЖВМ и МФ*, **8**, 894—899.

Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Ругицкий Я. Б., Стеценко В. Я. (1969), Приближенное решение операторных уравнений. Наука, Москва.

Крейн С. Г. (1957), О классах корректности для некоторых граничных задачи, *ДАН СССР*, **114**, 1162—1165.

Крейн С. Г., Прозоровская О. И. (1960), Аналитические полугруппы и некорректные задачи для эволюционных уравнений, *ДАН СССР*, **133** 277—280.

Кузьмин А. В., Макаров В. Л., Меладзе Г. В. (1980), Об одной, полностью консервативной разностной схеме для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера, *ЖВМ и МФ*, **20**, 171—181.

Купрадзе В. Д., Алекотидзе М. А. (1964), Метод функциональных уравнений для приближенного решения некоторых граничных задач, *ЖВМ и МФ*, **4**, 683—715.

Лаврентьев М. М. (1956), О задаче Коши для уравнения Лапласа, *Известия АН СССР, Серия Математическая*, **20**, 819—842.

Лаврентьев М. М. (1962), О некоторых некорректных задачах математической физики, Изд. сибир. АН СССР, Новосибирск.

Лаврентьев М. М., Васильев В. Г. (1966), О постановке некоторых некорректных задач математической физики, *Сибирский Математический Журнал*, **7**, 559—576.

Лаврентьев М. М., Васильев В. Г., Романов В. Г. (1969), Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений, Изд. Наука, Сибирское Новосибирск.

Ладыженская О. А. (1953), Смешанная задача для гиперболического уравнения, Гостехиздат, Москва.

Ладыженская О. А. (1961), Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, физматгиз, Москва.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. (1954), Механика сплошных сред, Гостехиздат, Москва,

Ландау Л., Лифшиц Е. М. (1965), Теория упругости, Наука, Москва.

Лаптив Г. И. (1975), Условия равномерной корректности задачи Коши для систем уравнений, *ДАН СССР, Серия Математика Физика*, **220**, 281—284.

Люстерник Л. А. (1941), Проблема дирихле, *УМН*, **8**, 115—124.

Люстерник Л. А. (1954), О разностных аппроксимациях опелатора Лапласа,

УМН, **9**, 3—58.

Маркушевич А. Н. (1957), Краткий курс теории аналитических функций, Гостехиздат, Москва.

Марчук Г. И. (1973), Методы вычислительной математики, Наука, Москва.

Марчук Г. И. (1974), Численное решение задач динамики атмосферы и океана, Гидрометеоиздат.

Марчук Г. И., Орлов В. В. (1961), К теории сопряженных функций, в «Нейтронная физика», под редакцией, 30—45, Крупчидкого госатомиздат, Москва.

Марчук Г. И., Шайдуров В. В. (1979), Повышение точности решений разностных схем, Наука, Москва.

Микеладзе Ш. Е. (1953), Численные методы математического анализа, ГИТТЛ, Москва.

Михлин С. Г. (1950), Прямые методы в математической физике, Гостехиздат, Москва.

Михлин С. Г. (1951), Об алгоритме шварца, *ДАН СССР*, **77**, 569—571.

Михлин С. Г. (1952), Проблема минимума квадратичного функционала, ГИТТЛ, Москва.

Михлин С. Г. (1957), Вариационные методы в математической физике, Гостехиздат, Москва.

Михлин С. Г. (1966), Численная реализация вариационных методов, Наука, Москва.

Олейник О. А. (1957), Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений, *УМН*, **12**, 3—73.

Олейник О. А. (1959а), О построении обобщённого решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка путем введения "исчезающей вязкости", *УМН*, **14**, 159—164.

Олейник О. А. (1959b), Об единственности и устойчивости обобщённого решения задачи Коше для квазилинейного уравнения, *УМН*, **14**, 165—170.

Петровский И. Г. (1941), Новое доказательство существования решения задачи Дирихле методом конечных разностей, *УМН*, **8**, 161—170.

Петровский И. Г. (1953), Лекции об уравнениях с частными производными, ГИТТЛ, Москва.

Попов Ю. П., Самарский А. А. (1969), Полностью консервативные разностные схемы, *ЖВМ и МФ*, **9**, 953—958.

Попов Ю. П., Самарский А. А. (1970), Полностью консервативные разностные схемы для уравнений магнитной гидродинамики, *ЖВМ и МФ*, **10**, 990—998.

Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. (1968), Системы квазилинейных уравнений, Наука, Москва.

Русанов В. В. (1961), Расчет взаймодействия нестадионарых ударных волн с препятствиями, *ЖВМ и МФ*, **1**, 267—279.

Русанов В. В. (1963), Характеристики общих уравнений газовой динамики,

ЖВМ и МФ, **3**, 508—527.

Рябенький В. С. (1952), О применении метода конечных разностей решению задачи Коши, *ДАН СССР*, **86**, 1071—1074.

Рябенький В. С. (1964), Необходимые и достаточные условия хорошей обусловленности краевых задач, *ЖВМ и МФ*, **4**, 242—255.

Рябенький В. С. (1969), О ядрах спектров семейств операторов, *ДАН СССР*, **185**, 275—277.

Рябенький В. С. (1971), Метод внутренних граничных условий в теории разностных краевых задач, УМН. **26**, Вып. 3, 105—160.

Рябенький В. С., Филиппов А. Ф. (1956), Об устойчивости разностных уравнений, ГИТТЛ, Москва.

Самарский А. А. (1961a), Априорные оценки для решения разностного аналога дифференциального уравнения параболического типа, *ЖВМ и МФ*, **1**, 441—460.

Самарский А. А. (1961b) Априорные оценки для разностных уравнений, *ЖВМ и МФ*, **1**, 972—1000.

Самарский А. А. (1962a), Однородные разностные схемы для нелинейных уравнений параболического типа, *ЖВМ и МФ*, **2**, 25—56.

Самарский А. А. (1962b), Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области, *ЖВМ и МФ*, **2**, 787—812.

Самарский А. А. (1963a), Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для уравнений параболического типа, *ЖВМ и МФ*, **3**, 266—298.

Самарский А. А. (1963b), Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности, *ЖВМ и МФ*, **3**, 812—840.

Самарский А. А. (1964a), Локально-одномерные разностные схемы для многомерных уравнений гиперболического типа в произвольной области, *ЖВМ и МФ*, **4**, 638—648.

Самарский А. А. (1964b), Об одном экономичном алгоритме численного решения систем дифференциальных и алгебраических уравнений, *ЖВМ и МФ*, **4**, 580—585.

Самарский А. А. (1964c), Об одной разностной схеме повышенного порядка точности для уравнения теплопроводности с несколькими пространственными переменными, *ЖВМ и МФ*, **4**, 161—165.

Самарский А. А. (1964d), Экономичные разностные схемы для систем уравнений параболического типа, *ЖВМ и МФ*, **4**, 927—930.

Самарский А. А. (1971a), Введение в теорию разностных схем, Наука, Москва.

Самарский А. А. (1971b), О работах по теории разностных схем, История отечественной математики за 50 лет. Т.4, Вып. 2, Изд-во АН УССР, 68—105.

Самарский А. А. (1977), Теория разностных схем, Наука, Москва.

Самарский А. А., Андреев В. Б. (1976), Разностные методы для эллиптических уравнений, Наука, Москва.

Самарский А. А., Арсенин В. Я. (1961), О численном решении уравнений газодинамики с различными типами вязкости, *ЖВМ и МФ*, **1**, 357—360.

Самарский А. А., Гулин А. В. (1973), Устойчивость разностных схем, Наука, Москва.

Самарский А. А., Попов Ю.П. (1975), Разностные схемы газовой динамики, Наука, Москва.

Саульев В. К. (1954a), Доказательство сходимости собственных функций, получаемых методом сеток, *УМН*, **9**, 217—224.

Саульев В. К. (1954b), О нахождении собственных значений методом сеток, *ДАН СССР*, **94**, 1003—1006.

Саульев В. К. (1955), К вопросу решения задачи о собственных значениях методом конечных разностей, Вычисл. Матем, и Вычисл. техн., **2**, 116—144.

Саульев В. К. (1957a), Об одном способе численного интегри-рования уравнений диффузии, *ДАН СССР*, **115**, 1077—1080.

Саульев В. К. (1957b), Об оценке погрешности при нахождении собственных функций методом конечных разностей. *Вычислительная Математика*, **1**, 87—115.

Саульев В. К. (1960), Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток, ФИЗМАТГИЗ, Москва.

Саульев В. К. (1963), О многопараметрических семействах сеточных уравнений для численного интегрирования нестационарных уравнений диффузии, *ЖВМ и МФ*, **3**, 198—201.

Сивашинский С. В. (1971), Решение смешанных задач для симметричных гиперболических систем первого порядка конечноразностными методами, Вестник ленинградского университета. сер. Матем., Вып. 1, 39—55.

Соболев С. Л. (1936), Алгорифм Шварца в теории упругости, *ДАН СССР*, **4**, 235—238.

Соболев С. Л. (1940), Об оценках некоторых сумм для функций заданных на сетке. *Известия АН СССР*, *Серия Математическая*, **4**, 5—16.

Соболев С. Л. (1950), Некоторые применения функционального анализа в математической физике, *ИЗД ЛГУ*.

Софронов И. Д. (1963), К разностному решению уравнения теплопроводности в криволинейных координатах, *ЖВМ и МФ*, **3**, 786—787.

Титов В. А. (1980), Численное решение параболического уравнения с малым параметром при производной по времени, в«Дифференциальные уравнения с малым параметром», ответственные редакторы: Горьков Ю. П., Емельянов К. В., во-137. Свердловск, УНЦ АНСССР.

Тихонов А. Н. (1943), Об устойчивости обратных задач, *ДАН СССР*, **39**, 195—198.

Тихонов А. Н. (1963a). О решении некорректно поставленных задач, *ДАН СССР*, **151**, 501—504.

Тихонов А. Н. (1963b), О регуляризации некорректно поставленных задач,

ДАН СССР, **153**, 49—52.

Тихонов А. Н. (1964a), Об устойчивых методах суммирования рядов фурье, *ДАН СССР*, **156**, 268—271.

Тихонов А. Н. (1964b), О решении нелинейных интегральных уравнений, *ДАН СССР*, **156**, 1296—1300.

Тихонов А. Н. (1965), О нелинейных уравнениях первого рода, *ДАН СССР*, **161**, 1023—1026.

Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. (1974), Методы решения некорректных задач, Наука, Москва.

Тихонов А. Н., Гласко В. Б. (1964), О приближенном решении интегральных уравнений о редгольме перврго рода, *ЖВМ и МФ*, **4**, 564—570.

Тихонов А. Н., Самарский А. А. (1956), О разностных схемах для уравнений с разрывными коэффициентами, *ДАН СССР*, **108**, 393—396.

Тихонов А. Н., Самарский А. А. (1961), Об однородных разностных схемах, *ЖВМ и МФ*, **1**, 5—63.

Тихонов А. Н., Самарский А. А. (1963a), Об однородных разностных схемах высокого порядка точности на неравномерных сетках, *ЖВМ и МФ*, **3**, 99—109.

Тихонов А. Н., Самарский А. А. (1963b), Об устойчивости разностных схем, *ДАН СССР*, **149**, 529—531.

Турчин В. Ф., Нозик В. З. (1969), Статистическая регуляризация решения некоррестных задач, *Известия АН СССР, Серия Физика Атмосферы и Океана*, **5**, 29—38.

Фикера Г. (1973), Теоремы существования в теории упругости, Москва.

Фрязинов И. В. (1964), О разностной аппроксимаций граничных условий для третьей краевой задачи, *ЖВМ и МФ*, **4**, 1106—1112.

Фрязинов И. В. (1966), О решении третьей краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности в произвольной области локально-одномерным методом, *ЖВМ и МФ*, **6**, 487—502.

Фрязинов И. В. (1968), Экономичные симметризованные схемы решения краевых задач для многомерного уравнения параболического типа, *ЖВМ и МФ*, **8**, 436 - 443.

Фрязинов И. В. (1969a), Априорные оценки для одного семейства экономичных схем, *ЖВМ и МФ*, **9**, 595—604.

Фрязинов И. В. (1969b), Экономичные схемы повышенного порядка точности для решения многомерного уравнения параболического типа, *ЖВМ и МФ*, **9**, 1316—1326.

Фрязинов И. В. (1979a), Простроение разностных схем на паре нерегулярных сеток, Препринт, 23, ИПМ. АН СССР, 1—57.

Фрязинов И. В. (1979b), Метод баланса и вапиадионно-разностные схемы мерременных направлений на нерегулярных сетках, Препринт. 53, ИПМ, АН СССР, 1—47.

Фрязинов И. В. (1980), Метод Баланса и Вариационно-разностные схемы, *Дифф. уравнения*, **16**, 1332—1342.

Фрязинов И. В., Маслянкина Л. А. (1977), О разностной аппроксимаций эллиптического и параболического уравнения на нерегулярной сетке, Препринт, 49, ИПМ, АН СССР, 1—63.

Чудов Л. А. (1962), Разностные методы решения задачи Коши для уравнения Лапласа, *ДАН СССР*, **143**, 798—801.

Шилов Г. Е. (1961), Математический анализ, ФИЗМАТГИЗ, Москва.

Шокин Г. И. (1979), Метод дифференциального приближения, Наука, Новосибирск.

Эйдус Д. М. (1952), О решении краевых задач методом конечных разностей, *ДАН СССР*, **83**, 191—194.

Яненко Н. Н. (1959), Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности, *ДАН СССР*, **125**, 1207—1210.

Яненко Н. Н. (1960), Об экономичных неявных схемах, Метод дробных шагов, *ДАН СССР*, **134**, 1034—1036.

Яненко Н. Н. (1961), О неявных разностных методах счета многомерного уравнения теплопроводности, Изв.высш. учебн. заведений, Сер. Матем. 4, 23, 148—157.

Яненко Н. Н. (1964), О слабой аппроксимации систем дифференциальных уравнений, *Сиб. Матем. Жур.*, **5**, 1431—1434.

Яненко Н. Н. (1967), Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Изд-во СО АН СССР, Новосибирск.

Яненко Н. Н. (1968), Введение в разностные методы математической физики, Лекции для студентов НГУ, Ч. 1. 2, Изд-во СО АН СССР. Новосибирск.

Яненко Н. Н., Боярднцев Ю. Е. (1961), О сходимости разностных схем для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами, *ДАН СССР*, **139**, 1322—1324.

Яненко Н.Н., Шокин Ю. И. (1968), О корректности первых дифференциальных приближений разностных схем, *ДАН СССР*, **182**, 776—778.

Яненко Н. Н. Шокин Ю. И. (1969), О первом дифференциальном приближении разностных схем для гиперболических систем уравнений, Сибирский Матем. Жур., **10**, 1173 -1187.